ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $g$ με $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , $x \in [-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση $f$, ορισμένη στο $[0, \pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε:

$$(gof)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi].$$

α)

i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta\mu x|$.

(Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση $f$.

(Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h\colon (0, \pi] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x) - x}$ , όπου $f$ είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

$$\lim_{x \to 0} h(x)$$

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x>1$ να ισχύει

$$xf(x)f'(x)=\frac{1}{2} \text{ και } f(e)=1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln x$, $x>1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f.

(Μονάδες 9)

Έστω $f(x)=\sqrt{\ln x}$, $x>1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e,0)$ και $B(e,1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει

$$f(\alpha\ln\alpha)\leq f(\ln\alpha)$$

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^{x-1}+\ln x\right)=\ln 2$.

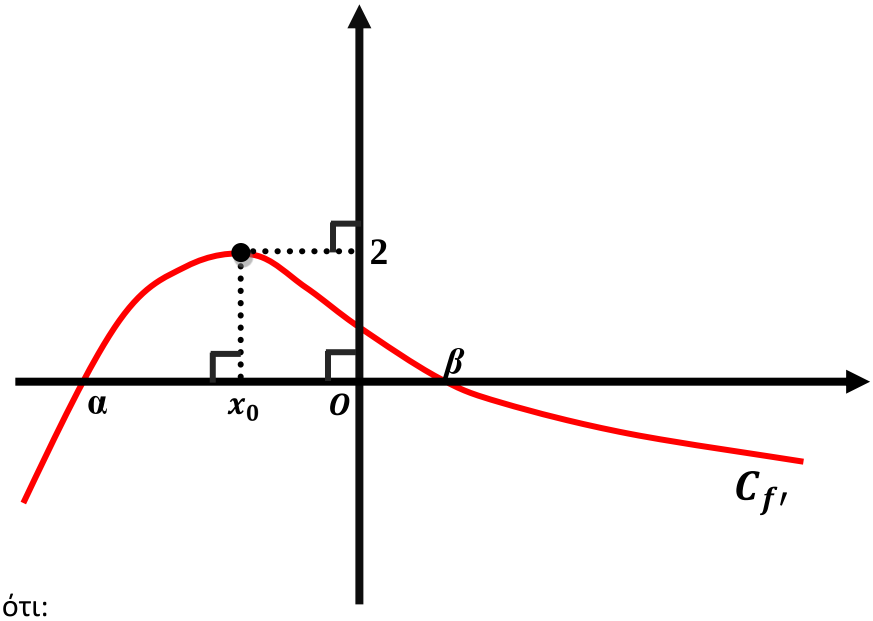
(Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+(3-\ln 2)x-3,\ x\in\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε συνάρτηση $f: R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.




Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,
- τα $\alpha, \beta$ είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(\alpha) < 0,\ f(\beta) > 0.$
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση $x_0$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$, ισχύει $f(x+1) - f(x) \leq 2$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι 1-1.

(Μονάδες 5)

Δίνεται επιπλέον ότι

- η συνάρτηση $f'$ είναι συνεχής,
- $f(0)=-1$ και $f(2)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

(Μονάδες 5)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα

(Μονάδες 4)

ii.Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_o\in(0,2)$.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $g$ είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $g'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η $g$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=x^3+3x^2-\lambda x+1$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής $\mathrm{K}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda$ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $\mathrm{K}(-1,\lambda+3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις $x_1, x_2$, με $x_1<-1<x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης $(\varepsilon)$ της $C_P$ στο σημείο $\mathrm{K}$ και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $\mathrm{E}_1$ που περικλείεται μεταξύ των $(\varepsilon)$ , $C_P$ και των ευθειών $x=x_1, x=-1$ είναι ίσο με το εμβαδόν $\mathrm{E}_2$ που περικλείεται μεταξύ των $(\varepsilon)$ , $C_P$ και των ευθειών $x=x_2, x=-1$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1)=f'(1)=2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x)dx>1$.

(Μονάδες 6)

ii. $\int_0^1 xf'(x)dx<1$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με $1$. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος $x$ , τότε:

α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του $x$ και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα.

(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του $x$ και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα.

(Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους $\upsilon$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 07)

δ) Αν $\theta$ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά $x$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της $\theta$ τη χρονική στιγμή $t_0$ κατά την οποία $x(t_0) = \frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά $x$ αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0{,}1\ m/sec$.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f$ ορισμένη στο $[-2, 2]$ τέτοια ώστε:

$f$ συνεχής στο $[-2, 2]$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ και

$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$, για κάθε $x \in [-2, 2]$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ δεν έχει σημεία καμπής.

(Μονάδες 08)

β) Αν $f(0) = 3$,

i. Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 = 4 - x^2$, για κάθε $x \in [-2, 2]$ και κατόπιν ότι $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$ , $x \in [-2, 2]$.

(Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της $f$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ .

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(Μονάδες 06)

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση $f$ αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(x+f\left(x\right)\right)>x$, $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}$ και
- $g(x)=\ln x,\ x\in(0,+\infty)$.

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της $f$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ f$.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση $h$ είναι περιττή.

(Μονάδες 04)

ii. η συνάρτηση $h$ είναι “1-1”.

(Μονάδες 06)

γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(x-1)+h\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0,\ x>0$.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - lnx - 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0 \in (0, 1)$ με $f(x_0) < 0$.

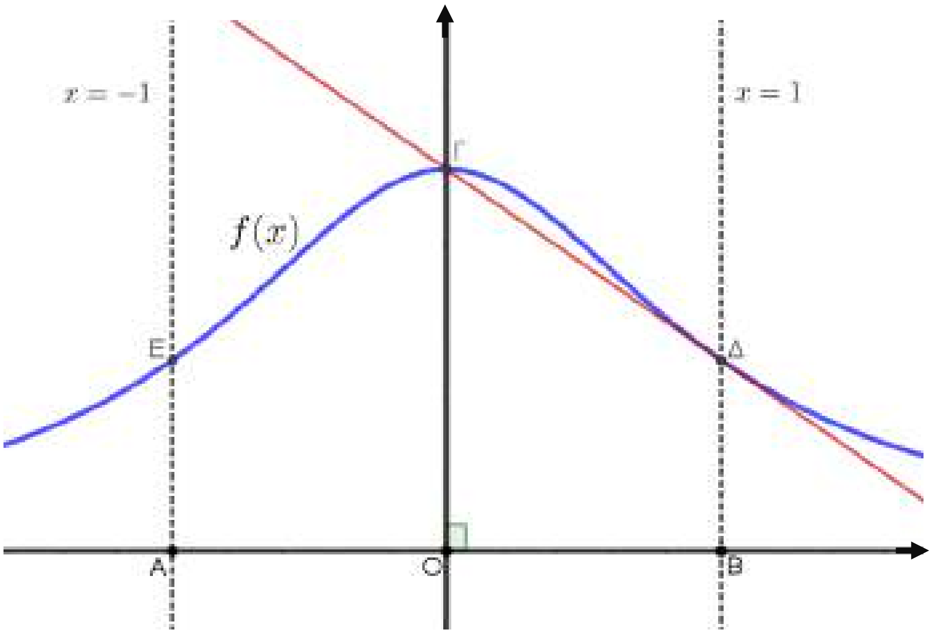
(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in R$ και οι ευθείες με εξισώσεις $x=-1$ και $x=1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα $x'x$ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της $f$ στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της $f$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Γ.




α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΓΔ, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)dx > \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{ln^2 x}$ , $x > 0$ .

α) Να αποδείξτε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2\frac{lnx}{x}f(x)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι η $f$ έχει ολικό ελάχιστο ίσο με $1$.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2\cdot lnx\cdot f(x)+xe^x}{x(f(x)+e^x)}dx$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f$, με τύπο $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}, \quad x \geq 0.$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f$ .

(Μονάδες 07)

β) Να βρείτε την αντίστροφη της $f$ .

(Μονάδες 07)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι καμπύλες $C_1, C_2$ . Με δεδομένα ότι

- η μία από τις δύο καμπύλες αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της $f$ και η άλλη στην γραφική παράσταση της $f^{-1}$,
- $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f^{-1}(x)dx=\alpha$

