

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις οικογένειες που είναι δυνατό να σχηματιστούν με τρία παιδιά. Εξετάζουμε τα παιδιά των οικογενειών αυτών ως προς το φύλο και τη σειρά γέννησής τους. Για παράδειγμα η τριάδα (α,κ,α) αντιστοιχεί σε οικογένεια με πρώτο παιδί αγόρι, δεύτερο παιδί κορίτσι και τρίτο παιδί αγόρι.

α) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα :

A: «Το πρώτο παιδί της οικογένειας είναι κορίτσι».

B: «Και τα τρία παιδιά είναι ίδιου φύλου».

Γ: «Το φύλο του δεύτερου παιδιού είναι διαφορετικό από το φύλο του πρώτου και του τρίτου παιδιού».

(Μονάδες 9)

β) Αν μία οικογένεια αποκτήσει τρία παιδιά :

i. Ποια είναι η πιθανότητα το πρώτο παιδί της οικογένειας να είναι κορίτσι;

(Μονάδες 5)

ii. Ποια είναι η πιθανότητα και τα τρία παιδιά της οικογένειας να είναι ίδιου φύλου;

(Μονάδες 5)

iii. Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι το ενδεχόμενο Γ έχει ίδια πιθανότητα να συμβεί με το ενδεχόμενο να φέρει κάποιος 2 φορές κεφαλή αν στρίψει δυο φορές ένα αμερόληπτο κέρμα. Συμφωνείτε με την άποψή του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Η Μαρία έχει έναν προσωπικό κωδικό πρόσβασης για το ηλεκτρονικό της ταχυδρομείο, τον οποίο επέλεξε τυχαία. Ο κωδικός αποτελείται από τέσσερις μονοψήφιους αριθμούς (τέσσερα ψηφία), σε τέσσερις αντίστοιχες θέσεις όπως παρακάτω:

— — — —

Η Μαρία δε θυμάται το τελευταίο ψηφίο του προσωπικού κωδικού της.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να πληκτρολογήσει σωστά τον προσωπικό της κωδικό, επιλέγοντας τυχαία το τελευταίο ψηφίο;

(Μονάδες 8)

β) Επειδή δεν πληκτρολόγησε σωστά τον κωδικό της, αποφάσισε να τον αλλάξει. Ο νέος κωδικός θα έχει επίσης τέσσερα ψηφία σε τέσσερις θέσεις. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 10000 διαφορετικοί κωδικοί που μπορεί να δημιουργήσει η Μαρία.

(Μονάδες 10)

γ) Για να αλλάξει τον κωδικό της επέλεξε τυχαία τον αριθμό κάθε θέσης. Ποια είναι η πιθανότητα στον προσωπικό κωδικό της να μην επαναλαμβάνεται κάποιος από τους αριθμούς;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το πείραμα τύχης «ρίψη ενός μεροληπτικού ζαριού» με δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Δίνεται ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 1» είναι $P(\{1\}) = \frac{1}{2}$ και ότι τα ενδεχόμενα $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ και $\{6\}$ είναι ισοπίθανα.

α) Να αποδείξετε ότι $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{10}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. A: «Το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 1 ή 5» (Μονάδες 6)

ii. B: «Το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος αριθμός». (Μονάδες 6)

γ) Έστω ένα δεύτερο πείραμα τύχης «ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού» με τον ίδιο δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ του οποίου όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Να βρείτε για το δεύτερο πείραμα τύχης τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B του ερωτήματος β) και να τις συγκρίνετε μεταξύ τους. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Για την εισαγωγή σε μία σχολή, μία γυναίκα ή ένας άνδρας είναι επιλέξιμοι αν το ύψος τους σε cm, είναι τουλάχιστον 170. Η κατανομή του ύψους των γυναικών είναι κανονική με μέση τιμή 163 και τυπική απόκλιση 7 και η κατανομή του ύψους των ανδρών είναι κανονική με μέση τιμή 170. Επιλέγουμε τυχαία μία γυναίκα και έναν άνδρα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η πιθανότητα ώστε μία γυναίκα να είναι επιλέξιμη, είναι 0,16, (Μονάδες 9)
- ii. η πιθανότητα ώστε ένας άνδρας να είναι επιλέξιμος, είναι 0,5. (Μονάδες 9)

β) Αν για τους άνδρες παραμείνει η απαίτηση του ελάχιστου ύψους στο 170, πόσο θα πρέπει να γίνει η απαίτηση του ελάχιστου ύψους για τις γυναίκες, ώστε για μια γυναίκα να είναι εξίσου πιθανό να είναι επιλέξιμη όσο για έναν άνδρα. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Η τράπουλα αποτελείται από 52 φύλλα τα οποία χωρίζονται σε τέσσερις φυλές: τις κούπες, τα καρό, τα μπαστούνια και τα σπαθιά. Κάθε φυλή έχει 13 φύλλα με τις παρακάτω ενδείξεις:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, βαλές (J), ντάμα (Q), ρήγας (K) και άσος (A).

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των συνδυασμών των 52 φύλλων ανά 4 είναι 270.725.

(Μονάδες 9)

β) Από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα επιλέγουμε τυχαία τέσσερα φύλλα. Να βρείτε τις πιθανότητες να πάρουμε:

i. τέσσερα 10 (δεκάρια), (Μονάδες 8)

ii. τέσσερα φύλλα με την ίδια ένδειξη. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Ένας δρομέας μεγάλων αποστάσεων, κατέγραψε τα χιλιόμετρα που έτρεξε σε καθεμία από τις 20 ημέρες προπόνησης ενός μήνα και σχημάτισε τον παρακάτω πίνακα:

απόσταση σε χιλιόμετρα	5	7	10	15	20
αριθμός ημερών	4	5	5	5	1

α) Να βρείτε:

- i. τη μέση τιμή, (Μονάδες 7)
- ii. τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο. (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ακραίες τιμές. (Μονάδες 6)

γ) Ο δρομέας τον επόμενο μήνα διατήρησε το ίδιο πρόγραμμα προπόνησης, εκτός από την μέγιστη απόσταση την οποία αύξησε σε 28 χιλιόμετρα όπως φαίνεται παρακάτω:

απόσταση σε χιλιόμετρα	5	7	10	15	28
αριθμός ημερών	4	5	5	5	1

Ποια από τα μέτρα θέσης του α) ερωτήματος μεταβάλλονται και ποια όχι; Θα υπάρχουν τώρα ακραίες τιμές; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Σ' ένα διαγώνισμα δύο ερωτήσεις είναι πολλαπλής επιλογής, με τέσσερις δυνατές απαντήσεις η καθεμία τις α, β, γ και δ . Η σωστή απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι η α και στη δεύτερη η δ . Ένας μαθητής επιλέγει τυχαία την απάντηση για καθεμία από τις δύο ερωτήσεις.

α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης, να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο που να περιέχει όλες τις δυνατές απαντήσεις στις δύο ερωτήσεις. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

- i. ο μαθητής απάντησε σωστά στην πρώτη ερώτηση, (Μονάδες 5)
- ii. ο μαθητής απάντησε σωστά στη δεύτερη ερώτηση, (Μονάδες 5)
- iii. ο μαθητής απάντησε σωστά και στις δύο ερωτήσεις, (Μονάδες 5)
- iv. ο μαθητής δεν απάντησε σωστά σε καμία από τις δύο ερωτήσεις. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης. Για παράδειγμα, ένα αποτέλεσμα του παραπάνω πειράματος θα μπορούσε να είναι της μορφής 34, που σημαίνει ότι η ένδειξη της 1^η ρίψης είναι 3 και της 2^{ης} είναι 4.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: «Το γινόμενο των 2 ενδείξεων να είναι 6»

B: «Η ένδειξη στη 2^η ρίψη είναι μεγαλύτερη από την ένδειξη στην 1^η ρίψη»

Γ: «Το άθροισμα των 2 ενδείξεων να είναι 5»

α)

- i. Να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο για το παραπάνω πείραμα τύχης.

(Μονάδες 04)

- ii. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα A, B, Γ. (Μονάδες 06)

- iii. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cup \Gamma$ και $B - \Gamma$. (Μονάδες 06)

β) Μετά τη 2^η ρίψη, κάνουμε και 3^η ρίψη με το ίδιο ζάρι.

- i. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα στις 3 ρίψεις του ζαριού; (Μονάδες 04)

- ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου, να έχουμε την ίδια ένδειξη και στις 3 ρίψεις. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Ένα μη αμερόληπτο ζάρι με δειγματικό χώρο $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ είναι φτιαγμένο έτσι, ώστε η πιθανότητα του απλού ενδεχομένου $\{6\}$ να είναι ίση με $\frac{1}{3}$. Για τις άλλες 5 έδρες του ισχύουν τα εξής: Τα απλά ενδεχόμενα $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$ είναι ισοπίθανα και η πιθανότητα του ενδεχομένου $A=\{1,3,5\}$ είναι ίση με $\frac{1}{6}$. Τα απλά ενδεχόμενα $\{2\}$ και $\{4\}$ είναι επίσης ισοπίθανα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{18}$

ii. $P(\{2\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$

(Μονάδες 10)

β) Σε μία τυχαία ρίψη του ζαριού, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

i. A: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος»

ii. B: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 3 ή 4»

(Μονάδες 10)

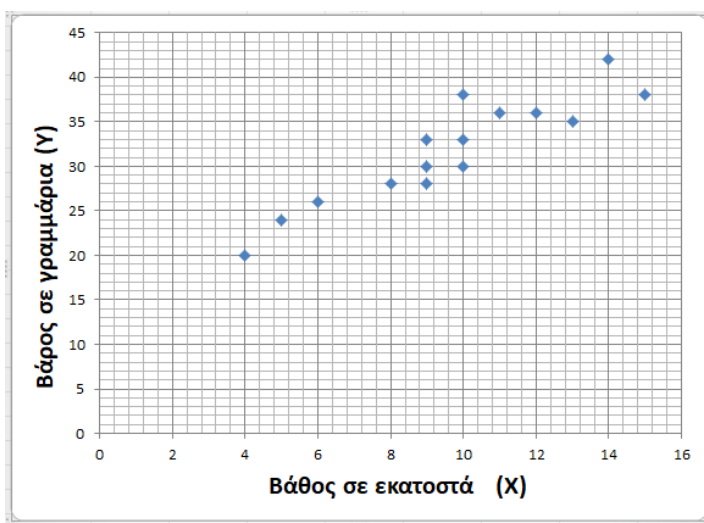
γ) Αν το ζάρι είναι αμερόληπτο με δειγματικό χώρο $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου B του ερωτήματος β) ii. και να συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το διπλανό διάγραμμα διασποράς δύο ποσοτικών μεταβλητών X και Y .

Η μεταβλητή X παριστάνει το βάθος μέσα στην άμμο σε εκατοστά στο οποίο αλιεύθηκε ένα μύδι, και η μεταβλητή Y παριστάνει το βάρος σε γραμμάρια του μυδιού.



