ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 12 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 3

Α2. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ, παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

Α3. α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

β) Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;

Μονάδες 4

Α4. α) Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση με Σ – Λ (1 μονάδα) και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας (2 μονάδες).

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

Μονάδες 3

β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (Σωστές) ή Λ (Λάθος):

i) Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε δεν είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ii) Αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta) < 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

iii) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε θα διατηρεί πρόσημο στο Δ.

iv) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

Β1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη , έστω g, της f .

Μονάδες 5

Έστω $g(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \neq -1$ η αντίστροφη της f .

Β3. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία & τα κοίλα.

Μονάδες 4

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να χαράξετε την γραφική παράσταση της g.

Μονάδες 5

Β5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = e^{-x}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα (0,1).

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f(x) = $\begin{cases} e^x - \alpha x, & x \leq 0 \\ \dfrac{ln(x+1)+\alpha}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$**,με α∈R.**

Γ1. Να αποδείξετε ότι α = 1.

Μονάδες 3

Γ2. Να βρείτε την παράγωγο και τα κρίσιμα σημεία της f .

Μονάδες 5

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f καθώς και το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται το μεταβλητό σημείο Μ(α, f (α)) της C_f με α < 0. Το α μεταβάλλεται με ρυθμό :

α΄(t) = 2 cm / min.

Έστω N η προβολή του M στον άξονα x΄x και E το εμβαδόν του τριγώνου OMN, όπου O είναι η αρχή των αξόνων, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη στιγμή που η τεταγμένη του M είναι ίση με $1 + \frac{1}{e}$ **.** Σε περίπτωση που βρείτε αρνητικό αριθμό στην απάντηση σας , πώς θα ερμηνεύατε το αρνητικό πρόσημο;

Μονάδες 6

Γ5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τους άξονες, τη γραφική παράσταση και την ευθεία με εξίσωση x = 1.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : R \to R$, με $f(0) = 1$, $f'(x) \neq 0$ και $f'(x) = \dfrac{2f^2(x)}{1 + f^2(x)}$ για κάθε $x \in R$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f^2(x) - 1}{f(x)} - 2x$, $x \in R$ είναι σταθερή.

Μονάδες 3

Δ3. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

Θεωρούμε στη συνέχεια ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in R$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι:

$$f'(x+1) + f(x+1) < f(x+2) < f'(x+2) + f(x+1)$$

Μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx > \frac{3}{2}$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.**

2. **Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί μ ε το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.**
3. **Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο α ν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.**
4. **Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.**
5. **Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.**
6. **Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.**

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