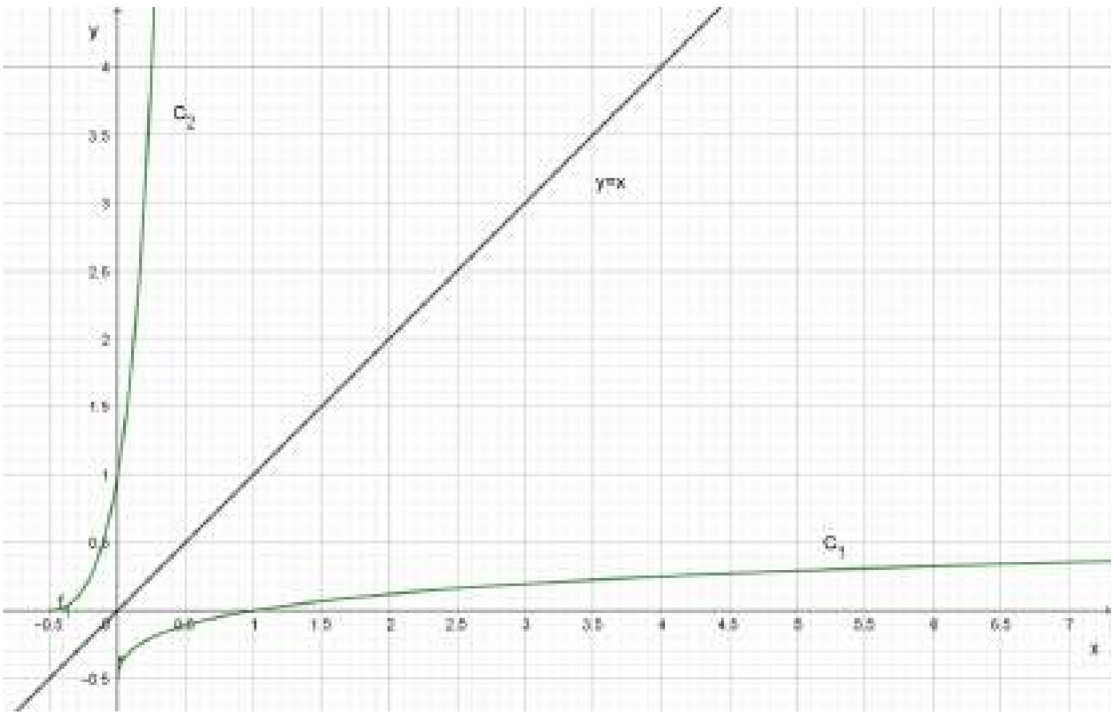
Να βρείτε:

i. Ποια καμπύλη παριστάνει την γραφική παράσταση της $f$ και ποια την γραφική παράσταση της $f^{-1}$,

(Μονάδες 04)

ii. Το πρόσημο του α καθώς και το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_{0}^{1} f(x)dx$ συναρτήσει του $a$ .

(Μονάδες 07)



y
C_2
y=x
C_1
f
x

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y = -x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα $\rho$, η οποία είναι μεγαλύτερη του $1$.

(Μονάδες 09)

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό $\mathrm{E}$ του χωρίου $\Omega$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \rho$ ισούται με

$\mathrm{E}(\Omega) = -\frac{(\rho - 1)^2}{2} - (\rho - 1) + e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$.

α)

i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της.

(Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(Μονάδες 07)

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=2\ln x-x$ και η ευθεία $\varepsilon: y=x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0,y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ από την ευθεία $\varepsilon$, είναι $d(M,\varepsilon)=\sqrt{2}\,|x_0-lnx_0|$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0,y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ από την ευθεία $\varepsilon: y=x$, είναι $d(M,\varepsilon)=\sqrt{2}\,(x_0-lnx_0)$.

(Μονάδες 05)

β)

i. Να βρείτε το σημείο της $C_f$, το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία $\varepsilon$.

(Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση.

(Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε το σημείο της $C_f$ στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y=x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = lnx + e^x, x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f$ τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο Α τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E$ του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της $f$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = e + (x_0 - 1)(1 - lnx_0)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x)=(x^2-1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η $g$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι $f(1)=f(-1)=0$.

(Μονάδες 6)

β) $f'(1)\geq 0$ και $f'(-1)\leq 0$.

(Μονάδες 8)

γ) η $f$ δεν είναι κοίλη.

(Μονάδες 5)

δ) $\int_{-1}^{1}(x^3-3x)f'(x)dx\leq 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x)\geq x^2-x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α)

i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ δεν έχει ασύμπτωτες.

(Μονάδες 6)

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq\dfrac{3}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

β) Αν επιπλέον $f(1)=1$ και $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.

