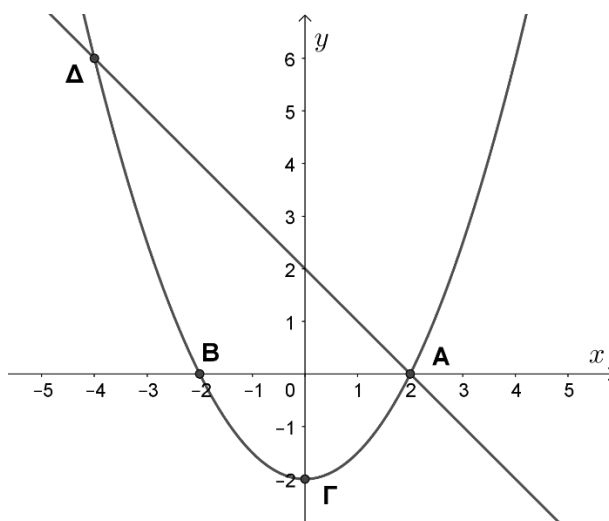


ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.



α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ , να βρείτε τις τιμές των α, β, γ .

(Μονάδες 8)

β) Αν $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.

(Μονάδες 8)

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

(Μονάδες 4)

iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση O (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση O , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta \mu \frac{\pi}{2} t$$

α) Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

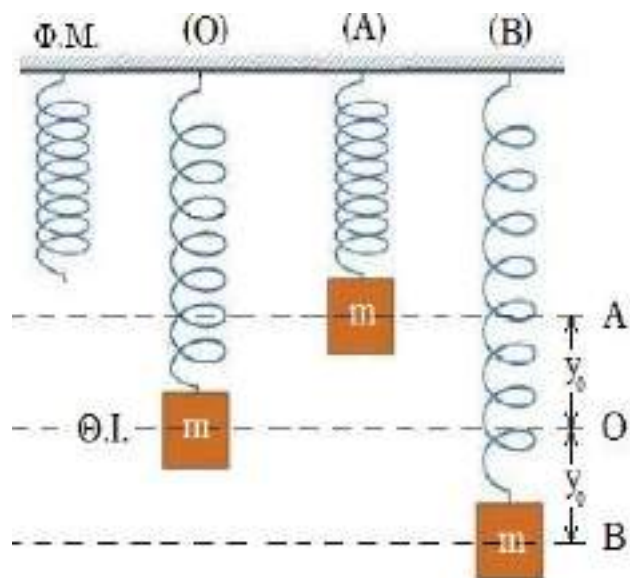
(Μονάδες 06)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$.

(Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1, 1 μέτρα, για $t \in [0, 2]$.

(Μονάδες 07)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση:

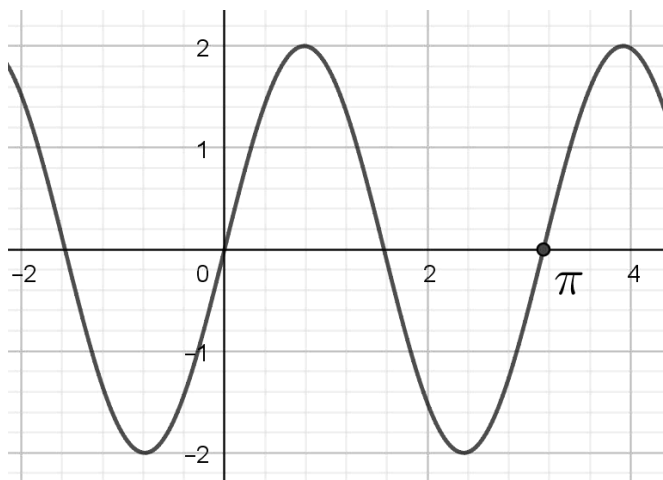
$$f(x) = \eta\mu ax \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - ax\right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu ax \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - ax) - 1, \text{ με } a \in \mathbb{R}.$$

α)

- i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

- ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι $a = 2$.



(Μονάδες 6)

- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y = 1$ για $x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

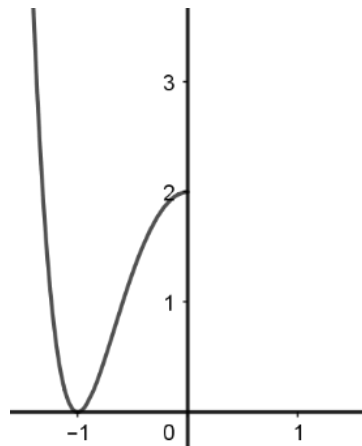
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x \leq 0$. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.



(Μονάδες 4)

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x+3}$ και

$$g(x) = 3x - 1.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g .

(Μονάδες 4)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 6)

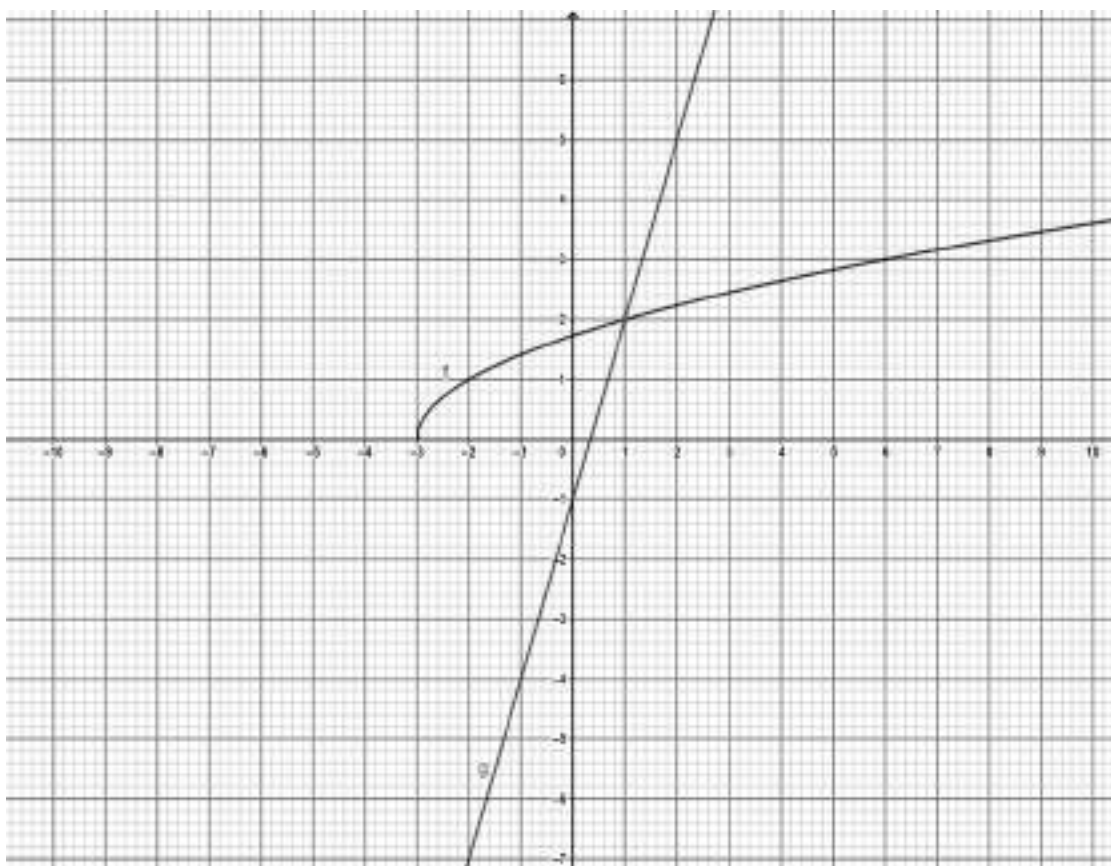
γ)

i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

(Μονάδες 7)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(x) \leq 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

(Μονάδες 6)

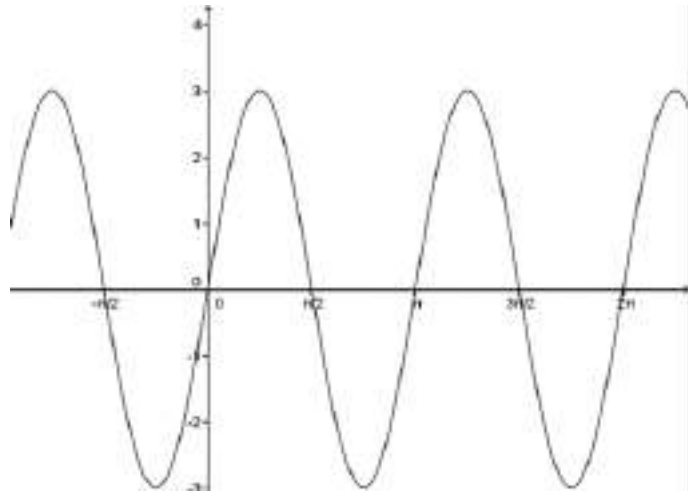
ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής

$$f(x) = \rho \eta\mu(\alpha x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha, \rho > 0$$

α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδο της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)



β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς α και ρ .

(Μονάδες 6)

Έστω $\rho = 3$ και $\alpha = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5, x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4.

(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = \log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.

(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.

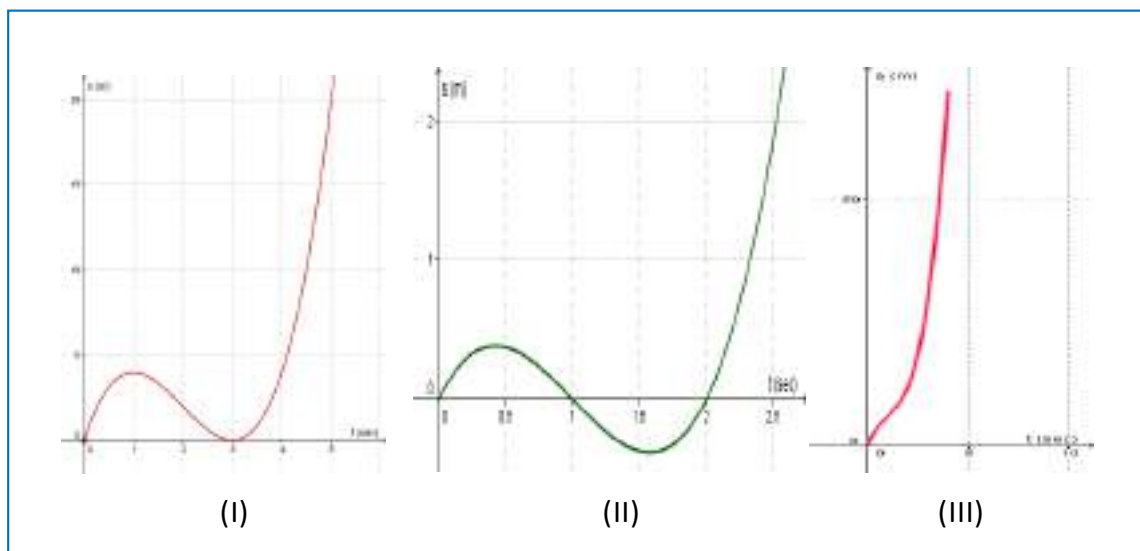
(Μονάδες 10)

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

(Μονάδες 08)

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 04)



ΘΕΜΑ 4

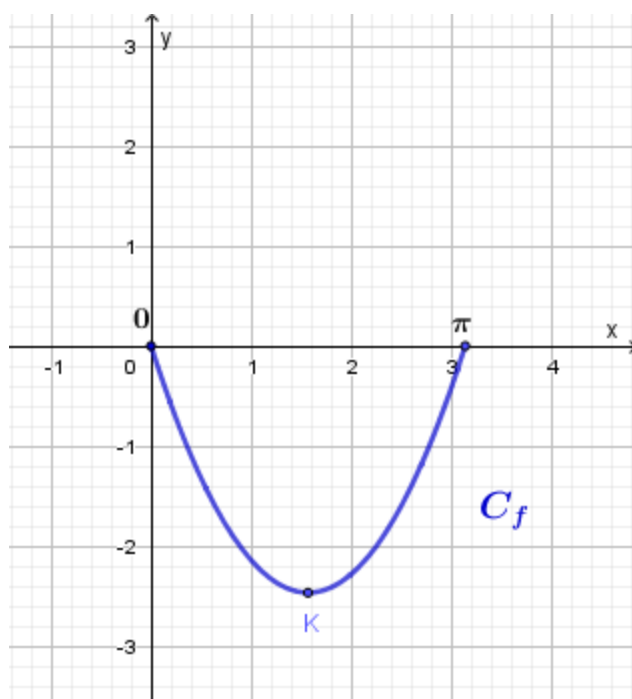
Οι εξισώσεις των γραμμών που αποτελούν την περίμετρο μιας επίπεδης μεμβράνης όπως φαίνεται κάτω από ένα μικροσκόπιο, είναι:

$$x = 0, \quad y = x^2 - \pi x, \quad y = \frac{1}{2} + \eta\mu x \quad \text{και} \quad x = 3$$

Η μεμβράνη πρόκειται να καλυφθεί με ένα γυάλινο ορθογώνιο πλακίδιο.

