

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΤΡΙΤΗ 19 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2022  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται 1-1;

**Μονάδες 3**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 3**

**A3.** Έστω  $f$  συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $\Delta$  με  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

**Μονάδες 9**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με  $\Sigma$  αν είναι σωστές ή  $\Lambda$ , αν είναι λανθασμένες.

**(α)** Κάθε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι 1-1 είναι και γνησίως μονότονη.

**(β)** Για κάθε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε θα είναι και

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**(γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\Delta = (\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα

αυτό είναι το  $(B, A)$ , όπου  $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$  και  $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ .

**(δ)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο διάστημα  $\Delta$ , παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο  $x_0$  του  $\Delta$  τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε  $f'(x_0)=0$

**(ε)** Αν  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση στο  $[a, \beta]$  και  $G$  μια αρχική της  $f$  στο  $[a, \beta]$ , τότε

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{1-x}, x \neq 1$ .

**B1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

**Μονάδες 5**

**B2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 5**

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$  και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

**Μονάδες 5**

**B4.** Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \frac{1}{1-x} - x - 1$ . Να αποδείξετε ότι  $f=g$  και να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα  $I = \int_0^{-1} f(x)dx$ .

**Μονάδες 5**

**B5.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = e^{1+x}$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases} .$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής, όχι όμως παραγωγίσιμη, στο σημείο  $x_0=0$  και να βρείτε το πρόσημο της  $f$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία, να βρείτε το σύνολο τιμών της καθώς και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x)=2022$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} x + e^{-x} - 1, & x < 0 \\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

είναι αρχική της  $f$  και να υπολογίσετε

το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x$  και την ευθεία με εξίσωση  $x=9$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $f(0) = 3$ ,

$$g(x) = f(x) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \quad \text{και} \quad |f(x) - f(y) - e^x + e^y| \leq |x - y|^2 \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι ο τύπος της  $f$  είναι :

$$f(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$  και ότι ισχύει

$$g'(x) + g(x) < g(x+1), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Να αποδειχτεί ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$

εφάπτεται και στην  $C_g$  στο ίδιο σημείο.

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_g$ , την κοινή εφαπτομένη

$$y = x + 3 \quad \text{των } C_g, C_f \quad \text{και} \quad \text{την ευθεία } x = 1.$$

**Μονάδες 5**

**Δ5.** Ένας ιδεατός διαβάτης διατρέχει από αριστερά προς τα δεξιά ολόκληρη τη γραφική παράσταση της  $f$ , κινούμενος πάνω σε αυτή. Να αποδείξετε ότι κάποια στιγμή η απόστασή του από το σημείο  $N(1, 0)$  γίνεται ελάχιστη και μάλιστα αυτό συμβαίνει σε ένα μόνο σημείο, το οποίο βρίσκεται στο διάστημα  $(-1, 0)$ .

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

- 1.** Στο εξώφυλλο να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**