(Μονάδες 5)

ii. η $f$ δεν είναι κοίλη.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x-\lambda x,\ x>0$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει $e-\lambda=e^e-1-\lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η $f$ είναι κυρτή.

(Μονάδες 6)

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_o\in(1,e)$ με $f'(x_o)=0$.

(Μονάδες 6)

γ) για την $f'$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1,e]$.

(Μονάδες 6)

δ) η $f$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο $x_o$ που είναι το $e^{x_o}(1-x_o)+1-\ln x_o$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$, $x>-1$ και έστω F αρχική της f με $F(1)=\ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>-1$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$.

(Μονάδες 6)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_o=1$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\dfrac{2F(x)-1}{x}\geq \ln 4-1$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)+x-1,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

(Μονάδες 8)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_o=\ln 2$ .

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln\left(e^x-1\right)\leq 2x-\ln 4$.

(Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2-e^{-x}}{e^{-x}-1}dx$.

(Μονάδες 8)

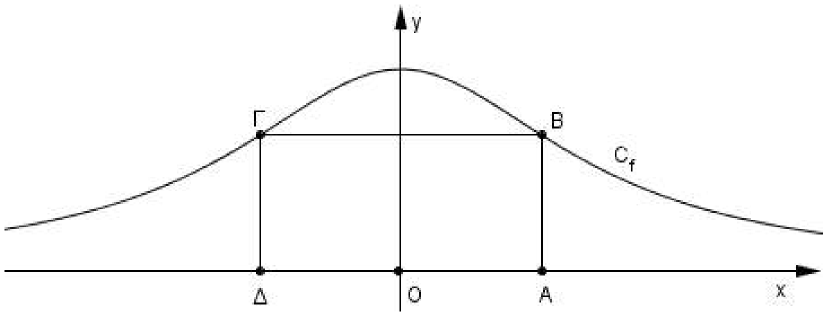
ΘΕΜΑ 4

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $(x^2+1)f'(x)+\dfrac{2x}{x^2+1}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης.




β) Να αιτιολογήσετε γιατί η $C_f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης α, $\alpha>0$ του σημείου $A(\alpha,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$E(\alpha)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+1},\ \alpha>0$$

Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 8)

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1)=\ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x)\,dx=\ln\sqrt{2}$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=f(x)\cdot \eta\mu x$, $x\in[0,2\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f, g$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{-\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0,2\pi]$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, g$ δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους.

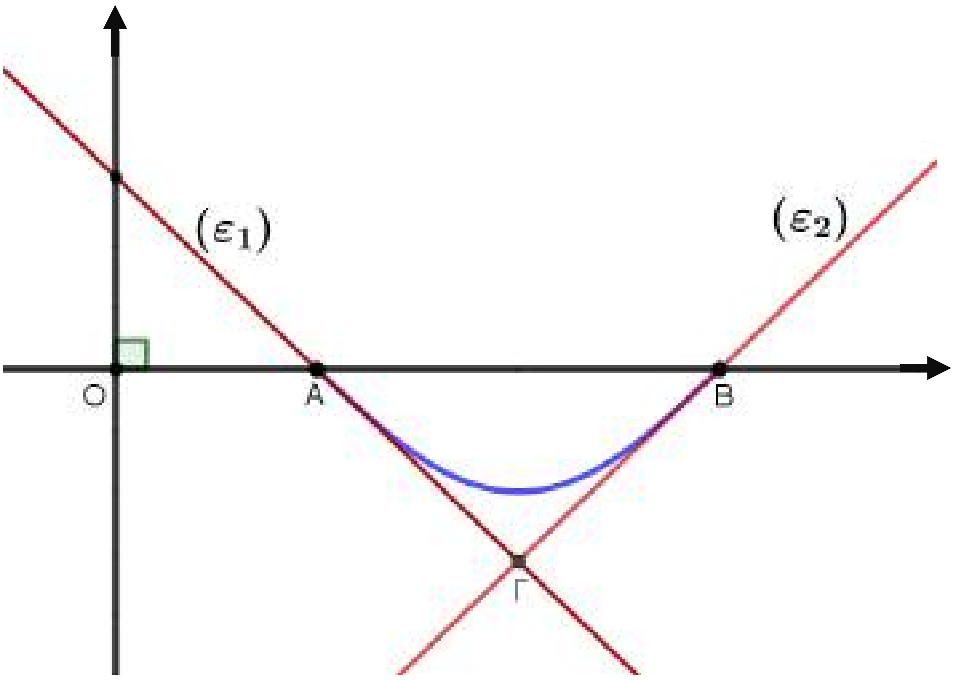
(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $y'y$ και τις γραφικές παραστάσεις των $C_f, C_g$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν σχεδιασθεί οι εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της $f$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο $\Gamma$.