α)

- i. Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - \pi x$, $x \in [0, \pi]$ είναι το τμήμα της παραβολής που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $K\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{4}\right)$.



Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2} + \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 5)

- ii. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τα ακρότατα των δύο συναρτήσεων και τα διαστήματα μονοτονίας τους.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τις ελάχιστες διαστάσεις του ορθογώνιου πλακιδίου.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x - 4$ και $\delta(x) = x^2 - 3x + 2$. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\delta(x)$, είναι το πολυώνυμο $v(x) = 24x - 24$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 2$,

i. να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$.

(Μονάδες 2)

ii. να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$.

(Μονάδες 8)

iii. να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες, η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Για τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος ισχύει

$$5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0.$$

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

i. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$,

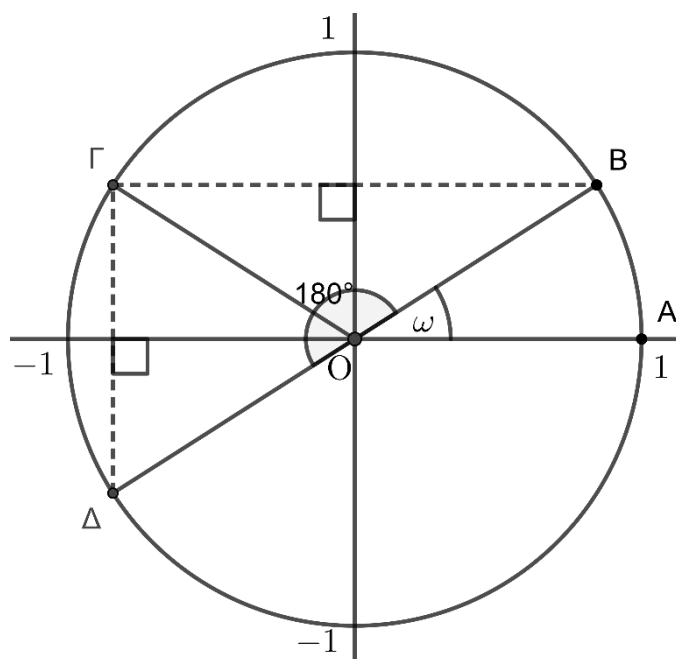
(Μονάδες 6)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων B , Γ και Δ ,

(Μονάδες 6)

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (\alpha - 2)x - 6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α .

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha = 15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 6)

ii. αν $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

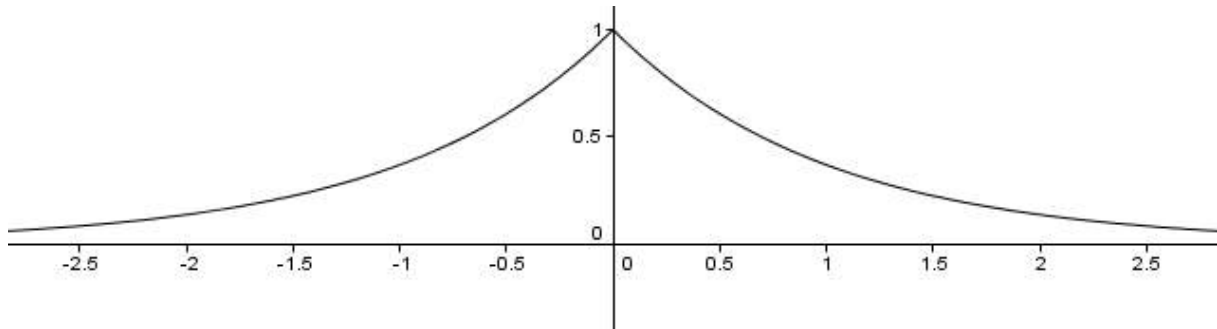
(Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2) < 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f .

$$\text{A. } f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{B. } f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι το σημείο $(0, 1)$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 6)

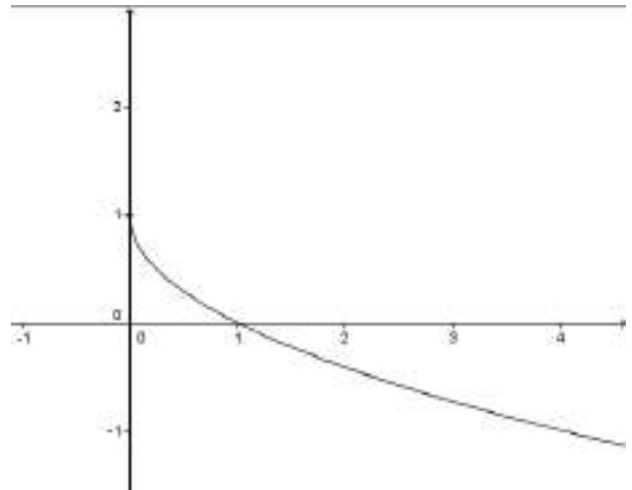
β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, και $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$, να βρείτε το

πρόσημο του γινομένου $P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1)$

(Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$, $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$.

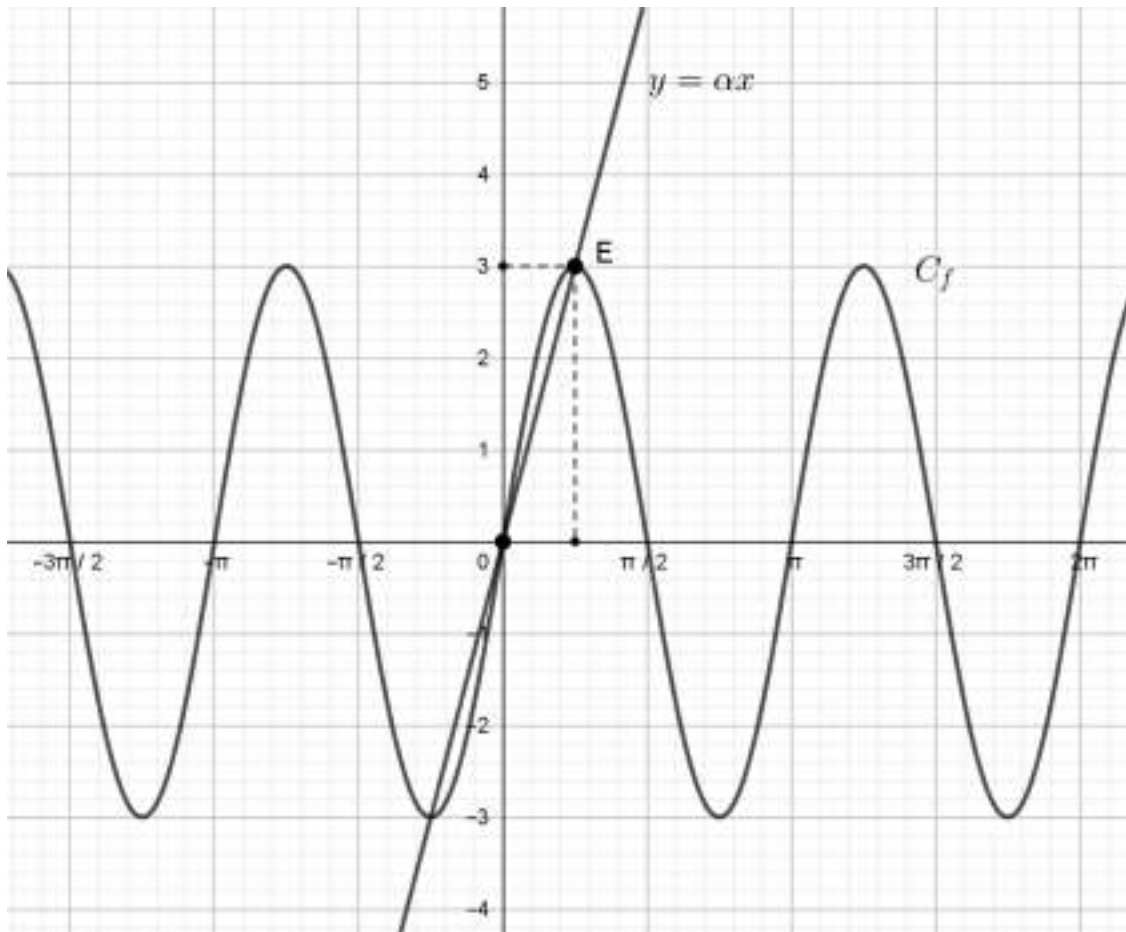
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta\mu(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0$.

(Μονάδες 10)



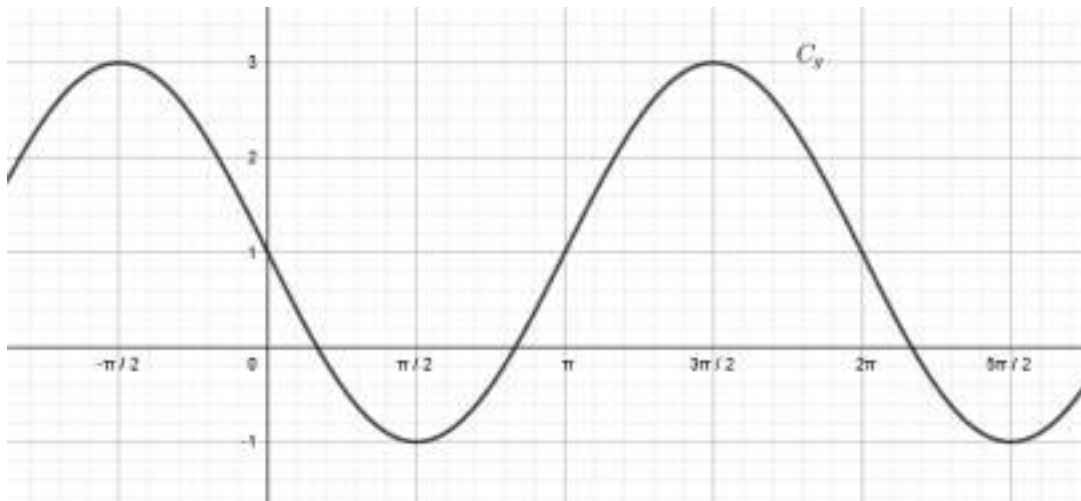
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha\eta\mu\beta x + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ii. Για $\alpha = -2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.

(Μονάδες 5)

δ) Για $\alpha=2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Μία κυβική δεξαμενή A έχει ακμή με μήκος x μέτρα.

Αν αυξηθεί η μία μόνο διάστασή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή B σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

α) Να βρείτε τη διαφορά $\Delta(x)$ των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x .

(Μονάδες 4)

β) Αν ο όγκος της δεξαμενής B είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:

i. Τις διαστάσεις των δεξαμενών A και B.

(Μονάδες 9)

ii. Τη διαφορά των όγκων $\Delta(x)$.

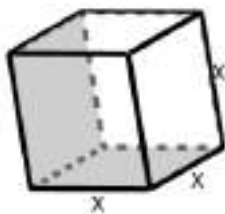
(Μονάδες 4)

γ) Αν επιπλέον αυξηθεί άλλη μία διάσταση της δεξαμενής B κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα.

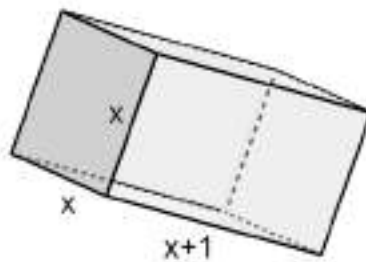
(Μονάδες 8)

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών A, B και Γ

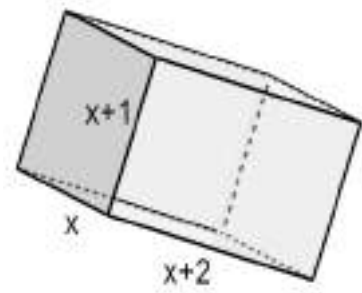
Δεξαμενή A



Δεξαμενή B



Δεξαμενή Γ



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - 2x) - 2\eta\mu(\pi + 2x)$ με $a > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή το 4.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (a + 2)\eta\mu 2x$.

(Μονάδες 5)

β)

i. Να δείξετε ότι $a = 2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την περίοδο της f .

(Μονάδες 5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $g(x) = 5 - \sigma\upsilon\nu^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g , όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 5$, με $x \in \mathbb{R}$.

- i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x - 1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x - 2)$ είναι -1 , να δείξετε ότι:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -6 \\ \text{και} \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases}.$$

(Μονάδες 6)

- ii. Να δείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 12$.