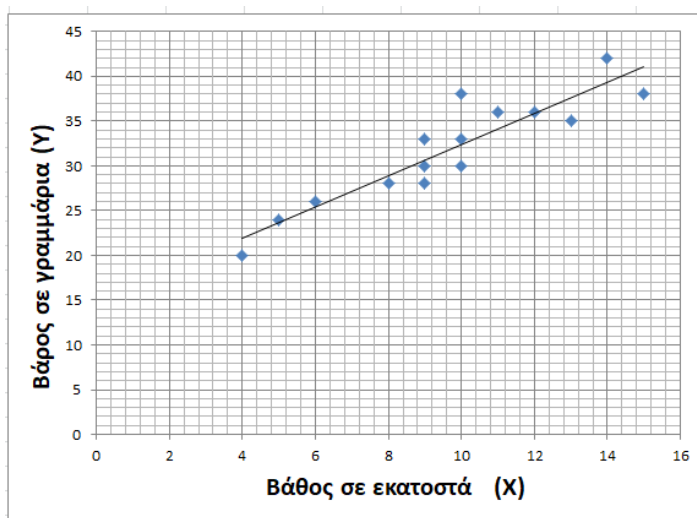
α) Με βάση το παραπάνω διάγραμμα να επιλέξετε ποιος μπορεί να είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των μεταβλητών X και Y από αυτούς που δίνονται παρακάτω.

- i. $r_1 = -1$ ii. $r_2 = -0,7$ iii. $r_3 = 0,9$ iv. $r_4 = 1$.

Να δικαιολογήσετε λεκτικά την απάντησή σας.

(Μονάδες 11)

β) Ένας μαθητής σχεδίασε την διπλανή ευθεία προσαρμοσμένη στα δεδομένα «με το μάτι». Με βάση αυτή την ευθεία να εκτιμήσετε:



- i. Ποιο είναι το αναμενόμενο βάρος του μυδιού σε βάθος 6 εκατοστά; (Μονάδες 7)

- ii. Σε τι βάθος προσδοκούμε να βρούμε ένα μύδι με αναμενόμενο βάρος 36 γραμμάρια;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Σ' ένα εκπαιδευτικό κατάστημα, ένας πελάτης θέλει να αγοράσει ένα πουκάμισο και ένα μπουφάν. Τα διαθέσιμα μεγέθη και για τα δύο είδη είναι μικρό (s), μεσαίο (m), και μεγάλο (L). Τα σωστά μεγέθη που φοράει ο πελάτης, για το πουκάμισο είναι μεσαίο (m), ενώ για το μπουφάν, είναι μεγάλο (L). Ο πελάτης επιλέγει τυχαία ένα πουκάμισο και ένα μπουφάν χωρίς να κοιτάζει τα μεγέθη τους.

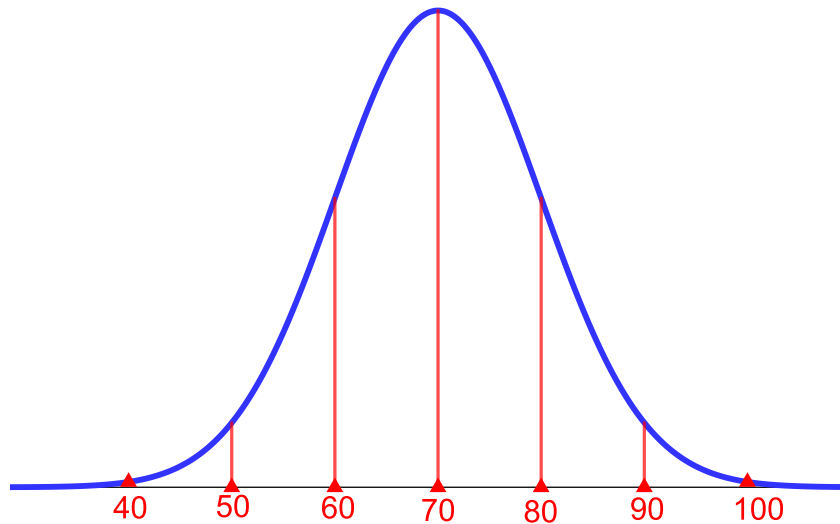
α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης, να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο που να περιέχει όλες τις δυνατές επιλογές για το μέγεθος των δύο ειδών (πουκάμισο και μπουφάν) που επιλέγει ο πελάτης. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

- i. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το πουκάμισο. (Μονάδες 05)
- ii. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το μπουφάν. (Μονάδες 05)
- iii. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για ένα τουλάχιστον από τα δύο είδη. (Μονάδες 05)
- iv. Ο πελάτης δεν επέλεξε το σωστό μέγεθος σε κανένα από τα δύο είδη. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Υποθέτουμε ότι το βάρος, σε κιλά, των μαθητών λυκείου στην Ελλάδα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 70$ (όπως στο σχήμα) και το 99,7% περίπου των μαθητών έχει βάρος που ανήκει στο διάστημα $(40,100)$.



- α) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση σ της κατανομής. (Μονάδες 10)
- β) Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή λυκείου από όλο τον πληθυσμό των μαθητών λυκείου, στην Ελλάδα.
- i. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά που ανήκει στο διάστημα $(60, 80)$ ». (Μονάδες 6)
- ii. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά που ανήκει στο διάστημα $(80, 90)$ ». (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα σχολείο φοιτούν 600 μαθητές. Οι γυμναστές του σχολείου ανά μήνα προσπαθούν να εξοικειώνουν τους μαθητές τους με διαφορετικές αθλητικές δραστηριότητες. Ο μήνας Φεβρουάριος είναι αφιερωμένος στη Γιόγκα και το Χορό. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να επιλέξει τουλάχιστον μια από τις δραστηριότητες Χορό ή Γιόγκα. 420 μαθητές επέλεξαν το Φεβρουάριο να ασχοληθούν με Γιόγκα και 330 με Χορό.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή του σχολείου. Ονομάζουμε Γ το ενδεχόμενο «ο μαθητής επιλέγει Γιόγκα» και χ το ενδεχόμενο «ο μαθητής επιλέγει Χορό».

α)

i. Υπάρχουν μαθητές του σχολείου που διάλεξαν το Φεβρουάριο να ασχοληθούν και με τις δύο δραστηριότητες (Χορό και Γιόγκα); (Μονάδες 4)

ii. Είναι τα ενδεχόμενα Γ και χ ασυμβίβαστα; (Μονάδες 3)

β) Τα ενδεχόμενα: «ο μαθητής επιλέγει μόνο Χορό» και «ο μαθητής επιλέγει μόνο Γιόγκα» είναι ασυμβίβαστα; (Μονάδες 4)

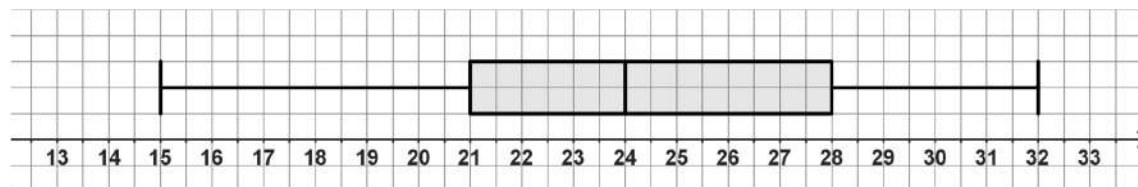
γ)

i. Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής επιλέγει μόνο Γιόγκα» ισούται με $\frac{270}{600}$. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής επιλέγει μόνο μια από τις προτεινόμενες αθλητικές δραστηριότητες του μήνα». (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Ο Κώστας εργάζεται στο τηλεφωνικό κέντρο εταιρείας πληροφορικής εξυπηρετώντας τηλεφωνικά τους πελάτες. Το παρακάτω θηκόγραμμα αντιστοιχεί στους πελάτες ανά ημέρα που εξυπηρέτησε ο Κώστας σε 20 ημέρες.



α) Ποιος ήταν ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος αριθμός πελατών ανά ημέρα που εξυπηρέτησε ο Κώστας αυτές τις 20 ημέρες;

(Μονάδες 8)

β) Χρησιμοποιώντας το θηκόγραμμα, να βρείτε τα τεταρτημόρια Q_1 και Q_3 και τη διάμεσο δ .

(Μονάδες 9)

γ) Ο Κώστας θέλει να καταγράψει τις 10 πιο «απασχολημένες» ημέρες του με κριτήριο τον αριθμό των πελατών που εξυπηρέτησε κάθε ημέρα.

Μια ημέρα εξυπηρέτησε 23 πελάτες και μια άλλη ημέρα εξυπηρέτησε 25 πελάτες. Ποια ή ποιες από αυτές τις δύο ημέρες ανήκουν στις 10 πιο απασχολημένες του;

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Ο σύλλογος γονέων και κηδεμόνων ενός σχολείου διοργανώνει λαχειοφόρο αγορά, με σκοπό τα έσοδα των λαχμών να διατεθούν για την αγορά εξοπλισμού του σχολείου. Οι αριθμοί των λαχμών είναι όλοι οι τετραψήφιοι αριθμοί που σχηματίζονται με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 και 6.

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος όλων των λαχμών είναι 1296. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. να κληρωθεί ένας λαχνός με τέσσερα ίδια ψηφία, (Μονάδες 8)

ii. να κληρωθεί ένας λαχνός με τέσσερα διαφορετικά ψηφία. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Στον τελικό των 100 μέτρων ανδρών σε μια αθλητική διοργάνωση, προκρίθηκαν 8 αθλητές και θα διεκδικήσουν τα τρία μετάλλια: χρυσό, αργυρό και χάλκινο. Υποθέτουμε ότι κάθε αθλητής είναι εξίσου πιθανό να τερματίσει σε μία οποιαδήποτε θέση από την 1^η έως την 8^η.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η κατάταξη των 8 αθλητών μπορεί να προκύψει με 40320 τρόπους, (Μονάδες 7)
- ii. η τριάδα των νικητών μπορεί να προκύψει με 336 τρόπους. (Μονάδες 6)

β) Από τους 8 αθλητές που θα πάρουν μέρος στον τελικό, ακριβώς 2 είναι Ευρωπαίοι.

- i. Πόσες είναι οι δυνατές τριάδες που αποτελούνται από μη Ευρωπαίους αθλητές; (Μονάδες 6)
- ii. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει μετάλλιο, Ευρωπαίος αθλητής; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το πείραμα τύχης «ρίψη τριών συνηθισμένων ζαριών» με δειγματικό χώρο όλες τις διατεταγμένες τριάδες που σχηματίζονται με τους αριθμούς 1 , 2 , 3 , 4 , 5 και 6.

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 216. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων A , B και Γ :

- i. A: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τρεις ίσοι αριθμοί», (Μονάδες 6)
- ii. B: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τρεις διαφορετικοί αριθμοί», (Μονάδες 6)
- iii. Γ: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τουλάχιστον δύο ίδιοι αριθμοί». (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Ένα κουτί περιέχει 2 κόκκινες γραβάτες και 3 πράσινες γραβάτες, από τις οποίες ο Γιώργος για κάθε μέρα από τις επόμενες πέντε μέρες, θα παίρνει τυχαία μία γραβάτα να φορέσει.

α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω , όπου το αποτέλεσμα ΠΚΚΠΠ για παράδειγμα, σημαίνει ότι την πρώτη, την τέταρτη και την πέμπτη μέρα ο Γιώργος θα φορέσει πράσινη γραβάτα, ενώ τη δεύτερη και την τρίτη μέρα θα φορέσει κόκκινη γραβάτα. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων, ο Γιώργος:

- i. να φορέσει πράσινη γραβάτα την πρώτη μέρα,
- ii. να μη φορέσει πράσινη γραβάτα την πρώτη μέρα,
- iii. να φορέσει κάθε μέρα, διαφορετικό χρώμα γραβάτας από την προηγούμενη μέρα.