α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι

$(\varepsilon_1)\ y = -x + \frac{\pi}{2}$ και $(\varepsilon_2): y = x - \frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f$ και τις ευθείες $(\varepsilon_1)$ και $(\varepsilon_2)$.

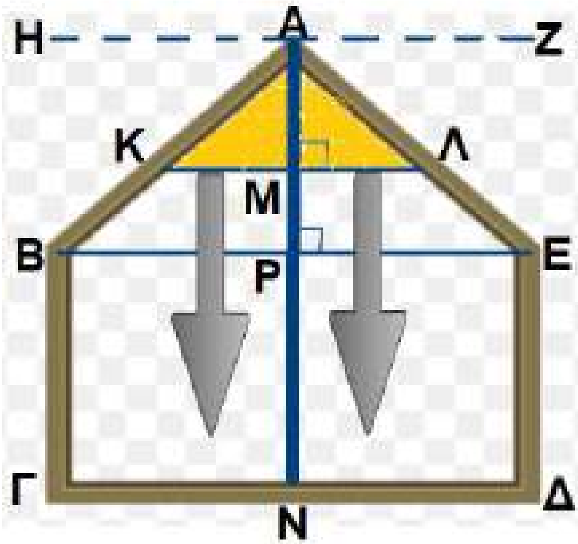
(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{f(x) + x - \frac{\pi}{2}}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο το οποίο αποτελείται από το ορθογώνιο $ΒΓΔΕ$ και το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΕ$. Είναι $ΑΡ = 0{,}8$ m, $ΒΕ = 1{,}6$ m, $ΑΜ = x$ m, $ΒΓ = 1$ m. Το ορατό κάτω μέρος $ΚΛ$ μιας ηλεκτροκίνητης σίτας, κατεβαίνει παράλληλα προς την αρχική της θέση $ΗΖ$, με σταθερό ρυθμό, ώστε το $Μ$ να διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΝ$ (με $ΑΜ \neq 0$). Αν $Ε = Ε(x)$ είναι το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα, τότε:




α) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδό $Ε$, ισχύει

$$Ε(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in \left(0, \dfrac{4}{5}\right) \\ \dfrac{8}{5}x - \dfrac{16}{25}, & \text{αν } x \in \left[\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{5}\right] \end{cases}, \text{ σε } m^2.$$

(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $Ε$ ως προς $x$, όταν $x = \dfrac{4}{5}$ m, είναι ίσος με $Ε'\left(\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{8}{5}$ $m^2/m$.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $Ε$ ως προς τον χρόνο $t$, τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $x = \dfrac{4}{5}$ m, αν δίνεται επιπλέον ότι $x'(t) = 0{,}08$ m/s για κάθε $t \geq 0$.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της $f$, να εφάπτεται της $\varepsilon: y=\frac{1}{4}$, στο $x_0=0$.
- είναι κυρτή και
- $f(1)=1$.

α) Να αποδειχθεί ότι:

i. $f(0)=\frac{1}{4}$ και $f'(0)=0$.

(Μονάδες 06)

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4f(x)-1}{\eta\mu x\cdot f(x)}=0.$

(Μονάδες 07)

β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της $f$ είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[0,1]$.

(Μονάδες 06)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό $\mathrm{E}$ του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f'$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1)=1$, $f'(1)=0$, $f(0)=f(2)$ και

$$(f'(x))^2+f(x)\cdot f''(x)<0\text{, για κάθε } x\in(0,2)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$.

(Μονάδες 5)

ii. $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$.

(Μονάδες 5)

β) Να μελετήσετε την $f$ ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την $f$ ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει ότι $f'(x)>f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x<0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x|+1)=f(|x|+1)$.

(Μονάδες 7)

δ) Αν $\mathrm{E}$ το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{E}<f(1)$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1)=1$ και $f(x)\cdot f'(x)=-x+1$, για κάθε $x\in(0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x)=-x^2+2x$ για κάθε $x\in[0,2]$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$ για κάθε $x\in[0,2]$.