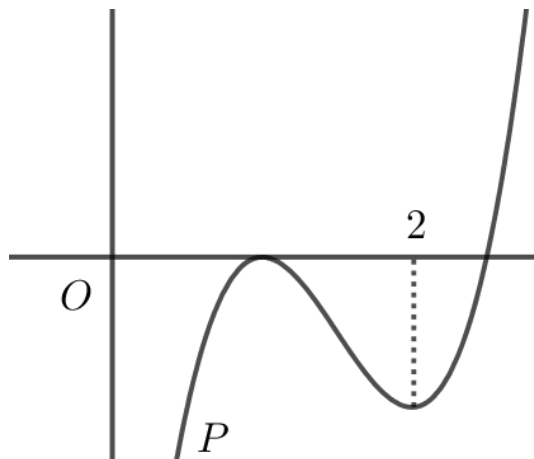
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η ακόλουθη, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

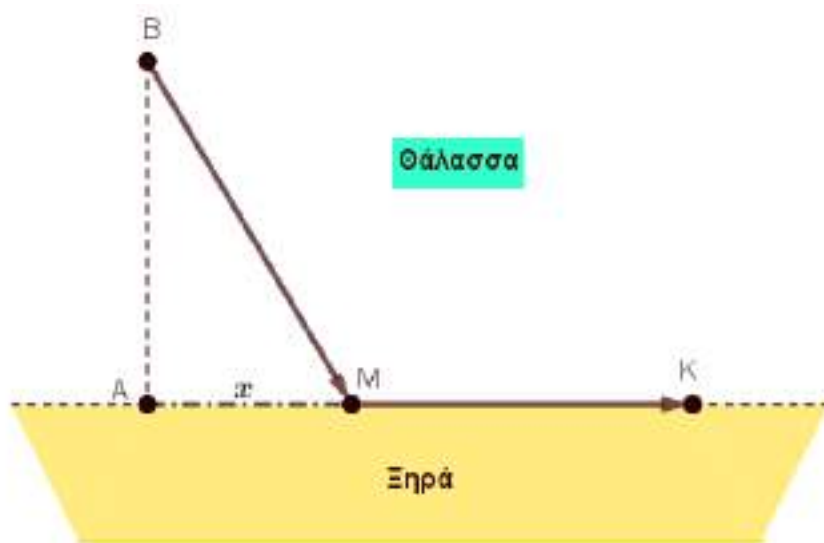
(Μονάδες 4)



ΘΕΜΑ 4

Ένας κολυμβητής βρίσκεται στη θάλασσα, στο σημείο B σε απόσταση 2 km από το κοντινότερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής. Ο προορισμός του είναι ένα σημείο K της ακτής, το οποίο απέχει 4 km από το A . Η διαδρομή που κάνει είναι η BM κολυμπώντας στη θάλασσα με σταθερή ταχύτητα 3 km/h και η MK τρέχοντας στην ακτή με σταθερή ταχύτητα 5 km/h .

Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ του διαστήματος s που διανύεται, της ταχύτητας v και του αντίστοιχου χρόνου κίνησης t , είναι $v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$.



Αν το σημείο M απέχει από το A απόσταση $x\text{ km}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $BM = \sqrt{4 + x^2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει τον χρόνο κίνησης t (σε h) του κολυμβητή – δρομέα ως προς την απόσταση x (σε km) είναι η:

$$t(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{4 - x}{5}, \quad x \in [0, 4].$$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M της ακτής, έτσι ώστε ο χρόνος της διαδρομής του κολυμβητή – δρομέα να είναι $\frac{4}{3}$ ώρες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e) - e^2 - 4$.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+5}\right)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $\alpha \in \mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(x+1) = 14$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β , αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

(Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = 4, \beta = -2$

i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 + 5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 14(x + 2)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

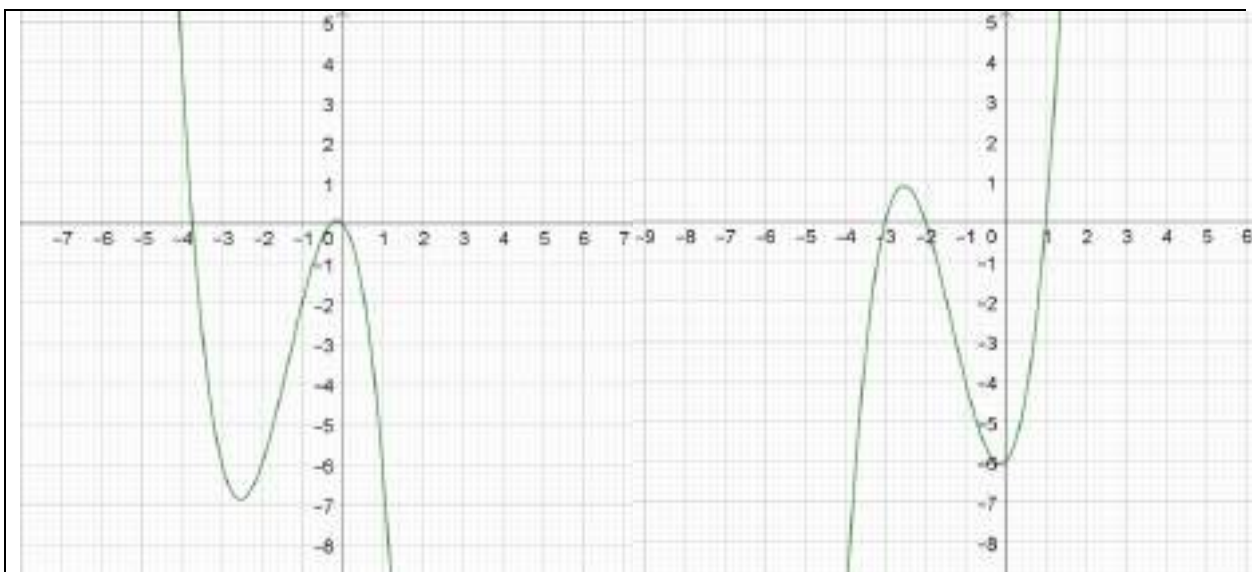
(Μονάδες 10)

β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

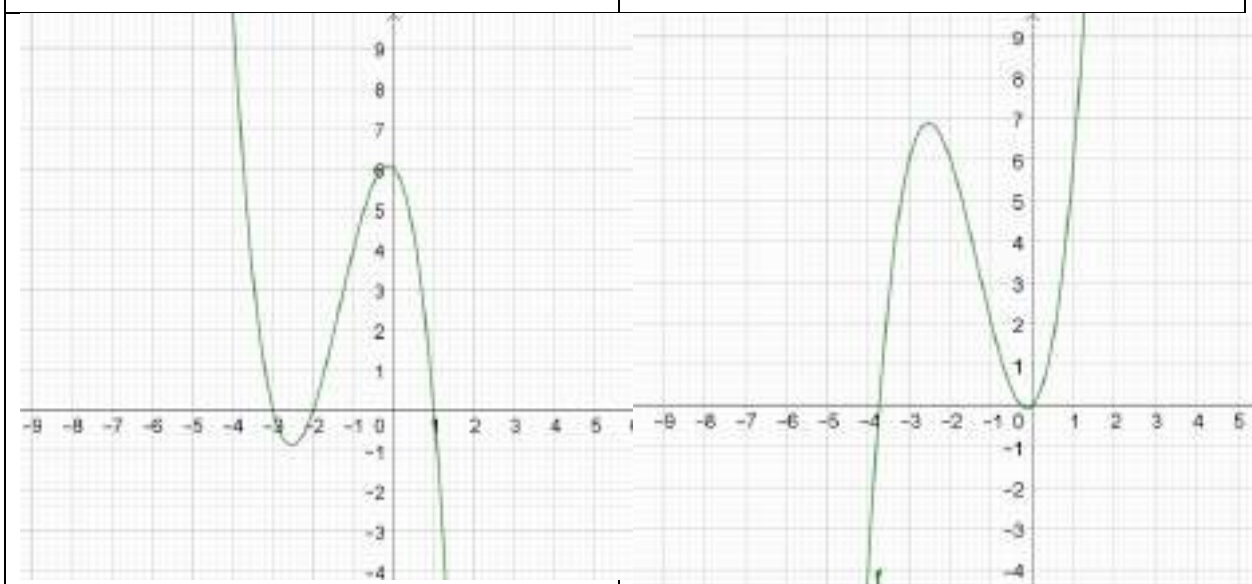
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

(Μονάδες 8)



Σχήμα 1

Σχήμα 2



Σχήμα 3

Σχήμα 4

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $A = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 1$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + \alpha$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται, για τις μη αρνητικές τιμές του x , η γραφική της παράσταση. Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, τότε:

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση για τις αρνητικές τιμές του x .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της, την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν οι ακρότατες τιμές της;

(Μονάδες 8)

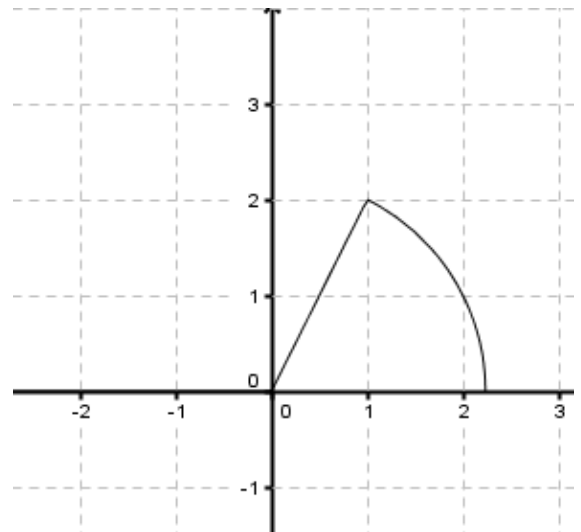
γ) Έστω θ ένας αριθμός με $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i. $\eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\upsilon\theta$.

(Μονάδες 5)

ii. $f(\eta\mu\theta)$ και $f(\sigma\upsilon\upsilon\theta)$

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2, x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2, x \neq 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m - M = 5 \cdot \log\left(\frac{d}{10}\right)$, (I) όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με $3,26$ έτη φωτός $= 30,9 \cdot 10^{12} \text{ Km}$.

α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του;

(Μονάδες 7)

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1,157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100$ parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα;

(Μονάδες 6)

γ) Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς d .

(Μονάδες 7)

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος 0,46 και απόλυτο μέγεθος $-5,14$. Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$.

(Μονάδες 5)

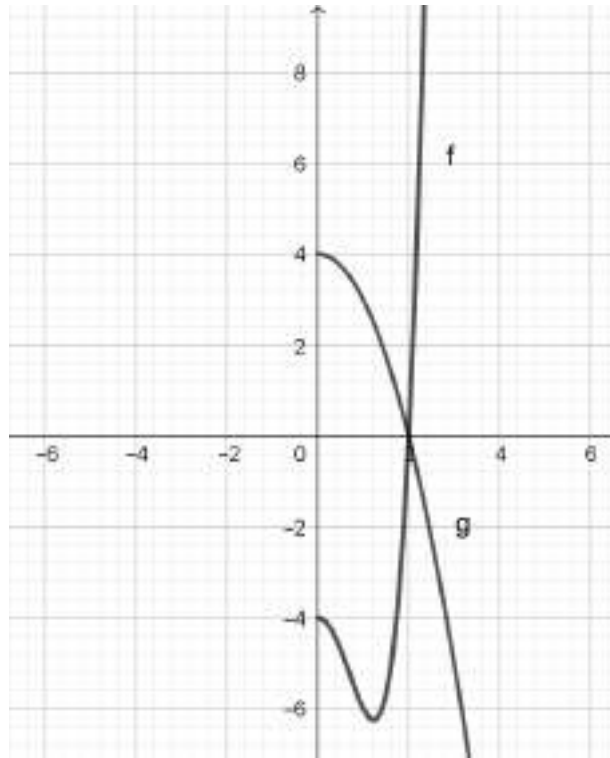
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ και $g(x) = -x^2 + 4$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ και $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .



Αφού μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας, να συμπληρώσετε τις γραφικές παραστάσεις σε όλο το $\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε, αλγεβρικά ή γραφικά:

i. την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$ και $g(x) = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β).

(Μονάδες 7)

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\alpha \neq 0$, το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Με $\alpha = -1$ και $\beta = 0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log \sqrt{10}) > 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2 - 1$ δίνει πηλίκο $3x - 2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5) \neq 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \kappa x - 1$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\kappa = 0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$,

(Μονάδες 6)

ii. να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \rho \eta\mu x$, $g(x) = \eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των ρ, ω , αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι -2 και η περίοδος της g είναι π . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 6)

β)

- i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και $g(x) = \eta\mu(2x)$, $x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 10)

- ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $2\eta\mu \frac{5\pi}{9} > \eta\mu \frac{10\pi}{9}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ και $g(x) = \sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

(Μονάδες 4)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

(Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .

γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.