(Μονάδες 18)

ΘΕΜΑ 4

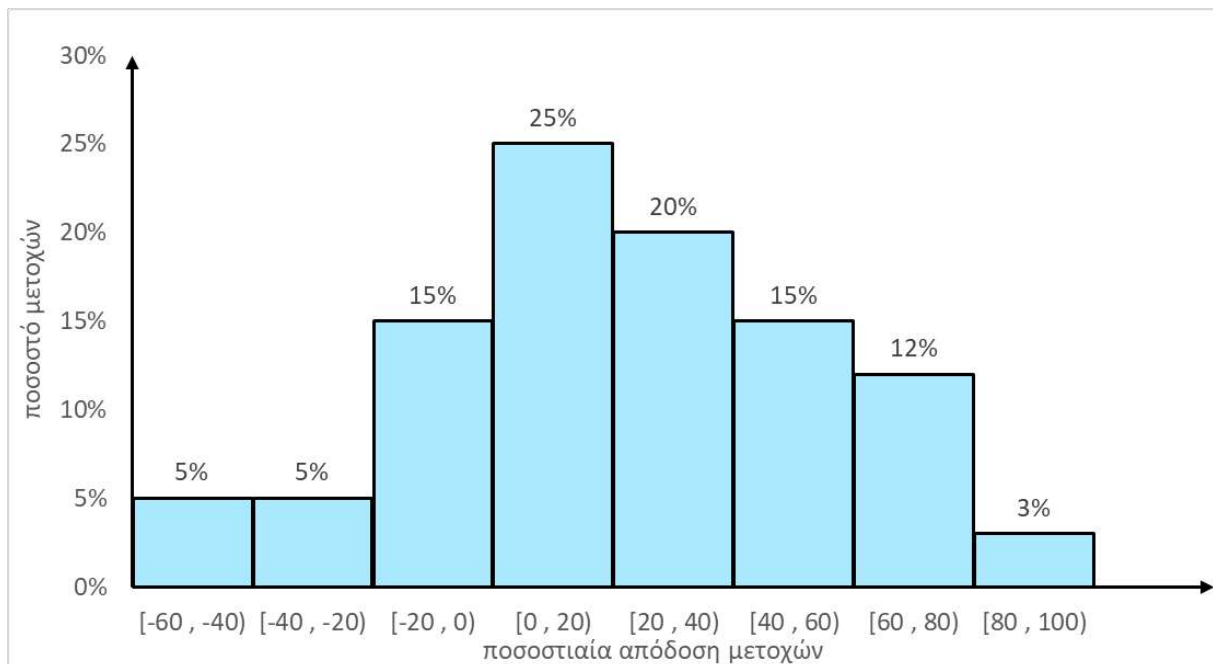
Το παρακάτω ιστόγραμμα δείχνει την κατανομή των ποσοσטיαίων ετήσιων αποδόσεων, όλων των μετοχών που είναι εισηγμένες σε ένα Χρηματιστήριο. Για παράδειγμα, η απόδοση για μια μετοχή -20 σημαίνει μείωση της τιμής της κατά 20% , ενώ η απόδοση 20 σημαίνει αύξηση της τιμής της κατά 20% .

α) Μεταξύ ποιων τιμών είναι η μικρότερη ποσοσטיαία ετήσια απόδοση και μεταξύ ποιων τιμών είναι η μεγαλύτερη; (Μονάδες 7)

β) Επιλέγουμε τυχαία μία μετοχή. Να βρείτε τις πιθανότητες για αυτή τη μετοχή:

- i. η τιμή της να αυξηθήκε, αλλά η ποσοσטיαία αύξηση είναι μικρότερη από 20% ,
- ii. η τιμή της να μειώθηκε,
- iii. η τιμή της να μεταβλήθηκε το πολύ κατά 20% .

(Μονάδες 18)



ΘΕΜΑ 4

Στον παρακάτω πίνακα η μεταβλητή Y , παριστάνει την πρωινή συστολική αρτηριακή πίεση (σε mmHg) ενός ατόμου και η μεταβλητή X , παριστάνει την αντίστοιχη εσωτερική θερμοκρασία του περιβάλλοντος (σε $^{\circ}\text{C}$).

Θερμοκρασία X	5	8	10	12	15	16	17	20	22	23
Συστολική Πίεση Y	127	135	125	130	118	132	125	131	132	123

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς των μεταβλητών X και Y . (Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε την ευθεία που νομίζετε ότι προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται ότι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των X και Y είναι $r = -0,1$.

i. Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των X και Y . (Μονάδες 5)

ii. Να ερμηνεύσετε τη συσχέτιση της συστολικής αρτηριακής πίεσης με την αντίστοιχη θερμοκρασία του περιβάλλοντος. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Ένας γεωπόνος, κατά την καλλιέργεια ενός είδους ντομάτας σε ένα συγκεκριμένο τύπο εδάφους, χρησιμοποίησε διαφορετικές ποσότητες ενός λιπάσματος (σε γραμμάρια ανά φυτό). Κατά τη συγκομιδή κατέγραψε τα αντίστοιχα βάρη των καρπών της ντομάτας (σε γραμμάρια) τα οποία δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

λίπασμα (γρ.)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
ντομάτα (γρ.)	110	150	150	160	180	230	230	245	245	250

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς μεταξύ της ποσότητας λιπάσματος ανά φυτό και του βάρους της ντομάτας. (Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε την ευθεία που νομίζετε ότι προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.

(Μονάδες 7)

γ) Να εκτιμήσετε την ποσότητα λιπάσματος ανά φυτό που απαιτείται, για την παραγωγή ντομάτας με αναμενόμενο βάρος 200 γραμμάρια. (Μονάδες 6)

δ) Εξηγήστε γιατί η ευθεία του ερωτήματος (β) δεν πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του αναμενόμενου βάρους ντομάτας, στην οποία θα χρησιμοποιηθεί 70 γραμμάρια λίπασμα. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4

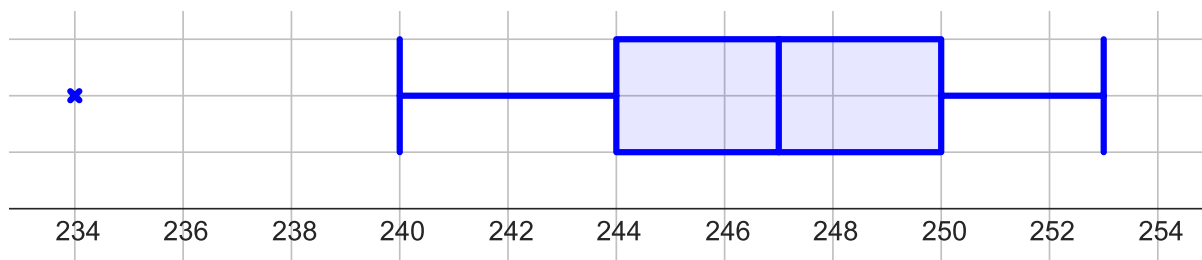
Μια εταιρεία τροφίμων χρησιμοποιεί ένα αυτόματο μηχάνημα για να συσκευάσει βρώσιμες ελιές σε δοχεία 250 γραμμαρίων (αναγραφόμενη ετικέτα). Παρακάτω δίνεται το καθαρό βάρος από ένα τυχαίο δείγμα 15 τέτοιων δοχείων.

245	245	250	247	250	245	250	250	245	249	245	242	247	250	245
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

α) Για το παραπάνω δείγμα:

- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή. (Μονάδες 3)
- Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο. (Μονάδες 6)
- Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα. (Μονάδες 6)

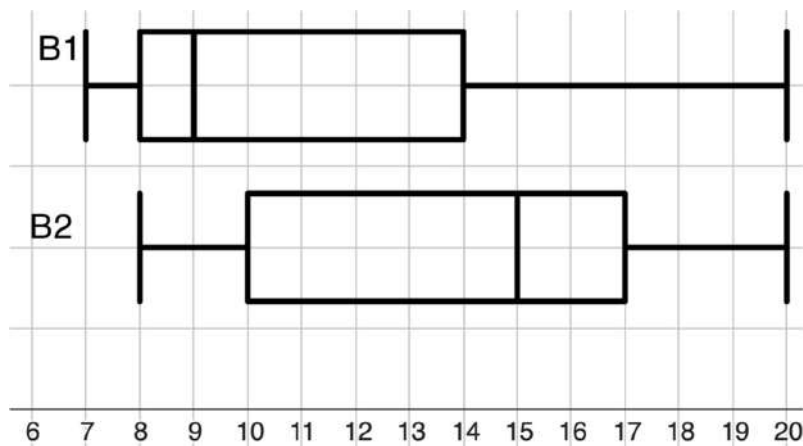
β) Μια μικρή οικογενειακή επιχείρηση συσκευάζει το ίδιο προϊόν σε δοχεία 250 γραμμαρίων, με το χέρι. Επιλέχθηκε τυχαίο δείγμα 15 δοχείων και το καθαρό βάρος των δοχείων αυτών, παριστάνεται με το παρακάτω θηκόγραμμα. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο. (Μονάδες 5)



γ) Συγκρίνοντας τις απαντήσεις σας, στα ερωτήματα α) και β), ποιος πιστεύετε ότι είναι ο πιο ακριβής τρόπος πλήρωσης των δοχείων, με αυτόματο μηχάνημα ή με το χέρι; (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Τα τμήματα Β1 και Β2 ενός σχολείου έγραψαν ένα διαγώνισμα στα μαθηματικά, με τα ίδια θέματα. Στα παρακάτω θηκογράμματα παρουσιάζονται οι βαθμοί των μαθητών (σε κανένα τμήμα δεν έχουμε ακραίες τιμές).



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με βάση τα δύο θηκογράμματα.

	Τμήμα Β1	Τμήμα Β2
Q_1		
δ		
Q_3		
x_{min}		
x_{max}		

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος καθώς και το εύρος των βαθμών των δύο τμημάτων, στο διαγώνισμα.

