

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΚΥΡΙΑΚΗ 21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 5

A3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο διάστημα Δ ;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, είναι 1-1 συνάρτηση και f^{-1} είναι η αντίστροφη της, τότε $f^{-1}(f(y)) = y$ για κάθε $y \in A$.

β. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

γ. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

δ. Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = s(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 δηλαδή είναι $u(t_0) = s'(t_0)$.

ε. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α, β]$. Αν $f(x) ≥ 0$ για κάθε $x ∈ [α, β]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $∫_α^β f(x)dx > 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \sqrt{x}, x ≥ 0$ και $h(x) = \frac{x}{1-x}, x ≠ 1$.

B1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f = h ∘ g$ και να εξετάσετε αν είναι ίση με τη συνάρτηση $t(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}} - 1$. **Μονάδες 4+2**

Θεωρούμε στη συνέχεια ότι $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, x ∈ [0,1) ∪ (1, +∞)$

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(-2)$. **Μονάδες 3+3**

B3. Να βρείτε τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής της f . **Μονάδες 7**

B4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$F(x) = -2 \ln|1 - \sqrt{x}| + 2(1 - \sqrt{x}) - x, x ∈ (1, +∞)$ είναι αρχική της συνάρτησης f στο διάστημα $(1, +∞)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$ με $(x - 1)f(x) - x \ln x = 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x - 1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x = 1$.

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $\xi^\xi = e^{2\xi-2}$.

Μονάδες 5

Γ4. Ένα κινητό Μ κινείται στην καμπύλη $y = f(x), x > 1$.

Καθώς το Μ περνάει από το $N(e, f(e))$ η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό $8m/s$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ.

Μονάδες 5

Γ5. Αν είναι γνωστό ότι η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι: $f(x) + f(3x) < 2f(2x)$, για κάθε $x > 0$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{x-1} + \ln x$, $x > 0$

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής και να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f που διαπερνά την C_f . **Μονάδες 8**

Δ2. Αν $0 < \alpha < \beta$ να δείξετε ότι:

$$e^\beta - e^\alpha + \ln \beta^e - \ln \alpha^e \geq 2e(\beta - \alpha)$$

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι:

$$\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx < \ln \sqrt{3}$$

Μονάδες 5

Δ4. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(1) = 1$, $g(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, $g'(x) < 0$ και

$$e^{g^2(x)-1} - e^{-g'(x)-1} = \ln(-g'(x)) - \ln(g^2(x))$$

- i) Να δείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 2**
ii) Να βρείτε τη συνάρτηση g . **Μονάδες 4**

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