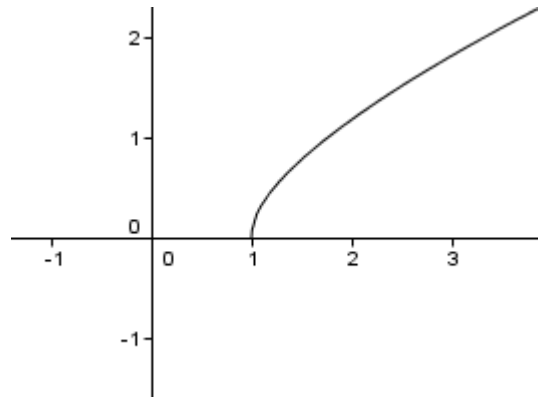
(Μονάδες 4)

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

(Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 1 - x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1 - x$.

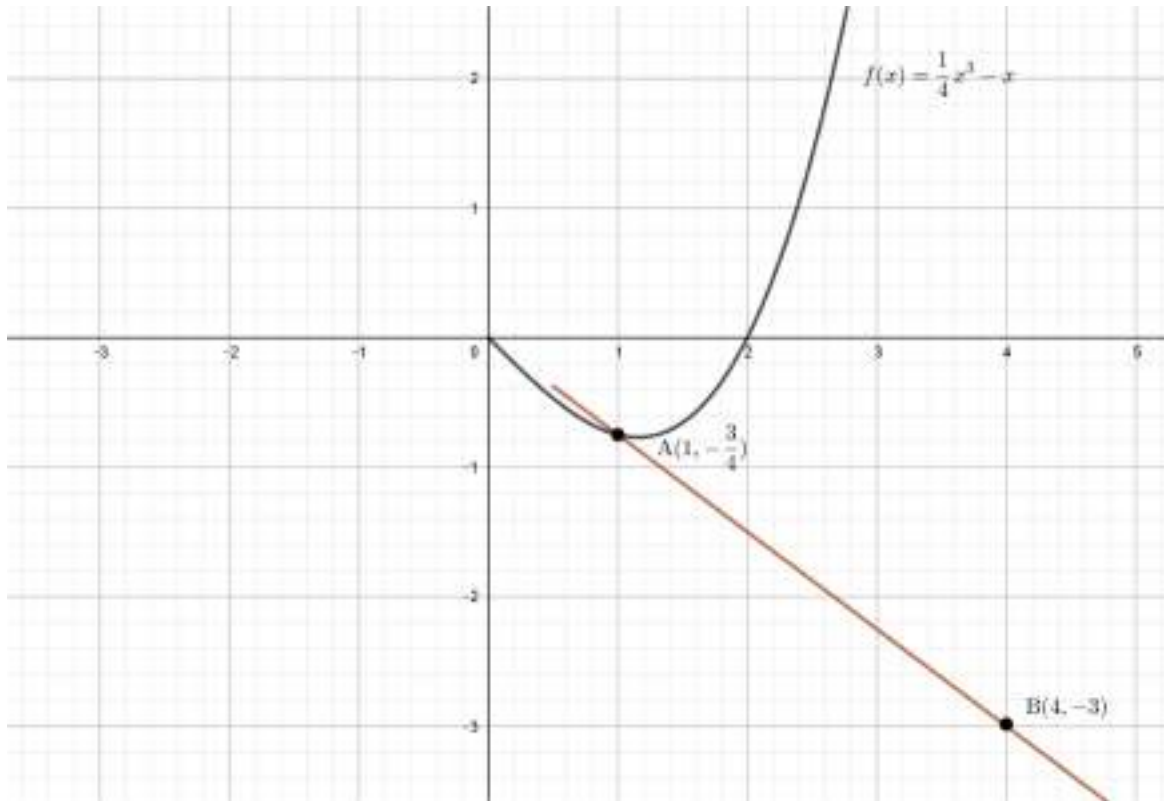
(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x, x \in \mathbb{R} \text{ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία } A\left(1, -\frac{3}{4}\right) \text{ και } B(4, -3).$$



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$.

(Μονάδες 6)

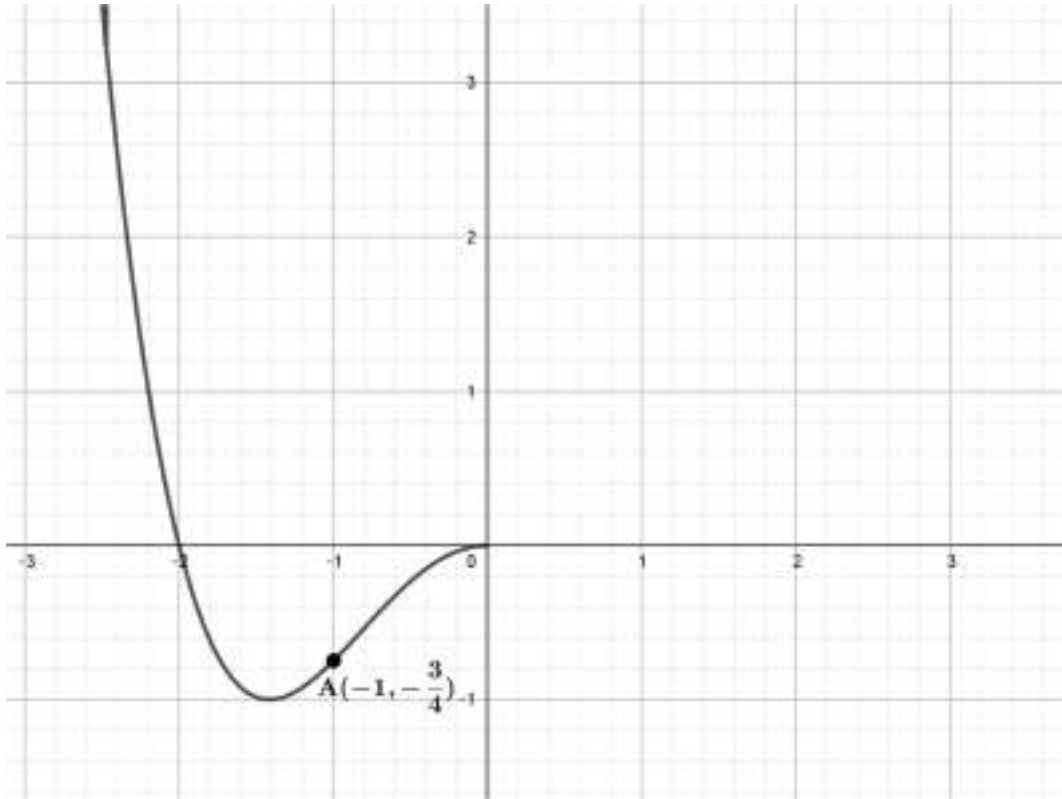
γ) Αν η ευθεία AB έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{4}x$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \alpha x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R} \text{ και το σημείο } A\left(-1, -\frac{3}{4}\right) \text{ αυτής.}$$



α) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha = -1$,

i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x > 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αφού επιβεβαιώσετε ότι $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{4}$, με χρήση του β) ερωτήματος ή με όποιον άλλο

τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y = -\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = a, a \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1).

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $a=0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$ είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) Για $a=2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.

ii) Για $a \neq 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2, 2]$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 60\text{cm}^2$, του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 2cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

α)

i. Να δείξετε ότι $y = \frac{120}{x}$.

(Μονάδες 3)

- ii. Αφού εκφράσετε όλες τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου συναρτήσει του x , να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση:

$$x^3 + x^2 - 3600 = 0.$$

(Μονάδες 7)

β) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 16, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων τριγώνων που ικανοποιούν τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Να λύσετε την εξίσωση $x(e^x - 1) = 0$

(Μονάδες 03)

ii. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x(e^x - 1)$

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.

(Μονάδες 06)

iii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: « η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της». Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

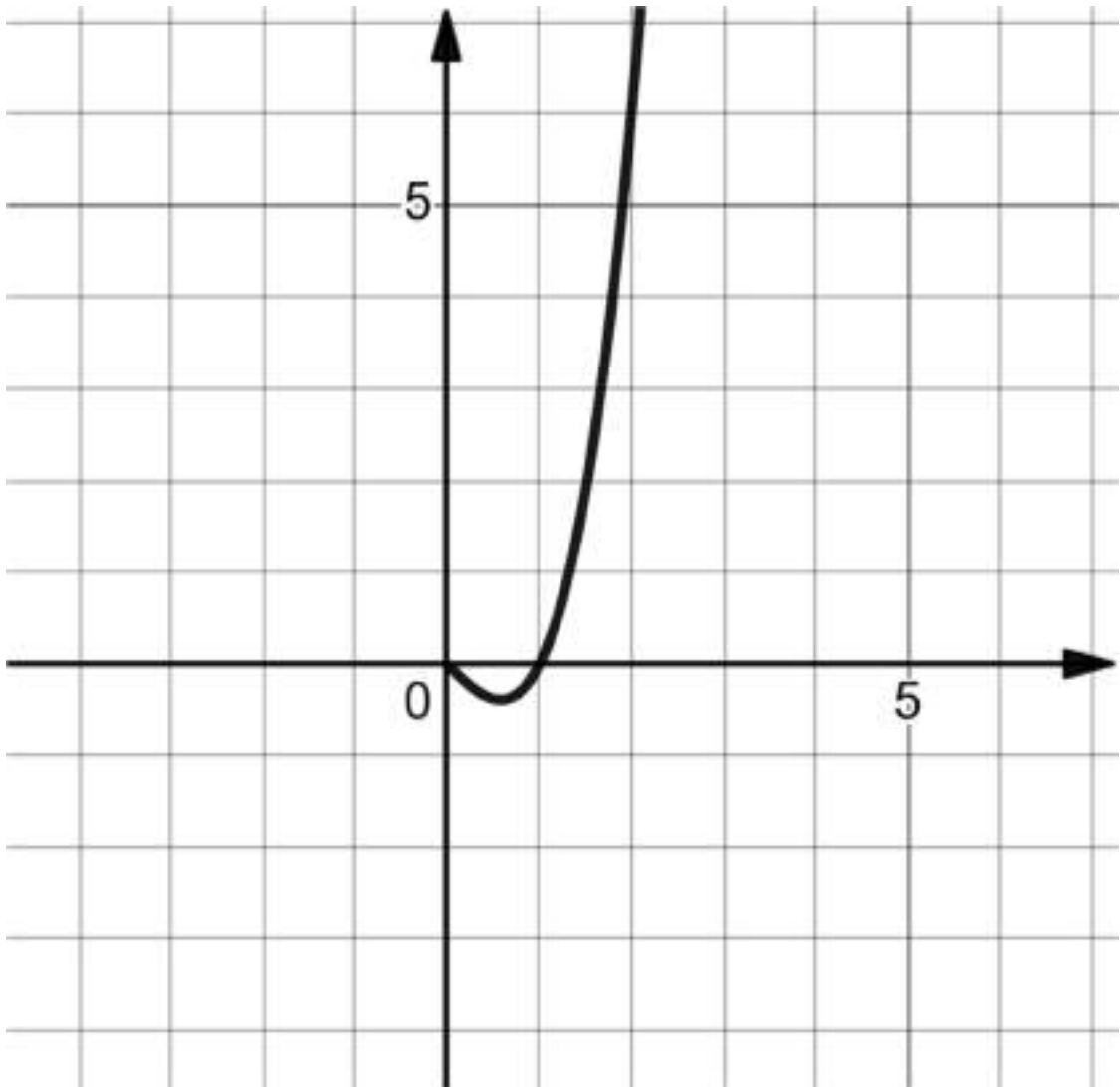
Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{όταν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$ και $h(x) = x^3 - x, x \in \mathbb{R}$.

α)

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

(Μονάδες 03)

- ii. Να συμπληρώσετε το παρακάτω σχήμα ώστε να παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h .



(Μονάδες 04)

- iii. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$.

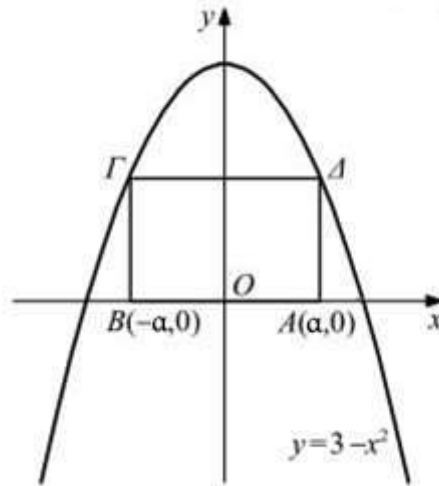
(Μονάδες 08)

β) Αν $x \geq 0$ να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η παραβολή $y = 3 - x^2$ και τα σημεία της Γ, Δ . Δίνεται ακόμα ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\alpha \in (0, \sqrt{3})$.



α) Αν E είναι το εμβαδό του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, τότε:

- i. να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (0, \sqrt{3})$ είναι $E = f(\alpha) = -2\alpha^3 + 6\alpha$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 08)

- ii. να βρεθεί το εμβαδό E στη θέση $\alpha = 1$.

(Μονάδες 02)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες.