(Μονάδες 7)

γ) Ο καθηγητής αποφάσισε να δώσει ένα βραβείο στο 25% των μαθητών του κάθε τμήματος, οι οποίοι πήραν τη μεγαλύτερη βαθμολογία. Ο Δημήτρης πήρε 16 στο διαγώνισμα και πήρε βραβείο. Σε ποιο από τα δύο τμήματα είναι ο Δημήτρης;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

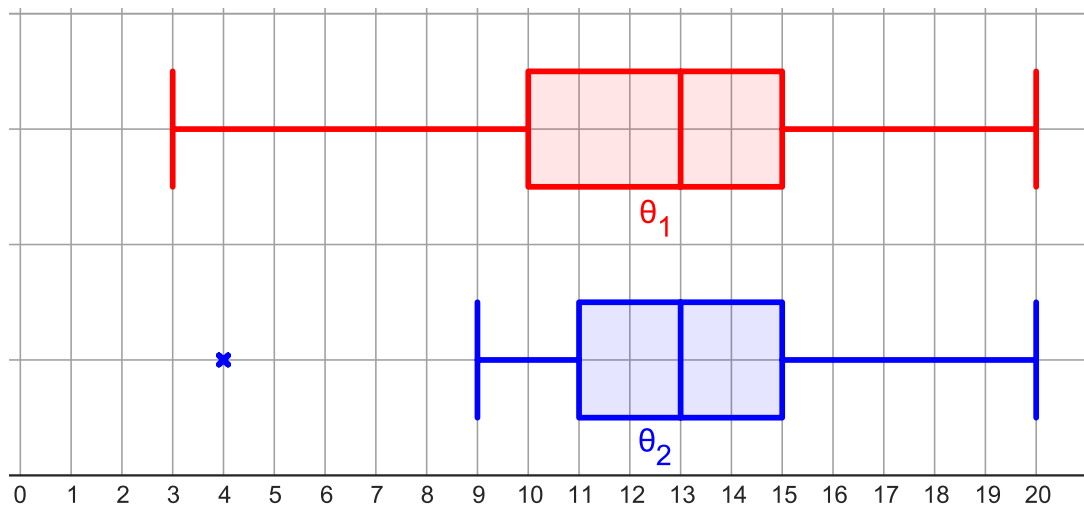
Η Μαρία και οι συμμαθητές της συμμετείχαν σε έναν διαγωνισμό στη Στατιστική. Η βαθμολογία της Μαρίας αρχικά καταχωρήθηκε ως 3 πριν διορθωθεί με τη σωστή βαθμολογία που ήταν 13. Τα παρακάτω θηκογράμματα θ_1 και θ_2 παρουσιάζουν τις βαθμολογίες των παιδιών, πριν και μετά τη διόρθωση στη βαθμολογία της Μαρίας.

α) Ποια από τα δύο θηκογράμματα θ_1 και θ_2 :

- i. έχει ακραία τιμή; (Μονάδες 3)
- ii. περιέχει τη σωστή βαθμολογία της Μαρίας; (Μονάδες 4)

β) Να συγκρίνετε τις δύο βαθμολογίες, πριν και μετά τη διόρθωση, ως προς:

- i. τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο, (Μονάδες 6)
- ii. το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, (Μονάδες 6)
- iii. τη μέση τιμή. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Θέλοντας να διερευνήσουμε τη σχέση μεταξύ φύλου (άνδρας, γυναίκα) και καπνίσματος (μη καπνιστής, καπνιστής) για άτομα ηλικίας ανω των 15 ετών, διεξήχθη πανελλαδική έρευνα και συλλέχθηκε ένα δείγμα 1000 ατόμων. Τα δεδομένα οργανώθηκαν στον παρακάτω πίνακα συνάφειας :

		Κάπνισμα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Φύλο	Άνδρες	260	160	
	Γυναίκες	280	300	
	Σύνολο			

α) Να συμπληρώσετε τα κενά κελιά του παραπάνω και να συμπληρώσετε στον παρακάτω πίνακα το στοιβαγμένο ραβδόγραμμα των συχνοτήτων του πίνακα συνάφειας.



(Μονάδες 9)

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων ως προς το φύλο και το αντίστοιχο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμά του.

(Μονάδες 9)

γ) Με βάση τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας φαίνεται να υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ φύλου και καπνίσματος;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Η ημερήσια ζήτηση κρέατος, σε κιλά, στην Κεντρική Αγορά Αθηνών (Κ.Α.Α), υποθέτουμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση $\sigma = 300$. Γνωρίζουμε ακόμη ότι η πιθανότητα να ζητηθούν μία τυχαία μέρα έως 5000 κιλά κρέας είναι 0,5.

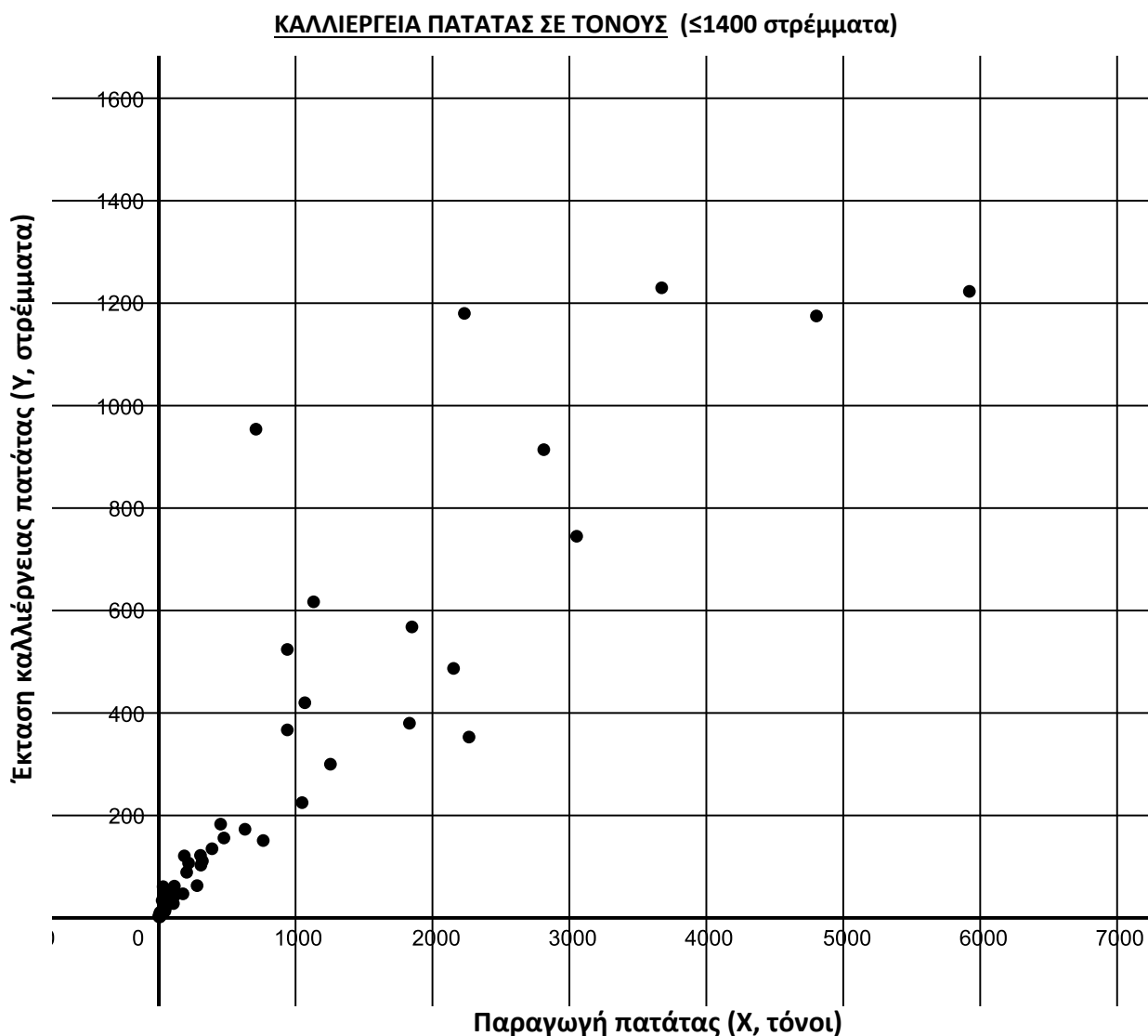
α) Να δικαιολογήσετε ότι η μέση τιμή της κατανομής είναι $\mu = 5000$. (Μονάδες 7)

β) Αν κάποια μέρα η Κ.Α.Α εφοδιαστεί με 5300 κιλά κρέας τότε ποια είναι η πιθανότητα να πουληθεί όλη αυτή η ποσότητα αυτή τη μέρα; (Μονάδες 9)

γ) Ποια ποσότητα κρέατος πρέπει να εφοδιαστεί η Κ.Α.Α σε κάποια μέρα έτσι ώστε με πιθανότητα 0,9985 η ποσότητα αυτή να είναι επαρκής για να εξυπηρετήσει την ημερήσια ζήτηση; (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω διάγραμμα διασποράς φαίνεται η παραγωγή πατάτας (X) σε σχέση με την έκταση (Y) στην οποία παράγεται, για 50 περιοχές της Ελλάδας από ολόκληρη την επικράτεια, των οποίων η έκταση δεν ξεπερνάει τα 1400 στρέμματα. Η παραγωγή της πατάτας (μεταβλητή X) είναι μετρημένη σε τόνους και η έκταση (μεταβλητή Y) είναι μετρημένη σε στρέμματα.



α) Η παραγωγή της πατάτας σε τόνους, ομαδοποιήθηκε στις κλάσεις [0,1000), [1000,2000), [2000,3000), [3000,4000), [4000,5000), [5000,6000). Να αντιγράψετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω διάγραμμα.

Κλάσεις με παραγωγή σε τόνους	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα % $f_i\%$
[0, 1000)			
[1000, 2000)			
[2000, 3000)			
[3000, 4000)			
[4000, 5000)			
[5000, 6000)	1	0,02	2
Σύνολο	50	1	100

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων για την μεταβλητή Χ. (Μονάδες 10)

γ) Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r μεταξύ των μεταβλητών (Χ) και (Υ), όπου (Χ) είναι η παραγωγή πατάτας σε τόνους και (Υ) είναι η έκταση σε στρέμματα στην οποία παράγονται οι πατάτες, θα είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Σ' έναν διαγωνισμό Στατιστικής, συμμετείχαν 5 αγόρια και 30 κορίτσια του 1^{ου} Λυκείου μιας πόλης και 15 αγόρια και 10 κορίτσια του 2^{ου} Λυκείου της πόλης. Ο αριθμός των επιτυχόντων και των επιτυχουσών του διαγωνισμού των δύο Λυκείων, δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός επιτυχόντων και επιτυχουσών			
		Φύλο	
		Αγόρια	Κορίτσια
Σχολείο	1 ^ο Λύκειο	1	20
	2 ^ο Λύκειο	6	8

α) Να αποδείξετε ότι τα ποσοστά επιτυχίας ανά φύλο, του 2^{ου} Λυκείου είναι:

- i. 40% μεταξύ των αγοριών, (Μονάδες 5)
- ii. 80% μεταξύ των κοριτσιών. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα ποσοστά επιτυχίας ανά φύλο, του 1^{ου} Λυκείου είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά του 2^{ου} Λυκείου. (Μονάδες 9)

γ) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι, εφόσον τα ποσοστά επιτυχίας των αγοριών και των κοριτσιών του 1^{ου} Λυκείου είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά των αγοριών και των κοριτσιών του 2^{ου} Λυκείου, τότε και το συνολικό ποσοστό επιτυχίας του 1^{ου} Λυκείου, θα είναι και αυτό μικρότερο από το αντίστοιχο συνολικό ποσοστό επιτυχίας του 2^{ου} Λυκείου. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Γιάννη; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Ο Πέτρος έχει στην τσέπη του 5 διαφορετικά κέρματα: 3 κέρματα αξίας 1 ευρώ το καθένα, από την Ελλάδα, την Αυστρία και την Ιταλία και 2 κέρματα αξίας 2 ευρώ το καθένα, από την Ελλάδα και την Αυστρία.



Ο Πέτρος βγάζει τυχαία ένα κέρμα, το καταγράφει και το ξαναβάζει στην τσέπη του. Στη συνέχεια βγάζει τυχαία ένα δεύτερο κέρμα από την τσέπη του και το καταγράφει.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 25 διαφορετικοί τρόποι που μπορεί ο Πέτρος να βγάλει τα δύο κέρματα από την τσέπη του. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- i. A: «το πρώτο κέρμα έχει αξία 1 ευρώ και το δεύτερο έχει αξία 2 ευρώ»,
- ii. B: «τα δύο κέρματα έχουν διαφορετική αξία»,
- iii. Γ: «τα δύο κέρματα έχουν την ίδια αξία».

