

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
Αν $f'(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 7

A2. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f , στο $+\infty$;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$ τότε οι $g \circ f$ και $f \circ g$ δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

β) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

δ) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g

$$f(x) = \sqrt{4-x}, x \leq 4$$

$$g(x) = \ln x, x > 0$$

B1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να βρεθεί η f^{-1} και να γίνουν στο ίδιο σύστημα αξόνων οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} .

Μονάδες 6

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $h(x) = 4 - x^2, x \geq 0$.

B2. Να ορισθεί η συνάρτηση $g \circ h$.

Μονάδες 6

B3. Έστω $K(x) = \ln(4 - x^2), x \in [0, 2)$. Να βρεθεί η μονοτονία, τα ακρότατα και οι ασύμπτωτες της.

Μονάδες 7

B4. Δείξτε ότι η ευθεία $\psi=1$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $K(x)$ σε ακριβώς ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 2)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1, & x < 0 \\ 2e^x - x^2 - 2x - \alpha, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και να εξετάσετε αν η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ και $\rho \in (-2, -1)$.

Μονάδες 4

Γ4. Το σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 0$ κινείται στη C_f και το α μεταβάλλεται με ρυθμό 1 cm/min . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού που σχηματίζει η C_f με τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$, $x = \alpha$ τη χρονική στιγμή που η κλίση της f στο M είναι $2e - 4$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, $g(x) = 1 + x - e^x$ και $h(x) = f^2(x)$, με $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα.

Μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε το πρόσημο και τις ασύμπτωτες της C_g και να αποδείξετε ότι η ασύμπτωτη (ε) της C_g στο $-\infty$ εφάπτεται με την $h(x)$.

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{3}}{2} < \int_0^1 f(x)dx < \sqrt{3}$.

Μονάδες 6

Δ4. Έστω $M(x, h(x))$ και $N(x, g(x))$.

Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο η απόσταση MN γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