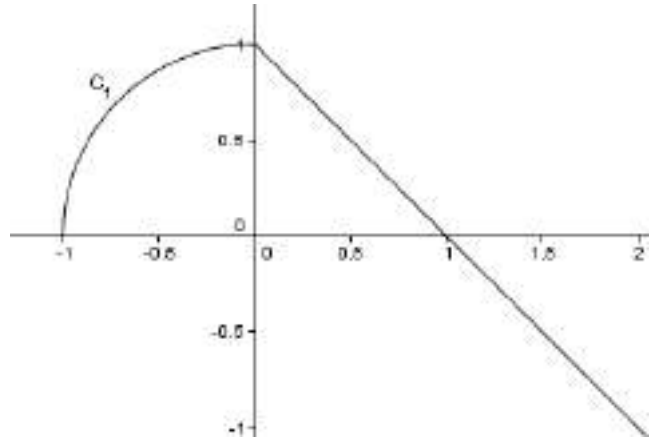
(Μονάδες 12)

γ) Να βρεθεί η θέση του α , ώστε το εμβαδό E να πάρει τη μέγιστη τιμή του.

(Μονάδες 03)

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση C_f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.

(Μονάδες 5)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$f\left(-\frac{3}{5}\right), f\left(-\frac{5}{9}\right)$$

(Μονάδες 7)

γ) Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases},$$

να βρείτε τους αριθμούς $f(\sin 120^\circ)$, $f(\eta\mu 120^\circ)$

(Μονάδες 8)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x-2)$, $x \geq 1$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του x προκύπτουν αυτές;

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 7)

δ) Αν για κάποιο αριθμό α με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

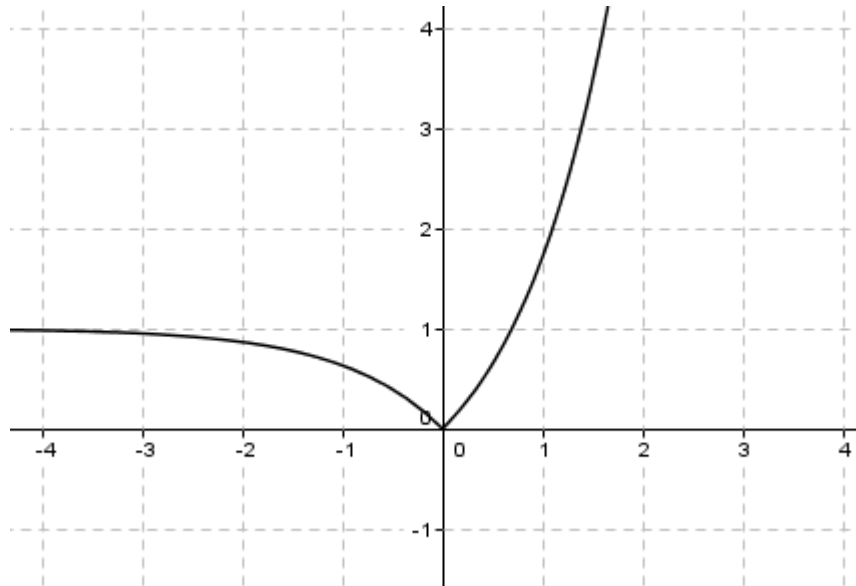
(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = |e^x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)



β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f .

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y = \alpha$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο ($1W/m^2$). Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι $10^{-12} w/m^2$. Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db). Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση $D = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ όπου I_0 η ελάχιστη αντιληπτή ένταση και I η ένταση του ήχου.

α) Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι $100 w/m^2$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι μια αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης.

(Μονάδες 10)

γ) Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Ο Νόμος των Bouguert-Lambert στη φωτομετρία, λέει ότι η ένταση I μιας ακτινοβολίας (ηλιακό φως, ακτίνες Χ, κ.λπ.) που εισχωρεί κατακόρυφα σε ένα διαφανές μέσο (νερό λιμνών, θαλάσσης, γυαλί, κ.λπ.) μειώνεται εκθετικά, απορροφούμενη από το μέσο, συναρτήσει του βάθους (πάχους) h του μέσου, σύμφωνα με τη συνάρτηση $I = I_0 \cdot e^{-\lambda h}$, όπου $\lambda > 0$ σταθερά και I_0 η αρχική ένταση.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν.

(Μονάδες 3)

β) Γνωρίζουμε ότι για καθαρό νερό θαλάσσης είναι $\lambda = 1,4 \text{ m}^{-1}$ (το m παριστάνει μέτρα) και ότι μια συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής δεν μπορεί να υπάρξει, όταν η ένταση του ηλιακού φωτός γίνει μικρότερη ή ίση από το $\frac{1}{4}$ της αρχικής έντασης. Να βρείτε για ποιες τιμές του βάθους h συμβαίνει αυτό. (Δίνεται ότι $\ln 2 = 0,7$)

(Μονάδες 12)

γ) Σε κάποιο άλλο διαφανές μέσο, γνωρίζουμε ότι σε βάθος 10 m η ένταση μιας ακτινοβολίας μειώνεται στο μισό της έντασης της αρχικής ακτινοβολίας. Να αποδείξετε ότι στην συγκεκριμένη κατάσταση ισχύει $I = I_0 \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Ένα από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου είναι η αψίδα Gateway Arch στην πόλη Saint-Louis των Η.Π.Α. Θεωρώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο παρακάτω σχήμα, η πρόσοψη της αψίδας προσεγγίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = -192 \left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}} \right) + 576,$$

με $f(x) \geq 0$, όπου οι αριθμοί $x, f(x)$ μετρούνται σε μέτρα (m).

(Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης λέγεται αλυσοειδής καμπύλη).

α) Να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος ΟΚ της αψίδας είναι 192 m .

(Μονάδες 7)

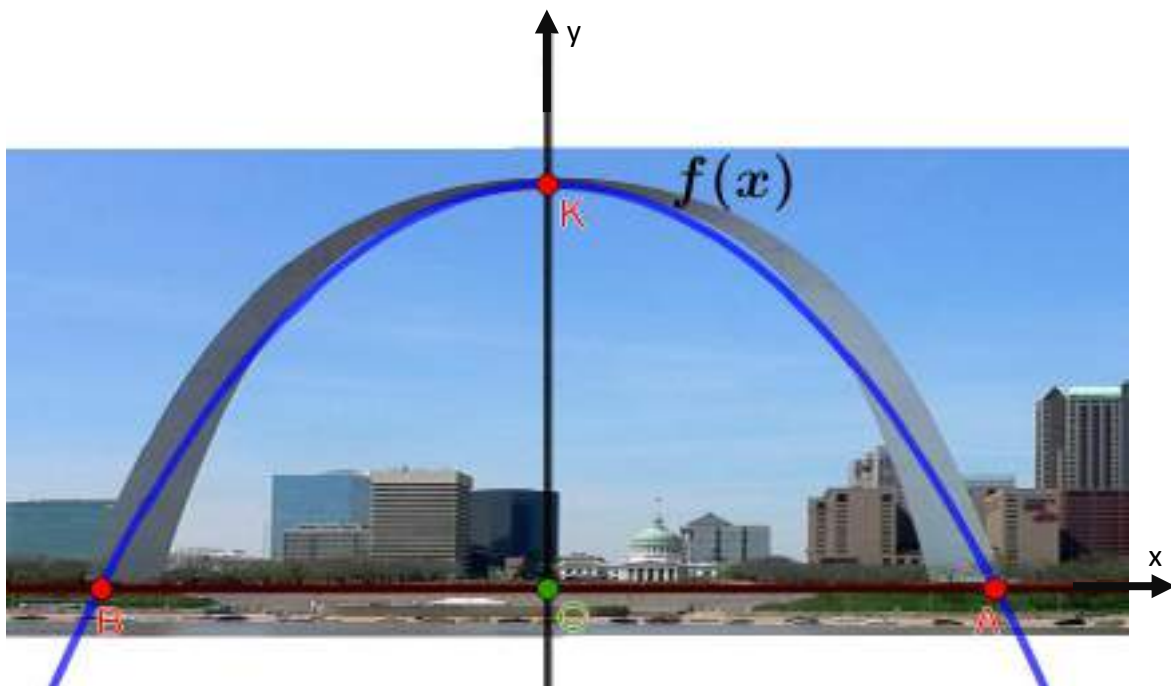
β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α στο οποίο η καμπύλη τέμνει τον θετικό ημιάξονα

Οx. Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 0,96$.

(Μονάδες 13)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία Α και Β έχουν αντίθετες τετμημένες, να αποδείξετε ότι το πλάτος ΑΒ της αψίδας είναι ίσο με το μέγιστο ύψος της ΟΚ.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{2-\lambda}{4}\right)^x$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι εκθετική συνάρτηση.

(Μονάδες 5)

β) Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 7)

γ) Για $\lambda = 0$

i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 6$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ και } g(x) = 4x - 4 \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

α) Από τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

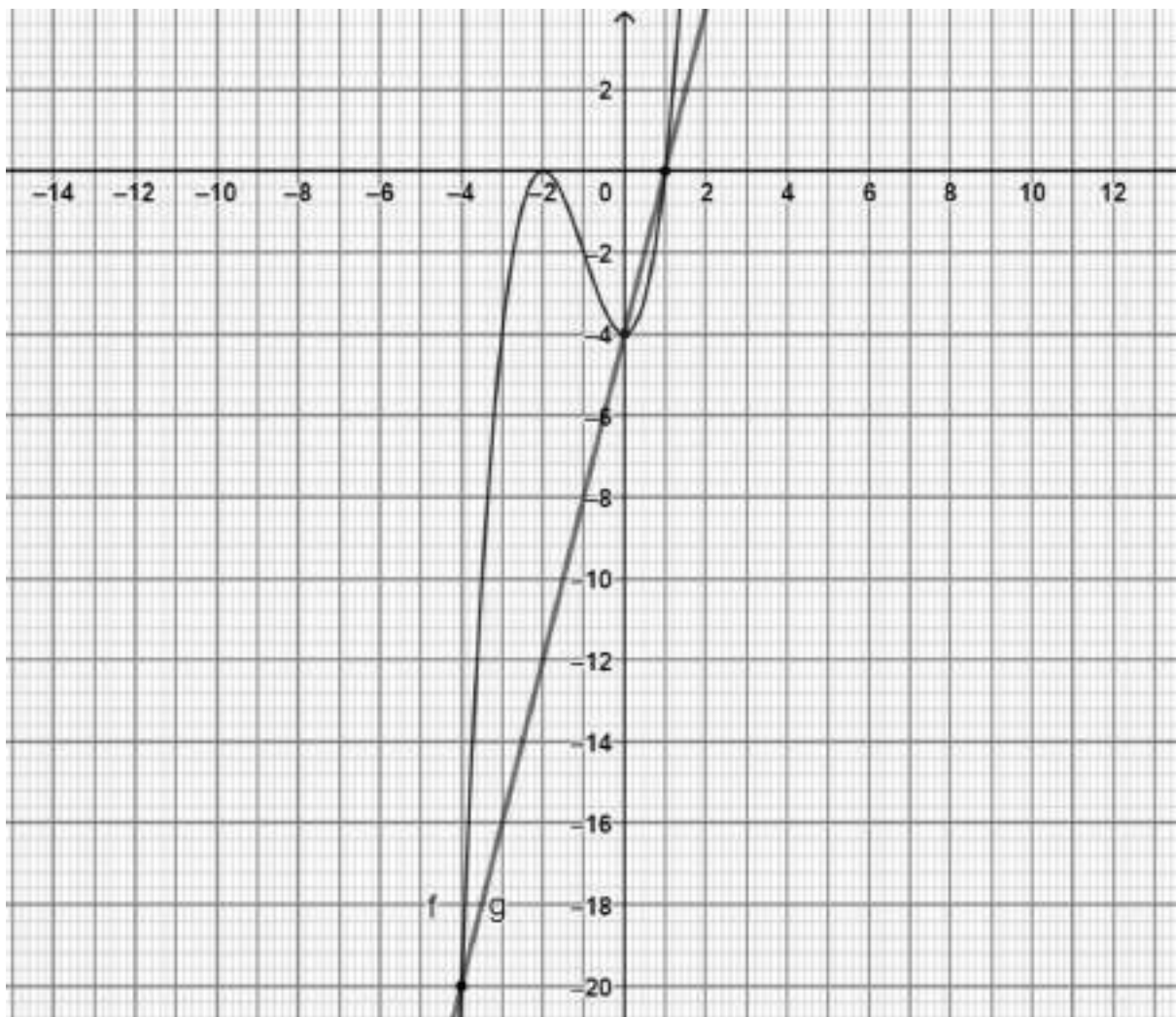
(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 2x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $P(1) = 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ ισούται με 15,

α) Να δείξετε ότι $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x) = x^2 + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sin^3 x + \sin x = 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 x$, $x \in (0, 2\pi)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

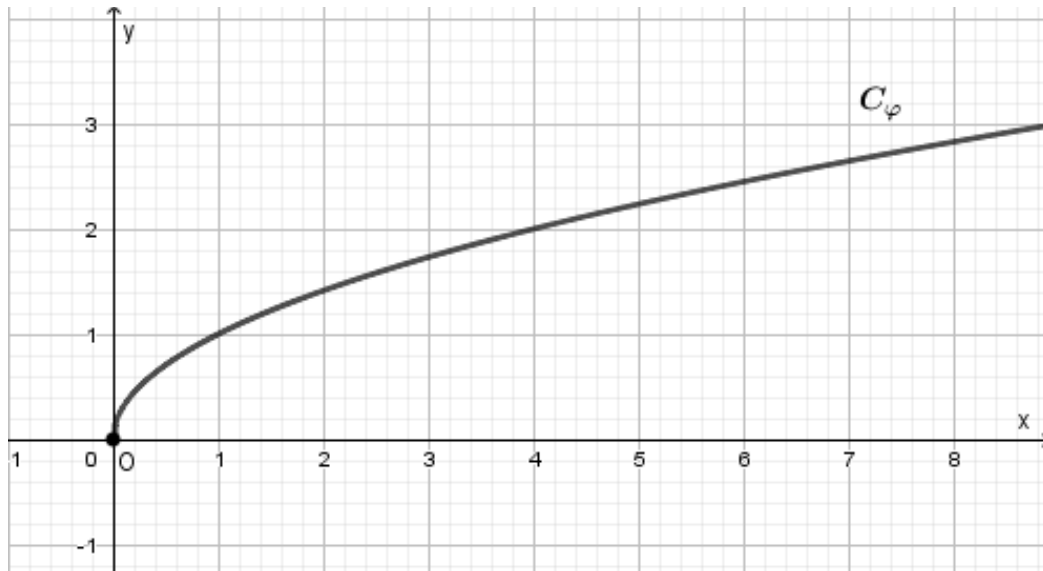
Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = \sqrt{x}, \text{ με } x \geq 0, f(x) = \sqrt{x-1}, \text{ με } x \geq 1 \text{ και } g(x) = \frac{x+1}{3}, \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 08)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ .



- i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 02)

- ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

(Μονάδες 04)

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 06)

δ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\ln 10 - 1} > \frac{1 + \ln 10}{3}$.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 6)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x - 1) \ln x$, με $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1,0)$, $B(x,0)$ και $\Gamma(x, \ln x)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και $g(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$, τότε:

α) Να βρείτε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O .

(Μονάδες 7)

δ) Έστω $f(x) = -2x^3$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε 2 μονάδες αριστερά και μια μονάδα πάνω.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $g(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 6)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x + 3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος.

(Μονάδες 7)

Αν επιπλέον $P(1) = 0$, τότε:

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{21}{2}$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

(Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin x) = 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, η θερμοκρασία θ , σε βαθμούς Κελσίου, ενός αντικειμένου μειώνεται με την πάροδο του χρόνου t , σε λεπτά, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{kt}$, όπου k μια σταθερά με $k < 0$, θ_0 η αρχική θερμοκρασία του αντικειμένου, ενώ T είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο τοποθετείται το αντικείμενο, με $\theta_0 > T$.

Ένα αντικείμενο έχει θερμανθεί στους 100°C και στη συνέχεια αφήνεται να κρυώσει σε ένα δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία 30°C . Γνωρίζουμε ότι 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι 80°C .

α) Να αποδείξετε ότι $k = -0,0672$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\theta(t) = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{t/5}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε, με προσέγγιση εκατοστού, τη θερμοκρασία του αντικειμένου μετά από 1 ώρα και 40 λεπτά.

(Μονάδες 8)

Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{5}{7}\right) = -0,336$ (προσεγγιστικά) και $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} \cong 0,034$.

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

(Μονάδες 03)

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x) + g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O .

(Μονάδες 04)

ΘΕΜΑ 4

α) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x+1} > 0$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.

(Μονάδες 03)

ii. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 10)

iii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f , που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :

α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη).

(Μονάδες 6)

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας.

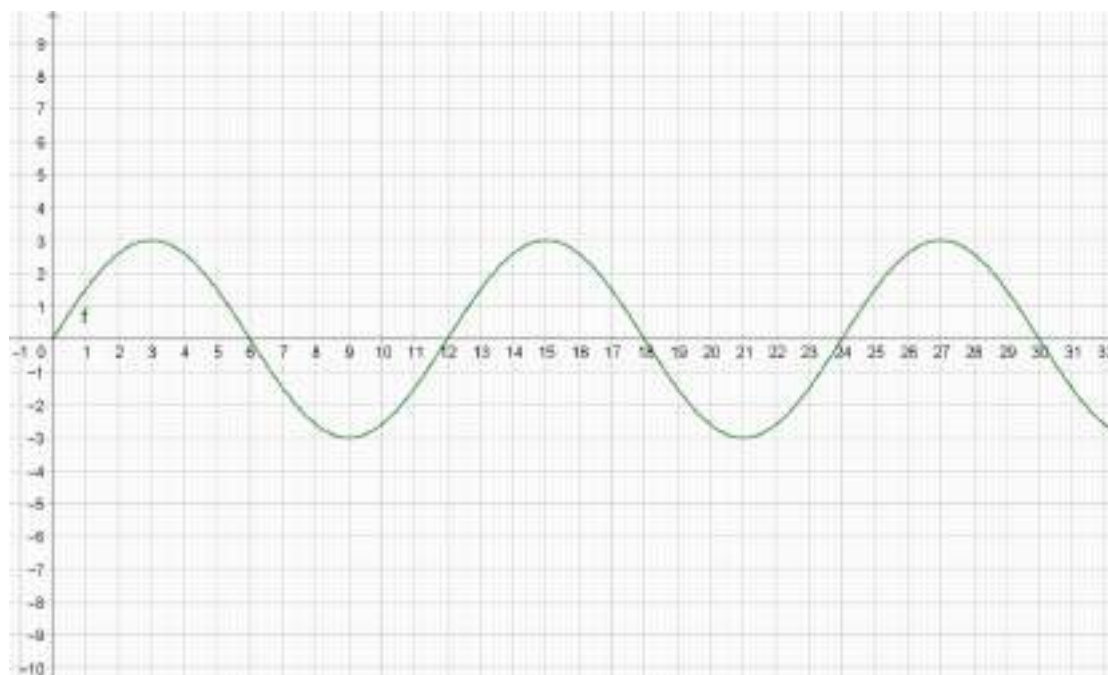
(Μονάδες 6)

γ) τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος με πλευρά 2 cm , παίρνουμε τα εσωτερικά σημεία E, Z, H, Θ των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$, αντίστοιχα, ώστε $EB = Z\Gamma = H\Delta = \Theta A = x$ και σχηματίζεται το τετράγωνο $EZH\Theta$.

α) Να εκφράσετε την πλευρά EZ ως συνάρτηση του x και να βρείτε τις δυνατές τιμές του x .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\Theta$ συναρτήσει της πλευράς x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = 2(x-1)^2 + 2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

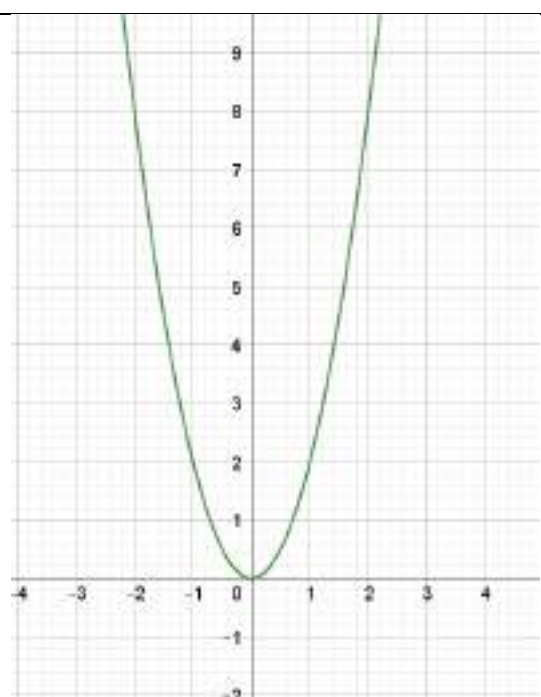
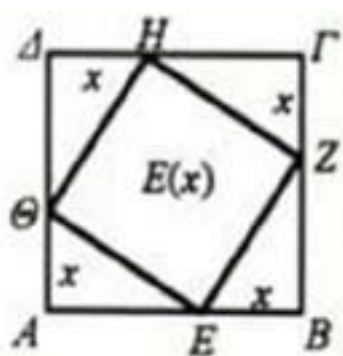
(Μονάδες 6)

γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$. Μετατοπίζοντας την κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του $EZH\Theta$ να γίνεται ελάχιστο.

(Μονάδες 8)

δ) Τι συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία E, Z, H, Θ στην περίπτωση που το εμβαδόν του $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Με συρματοπλέγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις x και y , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς x .

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = -(x-5)^2 + 25$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.

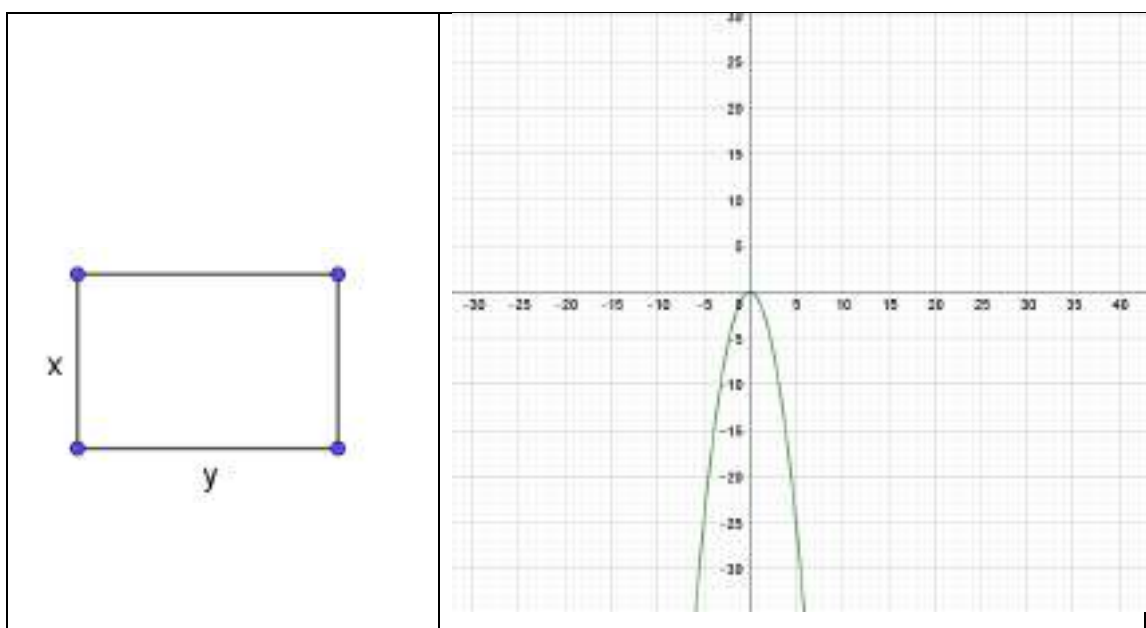
(Μονάδες 7)

γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^2$. Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 7)

δ) Για την τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα γ), να βρείτε την πλευρά y και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 4)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 6x^2 - 7$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$ σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

ii. Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$, να λύσετε την εξίσωση

$$(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0, \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \sqrt{3}\varepsilon\phi\omega \cdot \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$. Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση $-2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu\omega = -1, \omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$, τότε:

α)

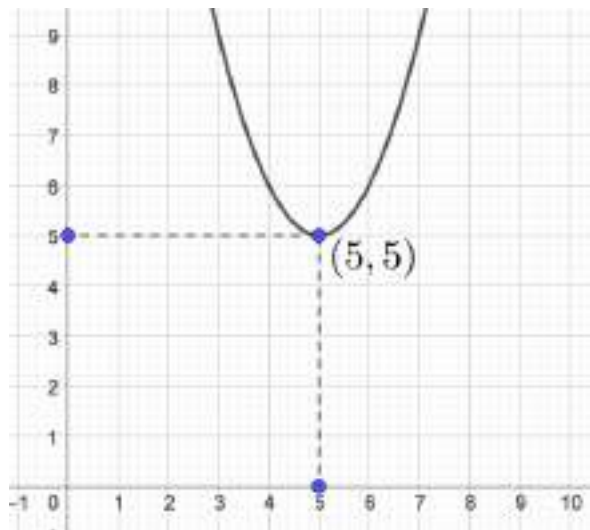
i. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(Μονάδες 10)

ii. Για $\varepsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 04)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 10x + 30, x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.



i. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g .