(Μονάδες 18)

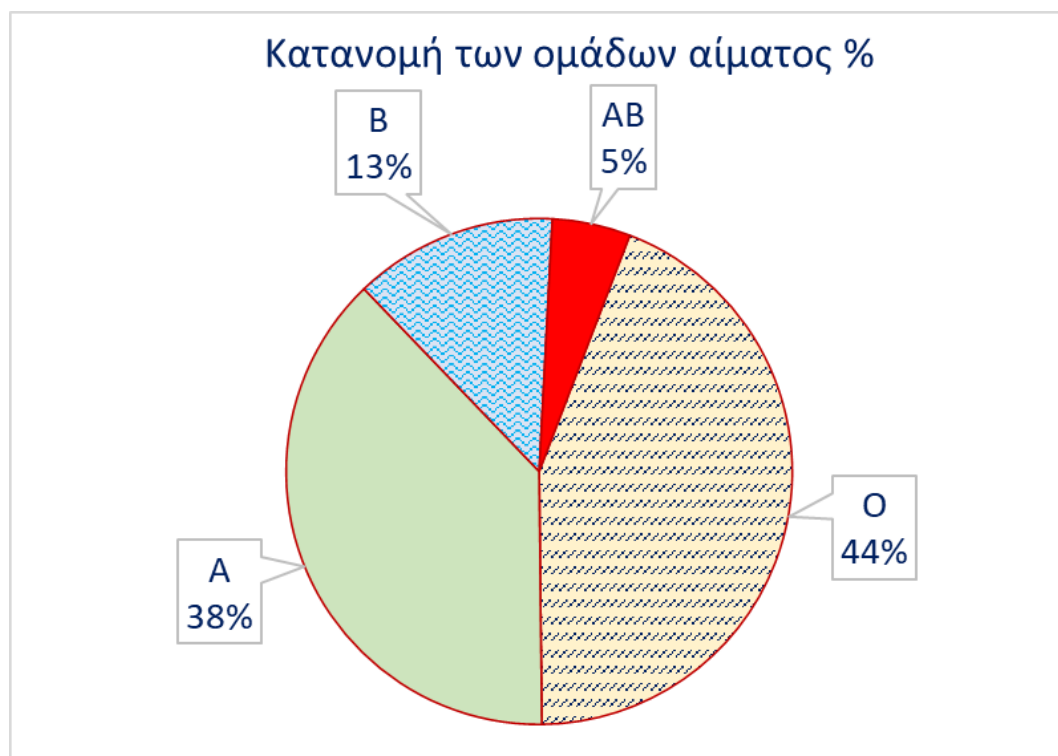
ΘΕΜΑ 4

Κάθε άνθρωπος ανήκει σε μία μόνο, από τις τέσσερις κύριες ομάδες αίματος O, A, B ή AB. Είναι γνωστό ότι η ομάδα O μπορεί να δώσει αίμα σε όλες τις ομάδες (O, A, B και AB). Η ομάδα A μπορεί να δώσει αίμα μόνο στις A και AB. Η ομάδα B μπορεί να δώσει αίμα μόνο στις B και AB. Τέλος, η ομάδα AB μπορεί να δώσει αίμα μόνο στην AB. Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα φαίνεται η ποσοστιαία κατανομή των ομάδων αίματος σε μία πόλη.

Ένα άτομο από αυτή την πόλη, επιλέγεται τυχαία. Να βρείτε την πιθανότητα, αυτό να μπορεί:

- α) να δώσει αίμα σε οποιοδήποτε άτομο,
- β) να δώσει αίμα σ' ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα A,
- γ) να δώσει αίμα σ' ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα A ή σ' ένα που ανήκει στην ομάδα B,
- δ) να δεχθεί αίμα από ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα B,
- ε) να δεχθεί αίμα από οποιοδήποτε άτομο.

(Μονάδες 25)



ΘΕΜΑ 4

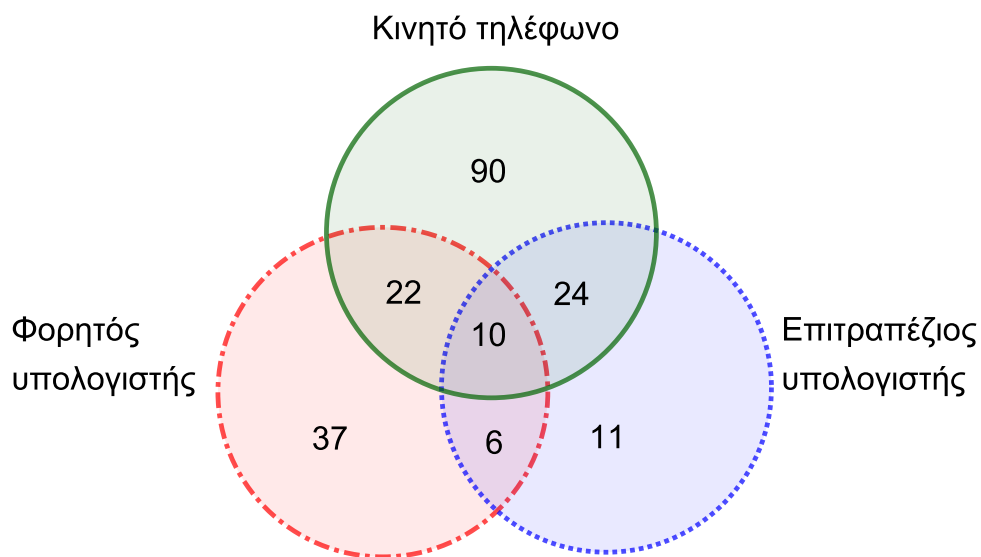
Σε μία έρευνα συμμετείχαν 200 άτομα, τα οποία συνδέθηκαν τουλάχιστον μία φορά την προηγούμενη εβδομάδα στο διαδίκτυο. Η ερώτηση της έρευνας αφορούσε τη συσκευή ή τις συσκευές με τις οποίες συνδέθηκαν. Το παρακάτω διάγραμμα Venn για τα άτομα που συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο, με φορητό υπολογιστή ή με επιτραπέζιο υπολογιστή δείχνει τα αποτελέσματα της έρευνας.

α) Πόσα από τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα, κατά τη διάρκεια της εβδομάδας:

- i. συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο, (Μονάδες 3)
- ii. συνδέθηκαν μόνο με κινητό τηλέφωνο, (Μονάδες 3)
- iii. συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο αλλά όχι με επιτραπέζιο υπολογιστή; (Μονάδες 4)

β) Ένα από τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα, επιλέγεται τυχαία. Να βρείτε την πιθανότητα το άτομο αυτό κατά τη διάρκεια της εβδομάδας:

- i. να συνδέθηκε με κινητό τηλέφωνο, (Μονάδες 5)
- ii. να συνδέθηκε τουλάχιστον με δύο τρόπους, (Μονάδες 5)
- iii. να συνδέθηκε ακριβώς με έναν από τους τρεις τρόπους. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Σε δείγμα 100 ατόμων τέθηκε το ερώτημα αν συνδέθηκαν μια συγκεκριμένη μέρα στα δυο μέσα κοινωνικής δικτύωσης, Facebook ή YouTube. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

		YouTube		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Facebook	Ναι	32	30	62
	Όχι	12	26	38
	Σύνολο	44	56	100

Ένα από τα παραπάνω 100 άτομα επιλέγεται τυχαία. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ώστε το άτομο αυτό:

- α) να μη συνδέθηκε στο Facebook,
- β) να μη συνδέθηκε στο Facebook ούτε στο YouTube,
- γ) να συνδέθηκε στο YouTube και να μη συνδέθηκε στο Facebook,
- δ) να συνδέθηκε το πολύ σε ένα από τα δύο μέσα κοινωνικής δικτύωσης,
- ε) να συνδέθηκε τουλάχιστον σε ένα από τα δύο μέσα κοινωνικής δικτύωσης.

(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 4

Μια εταιρεία επεξεργασίας ρυζιού χρησιμοποιεί ένα αυτόματο μηχάνημα για να συσκευάσει χύμα ρύζι σε σακούλες ετικέτας 1000 γραμμαρίων. Η ποσότητα γέμισης, σε γραμμάρια, που διανέμεται από το μηχάνημα σε κάθε σακούλα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 1010 και τυπική απόκλιση 10.

α) Παίρνουμε ένα μεγάλο δείγμα των παραπάνω συσκευασιών. Να εκτιμήσετε το ποσοστό των συσκευασιών του δείγματος με βάρος ρυζιού:

- i. μικρότερο από 1000 γραμμάρια, (Μονάδες 9)
- ii. μεταξύ 990 και 1010 γραμμαρίων. (Μονάδες 9)

β) Στην εταιρεία θα επιβληθεί πρόστιμο, αν περισσότερο από το 2,5% των συσκευασιών έχει βάρος ρυζιού μικρότερο από 1000 γραμμάρια η καθεμία. Ωστόσο το αυτόματο μηχάνημα έχει τη δυνατότητα να ρυθμίσει τη μέση τιμή της ποσότητας γέμισης που διανέμει στις σακούλες. Ποια νέα μέση τιμή θα πρέπει να επιλέξουν στην εταιρεία (διατηρώντας την τυπική απόκλιση 10) ώστε να μην τους επιβληθεί πρόστιμο; (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Η τράπουλα αποτελείται από 52 φύλλα, 26 κόκκινα και 26 μαύρα. Τα κόκκινα φύλλα χωρίζονται σε δυο φυλές, τις κούπες και τα καρό, και τα μαύρα επίσης σε δύο, τα μπαστούνια και τα σπαθιά. Κάθε φυλή αποτελείται από:

- εννέα αριθμούς: 2,3,...,10
- τρεις φιγούρες: βαλές, ντάμα, ρήγας
- έναν άσο.

α) Η Μαρία τράβηξε τυχαία ένα φύλλο από μια τράπουλα. Να βρείτε τις πιθανότητες:

- το φύλλο να είναι η ντάμα κούπα, (Μονάδες 9)
- το φύλλο να είναι κόκκινο και φιγούρα. (Μονάδες 9)

β) Η Μαρία αφαίρεσε από την αρχική τράπουλα τα φύλλα με τους αριθμούς και τράβηξε τυχαία ένα φύλλο. Πόσες φορές αυξήθηκαν οι πιθανότητες του προηγούμενου ερωτήματος;
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Σ' ένα δείγμα 20 φορολογούμενων πολιτών, οι 4 έχουν ελεγχθεί κατά το παρελθόν, από την Ανεξάρτητη Αρχή Δημοσίων Εσόδων (ΑΑΔΕ). Το τρέχον έτος, από το παραπάνω δείγμα των 20 φορολογούμενων, η ΑΑΔΕ επιλέγει τυχαία δύο φορολογούμενους, για έλεγχο.

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των συνδυασμών των 20 φορολογούμενων ανά 2, είναι 190.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων, για τους δύο, τυχαία επιλεγμένους φορολογούμενους από την ΑΑΔΕ:

- i. Α: «και οι δύο φορολογούμενοι έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν»,
- ii. Β: «και οι δύο φορολογούμενοι δεν έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν»,
- iii. Γ: «μόνο ένας από τους δύο φορολογούμενους, έχει ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν».

(Μονάδες 18)

ΘΕΜΑ 4

Τα βάρη των αβγών, σε γραμμάρια, που παράγονται σε μία φάρμα, ακολουθούν την κανονική κατανομή. Τα αβγά πωλούνται σε τέσσερα μεγέθη:

- μικρό μέγεθος: με βάρος μικρότερο από 53 γραμμάρια
- μεσαίο μέγεθος: με βάρος από 53 έως 63 γραμμάρια
- μεγάλο μέγεθος: με βάρος από 63 έως 73 γραμμάρια
- πολύ μεγάλο μέγεθος: με βάρος μεγαλύτερο από 73 γραμμάρια

Έχει παρατηρηθεί, ότι μικρού μεγέθους είναι το 2,5% των αβγών και πολύ μεγάλου μεγέθους είναι επίσης το 2,5% των αβγών.

α) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή της κατανομής είναι 63 και η τυπική απόκλιση 5.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα ποσοστά των αβγών που αναμένονται, σε καθένα από τα τέσσερα μεγέθη.

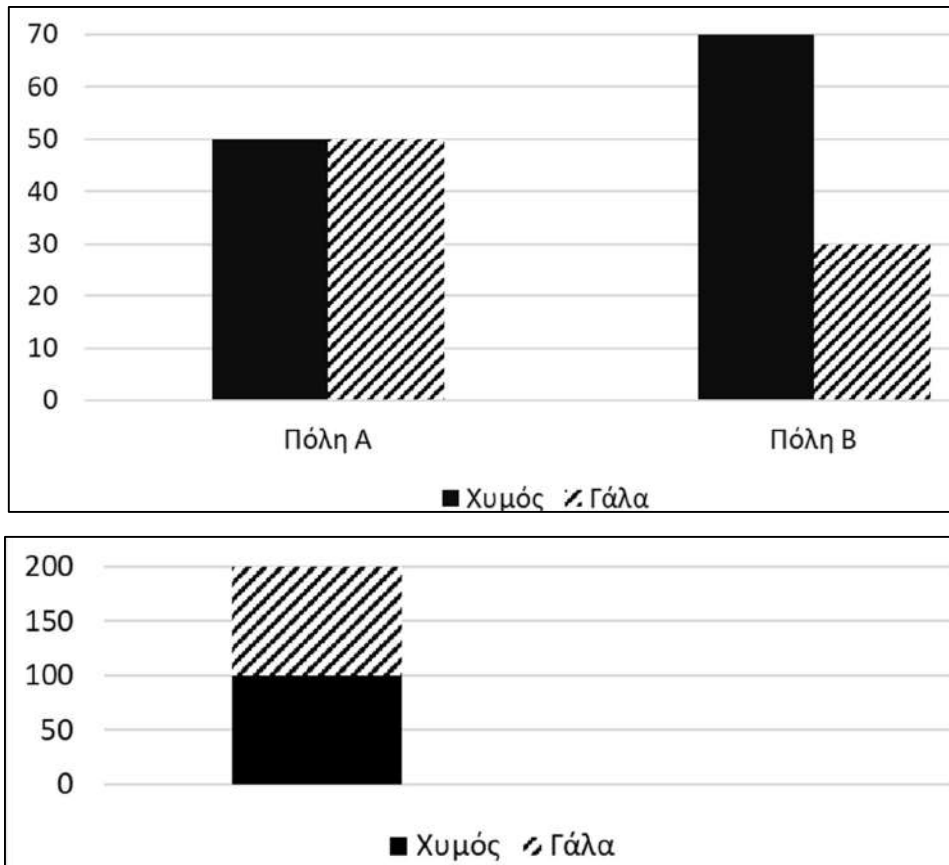
(Μονάδες 10)

γ) Να συγκρίνετε το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μεγαλύτερο από 50 γραμμάρια με το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μικρότερο από 70 γραμμάρια.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Σε δύο πόλεις, Α και Β έγινε έρευνα για το πρωινό ρόφημα που προτιμούν τα παιδιά ηλικίας από 5 έως 12 ετών. Τα αποτελέσματα καταγράφονται στην παρακάτω εικόνα (στο επάνω μέρος) στο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, επί τοις εκατό.



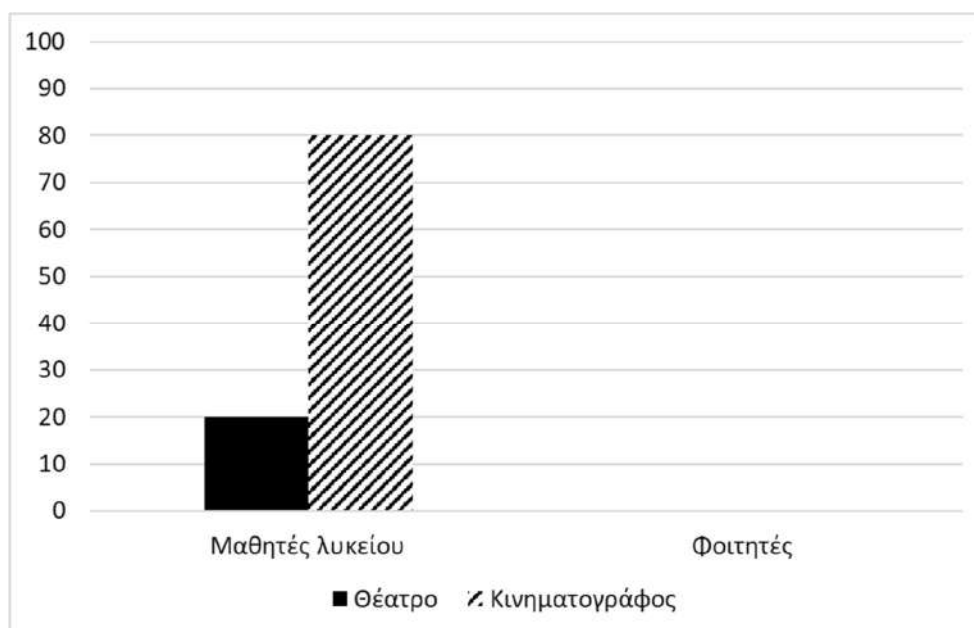
Στην εικόνα, στο κάτω μέρος φαίνεται μια από τις δύο ράβδους στοιβαγμένου ραβδογράμματος που αντιστοιχεί στα αποτελέσματα της ίδιας έρευνας.

- α) Στην πόλη Α, ποιο ποσοστό των παιδιών που συμμετείχαν στην έρευνα προτιμούν γάλα;
(Μονάδες 5)
- β) Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνεται να υπάρχει σχέση ανάμεσα στην προτίμηση των παιδιών 5-12 ετών σε χυμό ή γάλα και στην πόλη;
(Μονάδες 8)
- γ) Σε ποια πόλη αντιστοιχεί η ράβδος που φαίνεται στο στοιβαγμένο ραβδόγραμμα και γιατί;
(Μονάδες 7)
- δ) Αν γνωρίζετε ότι συνολικά (στις δύο πόλεις) στην έρευνα απάντησαν 700 παιδιά 5-12 ετών, να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παραπάνω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα και να σχεδιάσετε τη ράβδο που λείπει.
(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Σε μια έρευνα μαθητές λυκείου και φοιτητές ερωτήθηκαν και απάντησαν αν προτιμούν κινηματογράφο ή θέατρο. Ένας ερευνητής, με τις απαντήσεις τους συμπλήρωσε μερικά κελιά του πίνακα συνάφειας συχνοτήτων και σχεδίασε το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, ως προς τη βαθμίδα εκπαίδευσης που φαίνεται παρακάτω, αλλά δεν τελείωσε.

		Επιλογή τρόπου ψυχαγωγίας		
		Θέατρο	Κινηματογράφος	Σύνολο
Βαθμίδα εκπαίδευσης	Μαθητές λυκείου	60		
	Φοιτητές	60	140	
	Σύνολο			



α) Ποιο ποσοστό των φοιτητών απάντησαν ότι προτιμούν θέατρο; (Μονάδες 6)

β) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε:

i. το παραπάνω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα, (Μονάδες 8)

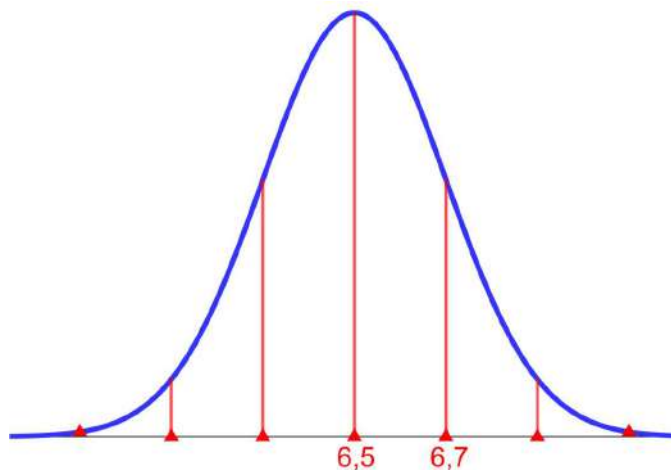
ii. τον παραπάνω πίνακα συνάφειας. (Μονάδες 6)

γ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) την παρακάτω πρόταση, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

«Δεν παρατηρείται κάποια διαφορά μεταξύ μαθητών λυκείου και φοιτητών της έρευνας, όσο αφορά την απάντηση 'θέατρο', καθώς αυτή δόθηκε από τόσους φοιτητές όσους και μαθητές λυκείου (60).» (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Ο Κώστας βαδίζει με γρήγορο ρυθμό και η ταχύτητά του, σε χιλιόμετρα ανά ώρα, ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 6,5$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η πιθανότητα, σε μια τυχαία διαδρομή η ταχύτητά του να είναι μεταξύ 6,5 και 6,7 χιλιομέτρων την ώρα είναι 0,34 περίπου.

α) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση σ της παραπάνω κανονικής κατανομής.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα, σε μια τυχαία διαδρομή η ταχύτητα του Κώστα να είναι:

i. μικρότερη από 6,5 χιλιόμετρα την ώρα,

(Μονάδες 6)

ii. μικρότερη από 6,1 χιλιόμετρα την ώρα.