(Μονάδες 04)

ii. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινά σημεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4

Δύο συμμαθητές ο Αλέξανδρος και ο Φίλιππος που κάθονται στο ίδιο θρανίο σχεδιάζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε μιλιμετρέ χαρτί και στη συνέχεια προσπαθώντας να υπολογίσουν τις συντεταγμένες ενός δοσμένου σημείου M αυτού του κύκλου διαφωνούν στην απάντησή τους. Ο Αλέξανδρος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του σημείου M είναι $M(0,8, 0,6)$ ενώ ο Φίλιππος εκτιμά ότι οι συντεταγμένες του είναι $M(1, 1)$.

α) Ποιος από τους δύο έχει σίγουρα άδικο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)

β) Αν υποθέσουμε ότι το σημείο του οποίου υπολογίστηκαν σωστά οι συντεταγμένες του είναι το $M(0,8, 0,6)$

i. να αιτιολογήσετε ότι $\eta\mu\omega = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0,8$

(Μονάδες 03)

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \eta\mu(\pi - \omega) - 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) + \varepsilon\phi(-\omega) + \sigma\phi(\pi + \omega).$$

(Μονάδες 05)

γ) Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu\omega \cdot x^3 - 10\eta\mu\omega \cdot x^2 + 5x - 3$, $x \in \mathbb{R}$ όπου ω η γωνία που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Το εμβαδόν του τριγώνου OAM που βλέπετε στο παρακάτω σχήμα είναι $(OAM) = \frac{4}{6}$ τετραγωνικές μονάδες. Η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη στον κύκλο στο σημείο A .

α) Να αποδείξετε ότι για τη γωνία $\omega = \widehat{AOM}$ ισχύει $\varepsilon\phi\omega = \frac{4}{3}$, $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 08)

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\phi\omega$ της γωνίας

$\omega = \widehat{AOM}$ αν ισχύει $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

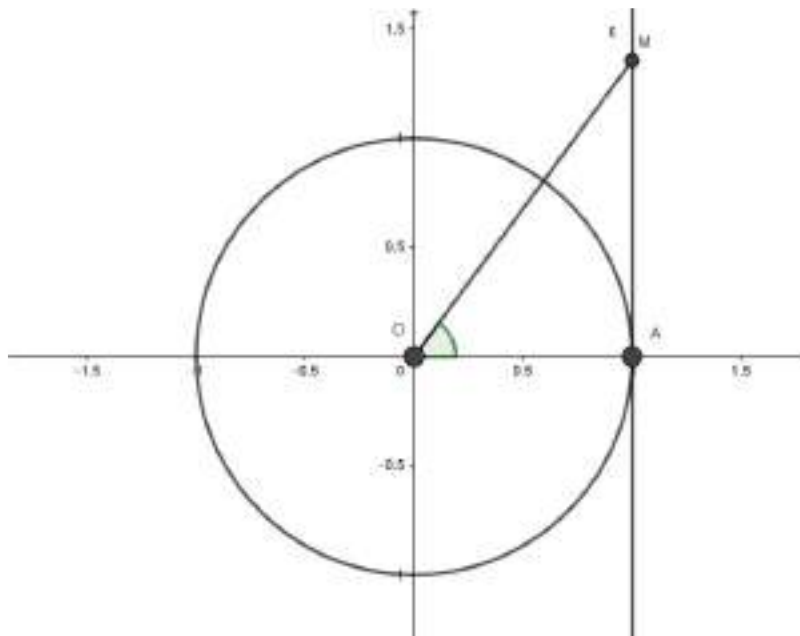
(Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = \eta\mu^2 x - 5\eta\mu\omega \cdot \eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu\omega$ και του άξονα $x'x$, όπου $\omega = \widehat{AOM}$ η γωνία του

προηγούμενου ερωτήματος και $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = e^{kx}$, $k \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι αν $k > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 07)

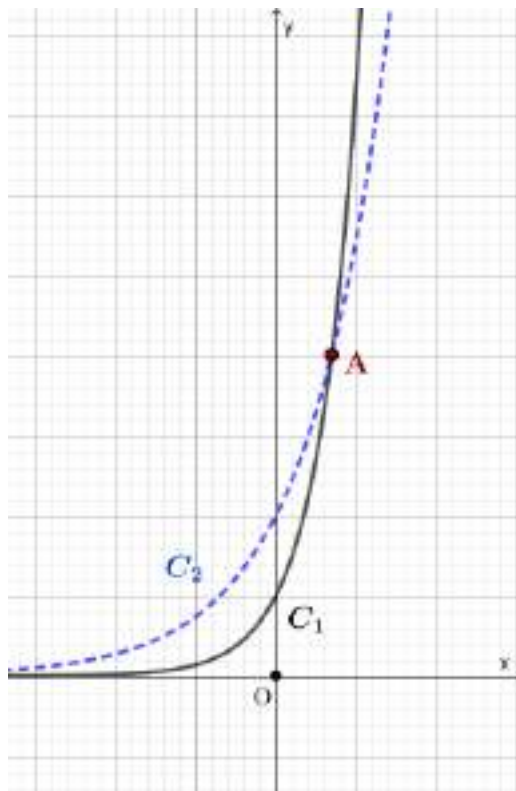
γ)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x} > 2e^x$.

(Μονάδες 05)

ii. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1, C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x) = 2e^x$ και $k(x) = e^{2x}$.

Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου A;



(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Αν I είναι η ένταση του ήχου (σε W/m^2 - Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο:

$$D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

Όριο ακοής	0 ντεσιμπέλ
Θρόισμα φύλλων	10 ντεσιμπέλ
Συνήθης ψίθυρος	20 ντεσιμπέλ
Αθόρυβο αυτοκίνητο	50 ντεσιμπέλ
Συνήθης ομιλία	65 ντεσιμπέλ
Κυκλοφοριακή κίνηση	80 ντεσιμπέλ
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σε απόσταση 3 μέτρων	90 ντεσιμπέλ
Όριο πόνου	120 ντεσιμπέλ
Αεριοθούμενο	140 ντεσιμπέλ

α) Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων.

(Μονάδες 08)

β) Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι $1 W/m^2$ να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου.

(Μονάδες 07)

γ) Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι $\log 2 \approx 0,3$).

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 05)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f .

(Μονάδες 10)

δ) Αν $g(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax^2 + 7x - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ είναι $v = -16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των α, β .

(Μονάδες 06)

Αν είναι $\alpha = 5$, $\beta = 3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 07)

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 06)

δ) Αν $P(\ln k) < 0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού k .

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 09)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

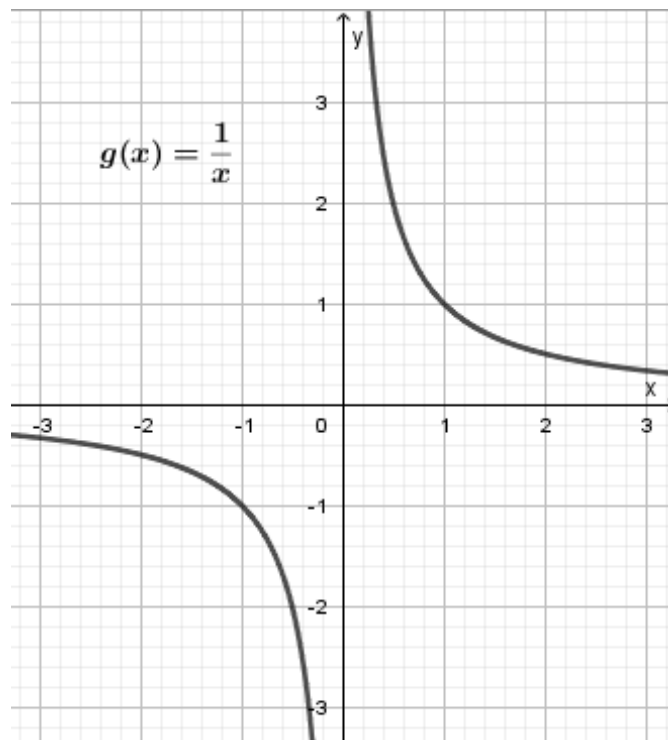
(Μονάδες 05)

γ)

i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 02)

ii. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{x}$ είναι η παρακάτω,



να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 04)

δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\left| \frac{1}{f(x)} \right| = 1$.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι 5,8 μέτρα και συμβαίνει στις 3:00 π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 2,6 μέτρα και συμβαίνει στις 9:00 π.μ. Το βάθος y δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = \alpha \eta\mu(\omega t) + \beta$, με $\alpha, \omega, \beta > 0$ και $0 \leq t \leq 24$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, ω και β .

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha = 1,6$, $\omega = \frac{\pi}{6}$ και $\beta = 4,2$,

i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $y = 1,6 \cdot \eta\mu(\frac{\pi}{6}t) + 4,2$, με $0 \leq t \leq 24$.

(Μονάδες 8)

ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι;

(Μονάδες 4)

iii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4,2 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιού χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu^2(\pi - x) + \eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu^2(-x),$$

$$B = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu^2 x + 1$.

(Μονάδες 08)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση B .

(Μονάδες 08)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις A και B να είναι ίσες.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Στον πίνακα μιας σχολικής τάξης είναι γραμμένο το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου οι συντελεστές a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί. Δύο μαθητές, ο Α και ο Β, παίζουν ένα παιχνίδι, επιλέγοντας τιμές για τους συντελεστές ως εξής: πρώτα ο Α επιλέγει τιμή για κάποιον συντελεστή, μετά ο Β επιλέγει τιμή για έναν από τους δύο εναπομείναντες συντελεστές και τέλος ο Α επιλέγει τιμή για τον συντελεστή που έμεινε. Προσπαθούν να επιλέξουν τους a, b, c ώστε το $P(x)$ να ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη συνθήκη.

α) Έστω ότι ο μαθητής Α επιλέγει $a = 2$, μετά ο Β επιλέγει $b = 1$ και τέλος ο Α επιλέγει πάλι $c = 2$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ θα έχει τότε ως μοναδική ρίζα τον αριθμό -2 .

(Μονάδες 5)

β) Ο μαθητής Α επιλέγει $a = -1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - 1$.

(Μονάδες 8)

γ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 1$. Να αποδείξετε ότι ανεξάρτητα πως θα παίξει ο μαθητής Β, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει συντελεστή έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει σίγουρα ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

(Μονάδες 7)

δ) Ο μαθητής Α επιλέγει $c = 2022$. Να αποδείξετε ότι όπως και να επιλεγούν μετά οι συντελεστές a και b είναι αδύνατον το $P(x)$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 13.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2+1}\right) - 2 > 0$.

(Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha+1}{2} \sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \varepsilon\varphi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$. Να δείξετε ότι $A = -1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2A$, στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο A .

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3 \ln 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3 \ln 2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 200 \cdot e^{ct},$$

Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t = 0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328.

(Δίνεται ότι $\ln(1,64) \cong 0,5$ και $\ln 10 \cong 2,3$)

α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου τη χρονική στιγμή $t=0$, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του $f(t)$ (σε mg) να μειώνεται μετά από t ημέρες σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$f(t) = q_0 \cdot \alpha^t, \quad t \geq 0,$$

όπου οι αριθμοί α, q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 < \alpha < 1$.

(Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ ως συνάρτηση της αρχικής τιμής q_0 .

(Μονάδες 4)

t	0	1	2	3	4	5	6
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$					

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4^{ης} ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής.

(Μονάδες 5)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6]$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

α) Να δείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t = 0$).

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

(Μονάδες 7)

Αν $\alpha = 5$ και $\beta = -7$,

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1^{ης} και στο τέλος της 2^{ης} εβδομάδας.

(Μονάδες 8)

β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t) = V_0 \cdot \alpha^t$, όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α .

(Μονάδες 8)

γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t) = 10 \cdot (0,85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log(0,5) \approx -0,3$ και $\log(0,85) \approx -0,07$).

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \sqrt{10^x - 2}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (\log 2, +\infty)$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \log \sqrt{\frac{10^x}{3}}, x \in \mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2}$ με $x \in (\log 2, +\infty)$.

(Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Είναι γνωστό ότι όταν κάποιος μελετάει για να συμμετάσχει σε κάποιες εξετάσεις, με την πάροδο του χρόνου δεν συγκρατεί στη μνήμη του το σύνολο όσων μελέτησε. Ένα μοντέλο που δείχνει το ποσοστό $P(t)$ της γνώσης που παραμένει στην μνήμη του t εβδομάδες μετά το τέλος της μελέτης, είναι το μοντέλο Ebbinghaus και περιγράφεται από τον τύπο:

$$P(t) = Q + (100 - Q)e^{-ct}, \quad t \in [0, 40]$$

όπου Q είναι το ποσοστό της γνώσης που θυμάται πάντα και c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το μάθημα. Αν $Q = 40$ και $c = 0,7$ τότε:

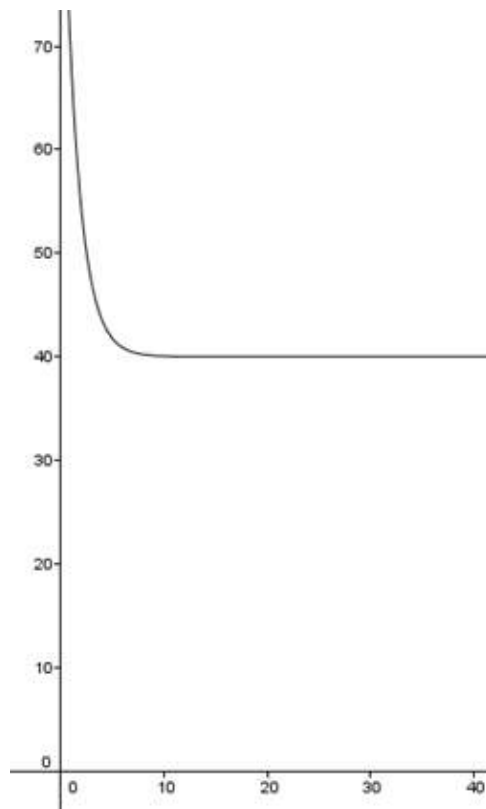
α) Τι δείχνει το $P(0)$ στα πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 6)

β) Μετά από πόσες εβδομάδες θα έχει παραμείνει στην μνήμη του το 50% της γνώσης που απέκτησε.