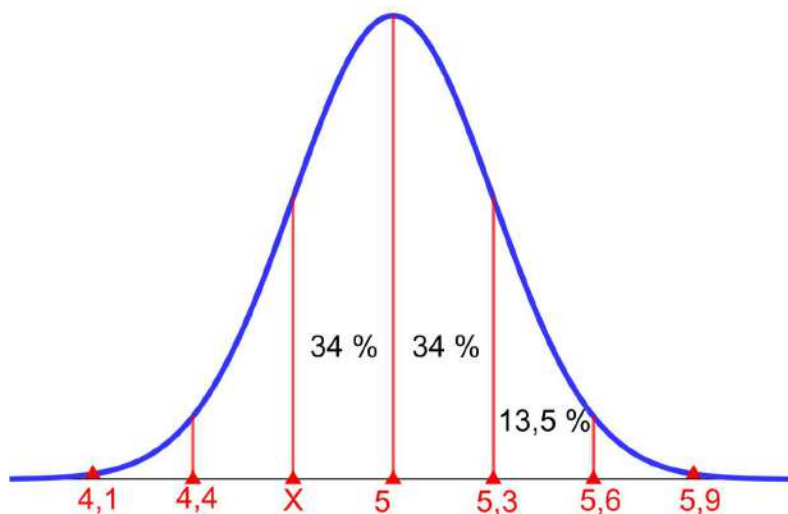
(Μονάδες 8)

γ) Ο Κώστας άλλαξε τον τρόπο περπατήματός του. Η ταχύτητά του, σε χιλιόμετρα την ώρα ακολουθεί και πάλι την κανονική κατανομή, αλλά με $\mu = 6,3$ και σ διαφορετική από την προηγούμενη. Η πιθανότητα η ταχύτητά του, σε μια τυχαία διαδρομή, να είναι μεταξύ 6,3 και 6,6 χιλιομέτρων την ώρα είναι ίση με 0,34 περίπου. Να υπολογίσετε την πιθανότητα η ταχύτητά του να είναι μικρότερη από 6 χιλιόμετρα την ώρα.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4

Υποθέτουμε ότι η τιμή, σε ευρώ ανά λίτρο, του ελαιόλαδου στις επιχειρήσεις μιας ευρωπαϊκής χώρας A ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 5$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι η πιθανότητα η τιμή του ελαιόλαδου σε τυχαία επιχείρηση της χώρας A να είναι στο διάστημα $(5, 5,6)$ είναι 0,475 περίπου.

α) Με T συμβολίζουμε την τιμή του ελαιόλαδου, μιας τυχαίας επιχείρησης στην χώρα A, σε ευρώ ανά λίτρο.

Να υπολογίσετε προσεγγιστικά:

- i. την πιθανότητα το T να είναι μεγαλύτερο του 5. (Μονάδες 6)
- ii. την πιθανότητα να ισχύει $T > 5,6$. (Μονάδες 6)
- iii. την τυπική απόκλιση σ της παραπάνω κανονικής κατανομής. (Μονάδες 6)

β) Δίνεται ότι η πιθανότητα η τιμή του ελαιόλαδου, στην τυχαία επιχείρηση της χώρας A, να ανήκει στο διάστημα $(X, 5)$ είναι 0,34.

Να υπολογίσετε προσεγγιστικά την τιμή του X . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

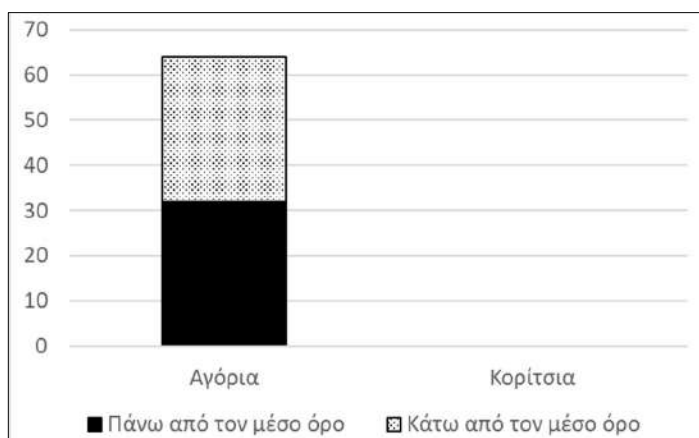
Τα παιδιά της Β΄ τάξης ενός γυμνασίου έγραψαν διαγώνισμα στα Μαθηματικά. Ο καθηγητής βαθμολόγησε τα διαγωνίσματα και υπολόγισε τον μέσο όρο όλων των βαθμών. Στον παρακάτω πίνακα συνάφειας καταγράφονται οι συχνότητες του φύλου των παιδιών που έγραψαν διαγώνισμα και του βαθμού στο διαγώνισμα, σε σύγκριση με τον μέσο όρο.

		Βαθμός στο διαγώνισμα		
		Πάνω από τον μέσο όρο	Κάτω από τον μέσο όρο	Σύνολο
Φύλο	Αγόρια	32	32	
	Κορίτσια	32	20	
	Σύνολο			

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

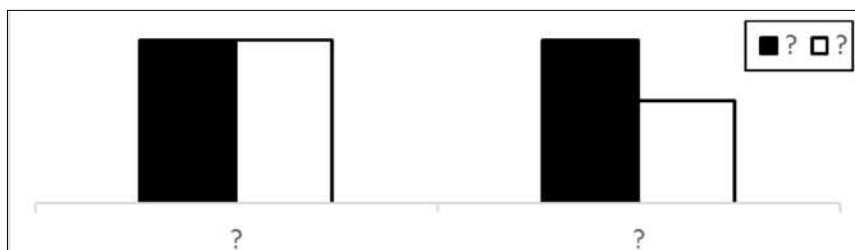
(Μονάδες 10)

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε το παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων φύλου και βαθμού, που αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα.



(Μονάδες 10)

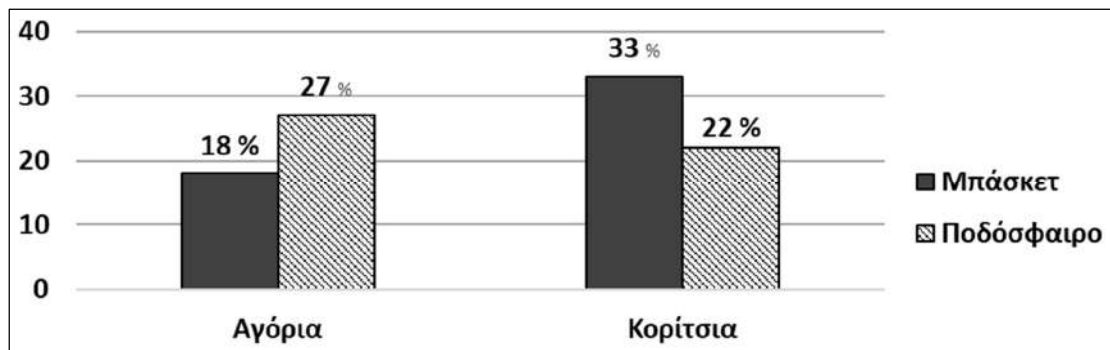
γ) Δίνεται το παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, για τα παραπάνω δεδομένα, στο οποίο δεν φαίνεται πού αντιστοιχεί η κάθε ράβδος. Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι σίγουρα οι άχρωμες ράβδοι αντιστοιχούν στην κατηγορία «βαθμός κάτω από τον μέσο όρο». Συμφωνείτε μαζί του;



(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων φαίνεται το ποσοστό των αγοριών και κοριτσιών της Γ΄ τάξης ενός γυμνασίου που επιλέγουν μπάσκετ ή ποδόσφαιρο.



Δίνεται ότι κάθε παιδί της Γ΄ τάξης επιλέγει ένα ακριβώς άθλημα.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων.

		Άθλημα		
		Μπάσκετ	Ποδόσφαιρο	Σύνολο
Φύλο	Αγόρια			
	Κορίτσια			
	Σύνολο			

(Μονάδες 9)

β) Ποιο ποσοστό των παιδιών του σχολείου επέλεξαν μπάσκετ; (Μονάδες 6)

γ) Αν τα αγόρια του σχολείου που επέλεξαν μπάσκετ είναι 36, πόσα είναι τα παιδιά που επέλεξαν ποδόσφαιρο; (Μονάδες 6)

δ) Χωρίς να γνωρίζετε το πλήθος των παιδιών του σχολείου, να αποδείξετε ότι τα αγόρια που επέλεξαν μπάσκετ είναι τα $\frac{2}{5}$ των αγοριών του σχολείου. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4

Ο υπεύθυνος καθηγητής του Γ4 συνέλεξε τις απουσίες των 24 μαθητών και μαθητριών του τμήματος, για την Δευτέρα και την Τρίτη της προηγούμενης εβδομάδας και τις καταχώρισε σε ένα ειδικό πρόγραμμα καταμέτρησης απουσιών, με το οποίο υπολόγισε ότι:

- η διάμεσος των απουσιών ήταν $\delta = 2,5$,
- το πρώτο τεταρτημόριο ήταν $Q_1 = 1$,
- το τρίτο τεταρτημόριο ήταν $Q_3 = 4$,
- η ελάχιστη τιμή των απουσιών ήταν $x_{min} = 0$ και η μέγιστη τιμή $x_{max} = 14$.

α) Υπάρχει μαθητής ή μαθήτρια του Γ4 που να έκανε τόσες απουσίες, όση είναι η διάμεσος δ ;
(Μονάδες 7)

β) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. Δεν υπάρχει μαθητής ή μαθήτρια του Γ4 που να έχει περισσότερες από 10 απουσίες.

ii. Το πολύ το 25% των μαθητών και μαθητριών του Γ4, δηλαδή το πολύ 6 μαθητές και μαθήτριες πήραν περισσότερες από 4 απουσίες τις δύο αυτές ημέρες.

iii. Υπάρχουν 6 μαθητές και μαθήτριες του Γ4 που δεν έχουν κάνει απουσία τις δύο αυτές ημέρες.
(Μονάδες 18)

ΘΕΜΑ 4

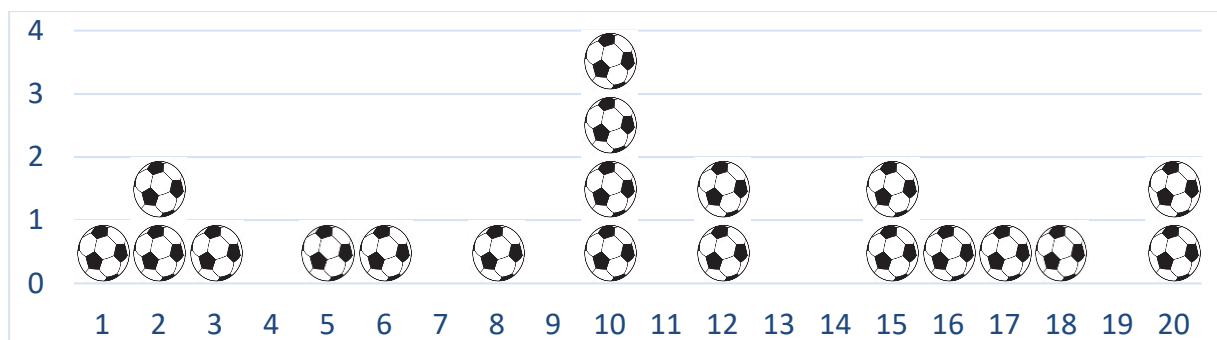
Ο Λευτέρης αγωνίζεται σε μία ομάδα ποδοσφαίρου. Κατά τη διάρκεια του τελευταίου πρωταθλήματος η ομάδα του έδωσε 20 αγώνες, στους οποίους ο Λευτέρης σε έναν αγώνα δεν πέτυχε γκολ, σε έναν αγώνα πέτυχε 2 γκολ και στους υπόλοιπους δεκαοχτώ αγώνες πέτυχε 1 γκολ στον καθένα από αυτούς.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. ο Λευτέρης πέτυχε κατά μέσο όρο 1 γκολ ανά αγώνα, (Μονάδες 5)
- ii. η τυπική απόκλιση των γκολ που πέτυχε ο Λευτέρης είναι $\sqrt{0,1}$. (Μονάδες 5)

β) Το παρακάτω εικονόγραμμα παρουσιάζει τον αριθμό των γκολ που πέτυχε ο Παύλος, σε κάθε αγώνα, κατά τη διάρκεια του ίδιου πρωταθλήματος. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο των γκολ ανά αγώνα, που πέτυχε ο Παύλος, καθώς και την τυπική απόκλιση των γκολ.

(Μονάδες 10)



γ) Ο προπονητής μιας ποδοσφαιρικής ομάδας ενδιαφέρεται για την απόκτηση ενός ποδοσφαιριστή που θα βοηθήσει την ομάδα στο σκοράρισμα στο νέο πρωτάθλημα. Έχει να διαλέξει ανάμεσα στον Λευτέρη και στον Παύλο. Αν τα κριτήρια είναι η συχνότητα και η σταθερότητα στο σκοράρισμα, ποιον θα του προτείνετε με βάση τα παραπάνω δεδομένα;

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Ένα οπωροπωλείο προμηθεύεται το 60% των μήλων του από το Πήλιο και τα υπόλοιπα από την Καστοριά. Τα $\frac{4}{5}$ των μήλων που προμηθεύεται από το Πήλιο είναι κόκκινα και τα $\frac{3}{5}$ των μήλων που προμηθεύεται από την Καστοριά είναι επίσης κόκκινα.

α) Να αποδείξετε ότι, στο σύνολο όλων των μήλων του οπωροπωλείου:

- i. το ποσοστό εκείνων που είναι κόκκινα και προέρχονται από το Πήλιο είναι 48%,
- ii. το ποσοστό εκείνων που είναι κόκκινα και προέρχονται από την Καστοριά είναι 24%.

(Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων:

		Κόκκινα μήλα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Περιοχή	Καστοριά			
	Πήλιο			
	Σύνολο			

(Μονάδες 6)

γ) Ένα μήλο επιλέγεται τυχαία από το σύνολο όλων των μήλων του οπωροπωλείου. Να βρείτε την πιθανότητα το μήλο αυτό «να έχει κόκκινο χρώμα ή να προέρχεται από την Καστοριά».

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Ο Δείκτης Μάζας Σώματος (ΔΜΣ) χρησιμοποιείται ως διαγνωστικό εργαλείο, πιθανών προβλημάτων υγείας ενός ατόμου σε σχέση με το βάρος του. Υπολογίζεται διαιρώντας το βάρος του ατόμου, σε κιλά, με το τετράγωνο του ύψους του, σε μέτρα. Σε μια έρευνα επιλέχθηκε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα 5000 ανδρών και 5000 γυναικών και καταγράφηκε ο ΔΜΣ αυτών των ατόμων. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων φύλου και κατηγορίας ΔΜΣ, ως προς το φύλο.

α) Σε ποια κατηγορία του ΔΜΣ παρατηρείται το μεγαλύτερο ποσοστό:

i. των ανδρών, (Μονάδες 4)

ii. των γυναικών; (Μονάδες 4)

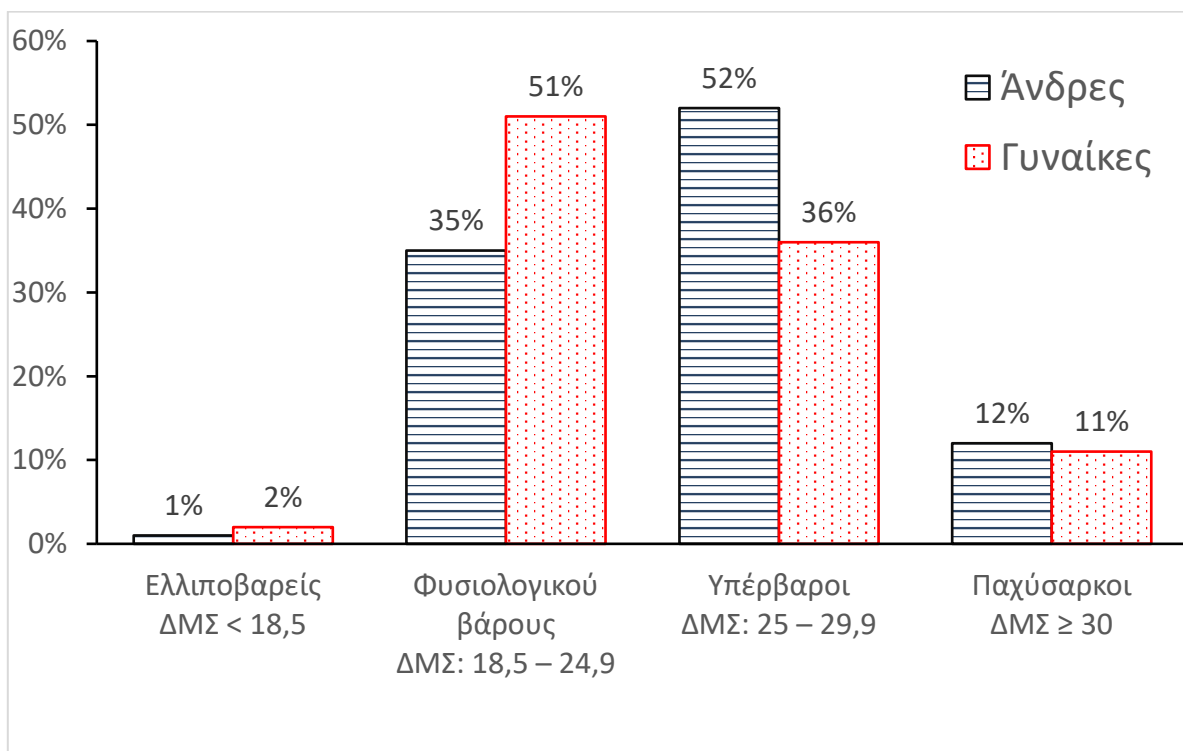
β) Ποιο είναι το ποσοστό με βάρος μη-φυσιολογικό:

i. των ανδρών, (Μονάδες 4)

ii. των γυναικών, (Μονάδες 4)

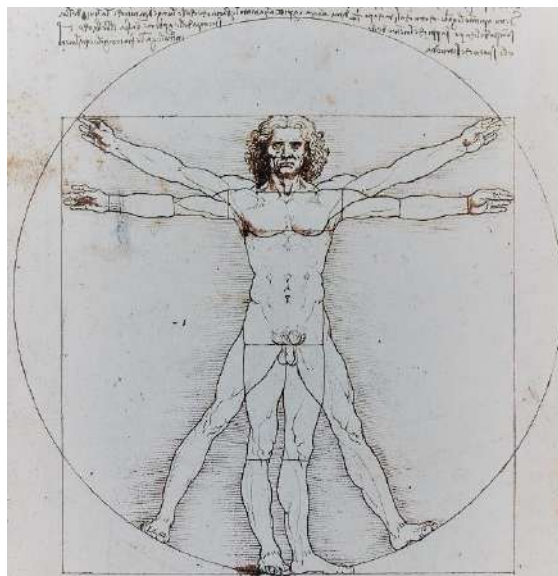
iii. όλων των ατόμων του δείγματος; (Μονάδες 4)

γ) Από την παραπάνω έρευνα, μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι η κατηγορία ΔΜΣ ενός ατόμου (ελλιποβαρές, φυσιολογικό, υπέρβαρο, παχύσαρκο) σχετίζεται με το φύλο του; (Μονάδες 5)

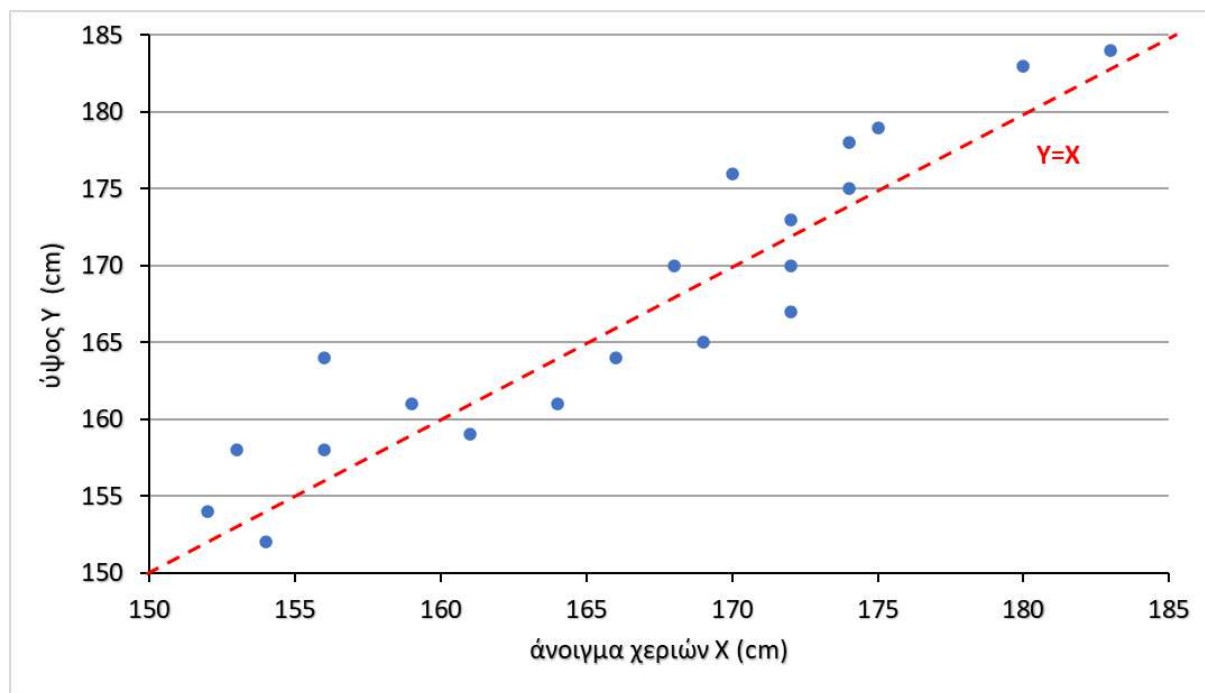


ΘΕΜΑ 4

Ο Λεονάρντο ντα Βίντσι, στο σχέδιο του «Ο Άνθρωπος του Βιτρούβιου», ισχυρίζεται ότι το άνοιγμα των χεριών ενός ατόμου και το ύψος του είναι περίπου ίσα. Θέλοντας να το διερευνήσει αυτό, μια ομάδα μαθητών ενός Λυκείου επέλεξε τυχαία ένα δείγμα 20 συμμαθητών τους και μέτρησε, σε cm, το άνοιγμα των χεριών και το ύψος τους. Με τα δεδομένα αυτά η ομάδα των μαθητών κατασκεύασε το παρακάτω διάγραμμα



διασποράς και την ευθεία $Y = X$ στο ίδιο σχήμα, όπως φαίνεται παρακάτω:



- α) Στην έρευνα των μαθητών ποιες είναι οι μεταβλητές και ποιο το είδος τους; (Μονάδες 7)
- β) Οι μαθητές υπολόγισαν ότι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των παραπάνω μεταβλητών είναι $r = 0,93$. Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Λεονάρντο ντα Βίντσι; (Μονάδες 8)
- γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία που προσαρμόζεται «με το μάτι» στα δεδομένα. (Μονάδες 5)
- δ) Ένας από τους μαθητές του Λυκείου που δεν συμμετείχε στην έρευνα, έχει άνοιγμα χεριών 170 cm. Να εκτιμήσετε ποιο θα είναι περίπου το ύψος του. (Μονάδες 5)