(Μονάδες 9)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Με βάση το σχήμα:



γ) Να εκτιμήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση, αν μετά από τρεις εβδομάδες θα θυμάται πάνω ή κάτω από το 50% του υλικού που μελέτησε. Η εκτίμησή σας συμφωνεί με το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος;

(Μονάδες 5)

δ) Πως αιτιολογείται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης, για μεγάλες τιμές του t , φαίνεται να προσεγγίζει πάρα πολύ την ευθεία $y = 40$. Γιατί δεν μπορεί να «κατέβει» κάτω από την ευθεία αυτή;

(Μονάδες 5)

(Θεωρήστε: $\ln 6 = 1,79$)

ΘΕΜΑ 4

Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή.

Αν Q_0 είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_0 e^{ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t' = -\frac{\ln 2}{c}$.

(Μονάδες 8)

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

β) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730} t}$$

(Μονάδες 8)

γ) Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακα -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρεται, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_{\alpha} = 25^{\circ}\text{C}$, έχει θερμοκρασία $T_0 = 73^{\circ}\text{C}$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση

$$T(t) = T_{\alpha} + ce^{-kt}$$

όπου όπου c , k κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι 61°C , τότε:

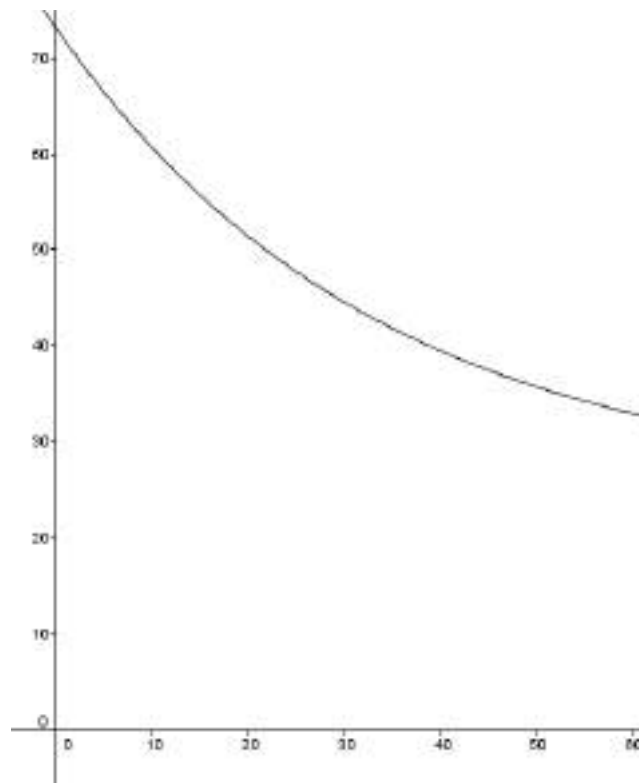
α) Να αποδείξετε ότι $c = 48$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την σταθερά k . (Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$).

(Μονάδες 8)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα. (Θεωρήστε $e^{-1,2} = 0,3$).

(Μονάδες 5)

δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από 40°C , να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση

και το αποτέλεσμα του ερωτήματος γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x > 0$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

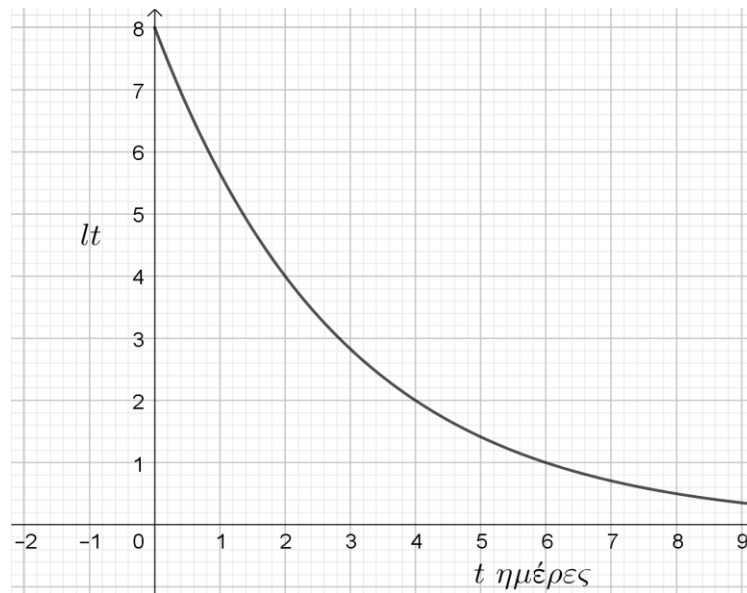
(Μονάδες 4)

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Ένα δοχείο περιέχει υγρό το οποίο εξατμίζεται. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η ποσότητα Q , σε λίτρα, του υγρού που έχει απομείνει στο δοχείο μετά από t ημέρες.



Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο μειώνεται εκθετικά και μετά από t ημέρες δίνεται από τη σχέση $Q(t) = Q_0 2^{-\frac{t}{c}}$, $c \in \mathbb{R}$, όπου Q_0 η αρχική ποσότητα του υγρού.

α) Με βάση το διάγραμμα:

i. να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος t σε ημέρες	0	2	4	6
Ποσότητα $Q(t)$ του υγρού σε λίτρα.				

(Μονάδες 5)

ii. να βρείτε την αρχική ποσότητα Q_0 του υγρού,

(Μονάδες 3)

iii. να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα του υγρού που υπήρχε τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο δοχείο.

(Μονάδες 5)

β) Αν $Q_0 = 8$ και $Q(2) = 4$, να δείξετε ότι $c = 2$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $Q(t) = 8 \cdot 2^{-\frac{t}{2}}$, να δείξετε ότι χρειάζεται να περάσουν δύο ημέρες για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα $Q(t)$ του υγρού που υπάρχει στο δοχείο οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx' .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους ώστε:

$$x^4 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1) \cdot (x^2 + \beta x + 1)$$

(Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε την ακόλουθη πρόταση: «Κάθε πολυώνυμο που μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου μη μηδενικού βαθμού, έχει πραγματικές ρίζες». Είναι η πρόταση αυτή Σωστή ή Λάθος; Αν η πρόταση είναι σωστή, να δώσετε απόδειξη. Αν η πρόταση είναι λάθος, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

(Μονάδες 10)

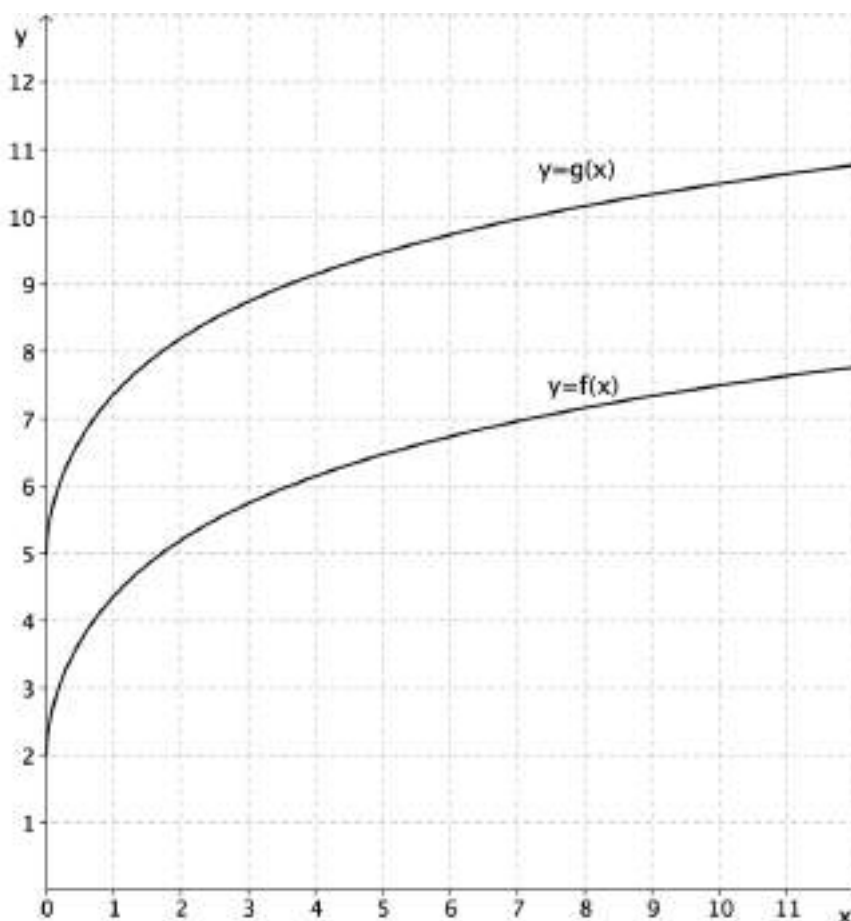
ΘΕΜΑ 4

Ένας ερευνητής πραγματοποίησε μια στατιστική μελέτη για την μεταβολή του βάρους των Ελληνοπαίδων. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g . Στον οριζόντιο άξονα $x'x$ καταγράφεται η ηλικία σε μήνες και στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ το βάρος σε κιλά. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τις ελάχιστες φυσιολογικές τιμές και η γραφική παράσταση της g τις μέγιστες φυσιολογικές τιμές που μπορεί να έχει ένα παιδί κατά την διάρκεια του πρώτου έτους της ηλικίας του.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο

$$f(x) = a\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + \beta, \quad x \geq 0, \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$

και ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(e^2 - 1, 2\sqrt{2} + 4)$ ενώ για την γραφική παράσταση της g , γνωρίζουμε ότι προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.



α) Να αποδείξετε ότι $a = 2$ και $\beta = 2$. Στην συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε γραφικά (κατά προσέγγιση) την ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά. Στη συνέχεια, με αλγεβρικό τρόπο, να βρείτε με ακρίβεια την ηλικία.

(Μονάδες 8)

γ) Το βάρος ενός παιδιού στο τέλος του 12^ο μήνα βρέθηκε 13 κιλά. Πως θα το χαρακτηρίζατε:

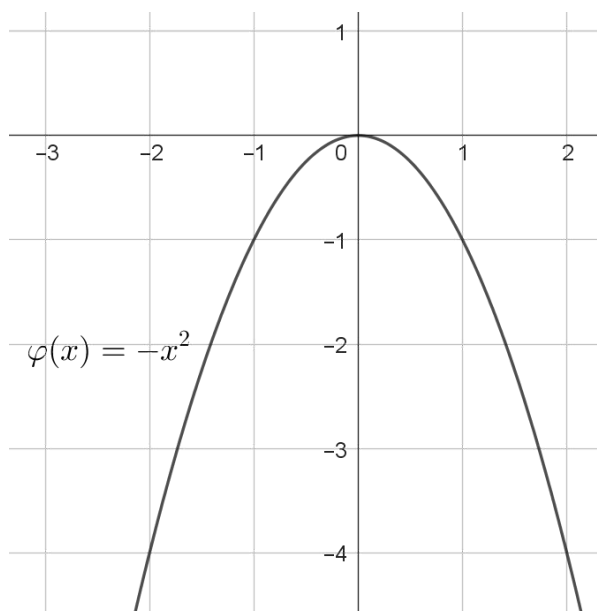
υπέρβαρο, φυσιολογικό ή λιποβαρές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με αλγεβρικό τρόπο.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .



(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

(Μονάδες 5)

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

(Μονάδες 5)

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa, \kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$.

(Μονάδες 6)

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, 1)$.

(Μονάδες 7)

γ) $\frac{1}{2} < \sin \theta < 1$ για κάθε γωνία $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$.

(Μονάδες 6)

δ) $P(\sin \theta) < 0$ για κάθε γωνία $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

(Μονάδες 6)

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

(Μονάδες 7)

γ) $1 < \log 20 < 2$.

(Μονάδες 6)

δ) $P(\log 20) < 0$.

(Μονάδες 6)