(Μονάδες 6)

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της $f$ είναι ημικύκλιο με κέντρο Κ(1,0) και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 7)

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)dx$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)\eta\mu^2\left(\dfrac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0\le x<1\\ 0, & \text{αν } x=1\end{cases}$$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής.

(Μονάδες 09)

β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in[0,1]$, ισχύει $0\le f(x)\le 1-x$.

(Μονάδες 07)

γ) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό $\mathrm{E}$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$ ισχύει $\mathrm{E}<\dfrac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\ln x+x,\ x>0$

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)>x$.

(Μονάδες 8)

γ) Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x)=e^{f(|x|)}$ για κάθε $x\neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(x)=x^2e^{|x|},\ x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_g$, τον $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=-1,\ x=1$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad f(0)=1 \qquad \text{και} \qquad f(2)=5$$

τότε:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=|x^2-4|+5$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right), 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - \frac{4lnx}{x},\ x > 1 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο $1$, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $1$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η $f$ έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0, +\infty)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της $f$, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$, είναι $E = \frac{ln4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}, x > 0.$

α) Να βρείτε, με απόδειξη, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f$ έχει ολικό μέγιστο για $x = e^2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{e^2} f(x)dx$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δυο εταιρείες Ε1 και Ε2 δραστηριοποιούνται στο χώρο της γεώτρησης νερού. Η πολιτική των χρεώσεων προς τους πελάτες τους είναι διαφορετική. Η εταιρεία Ε1 χρεώνει 1500 ευρώ για την εκπόνηση της αρχικής μελέτης και 200 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μέχρι τα 15 πρώτα μέτρα. Αν δεν βρεθεί νερό μέχρι τα 15 μέτρα, τότε αλλάζει τη χρέωση από 200 σε 250 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μετά τα 15 πρώτα. Η Ε2 χρεώνει 300 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους.

α) Αν f(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία Ε1 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε:

i. Τον τύπο της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)

ii. Το ποσό που θα χρεώσει η εταιρεία Ε1 σε πελάτη που χρειάστηκε να φτάσει σε βάθος 12 μέτρων μέχρι να βρει νερό. (Μονάδες 2)

iii. Αν κάποιος πελάτης ξόδεψε για τη γεώτρησή του 5050 ευρώ, σε ποιο βάθος έφτασε; (Μονάδες 2)

β) Αν g(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία Ε2 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g. (Μονάδες 3)

γ) Σε ποιο βάθος σταμάτησαν τη γεώτρησή τους δυο γείτονες που συνεργάστηκαν με διαφορετική εταιρεία ο καθένας τους, βρήκαν νερό στο ίδιο βάθος και πλήρωσαν ακριβώς το ίδιο ποσό; (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές της μεταβλητής x (μέτρα βάθους) συμφέρει η επιλογή της εταιρείας Ε1; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται συνεχής συνάρτηση f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f^2$(x) - 5 = $x^2$ για κάθε x $\in \mathbb{R}$
- $f(2) = 3$

α) Να αποδείξετε ότι :

i. f(x) $\neq$ 0 για κάθε x $\in \mathbb{R}$. (Μονάδες 4)

ii. $\mathrm{f(x)} = \sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε x $\in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η συνάρτηση g με g(x) = $\mathrm{x}^2$– συνx, με x $\in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 7)

ii. Η εξίσωση $f^2$(x) = 5 + συνx έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα (-π,π).

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f$ (x) = lnx – x , x > 0.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς ασύμπτωτες.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln\left(\frac{x^2+3}{2x^2+1}\right)= 2 - x^2$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Με συρματόπλεγμα μήκους 400 μέτρων, έχουμε περιφράξει μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου, από τις τρείς πλευρές της, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η τέταρτη πλευρά, με μήκος $x$ μέτρα, είναι ευθυγραμμισμένη κατά μήκος της όχθης ενός ποταμού.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής συναρτήσει του μήκους $x$, δίνεται από τον τύπο: $\mathrm{E}(x) = 200x - \frac{1}{2}x^2$ με $0 < x < 400$.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την τιμή του $x$, για την οποία το εμβαδό $\mathrm{E}(x)$ της περιφραγμένης περιοχής γίνεται μέγιστο.

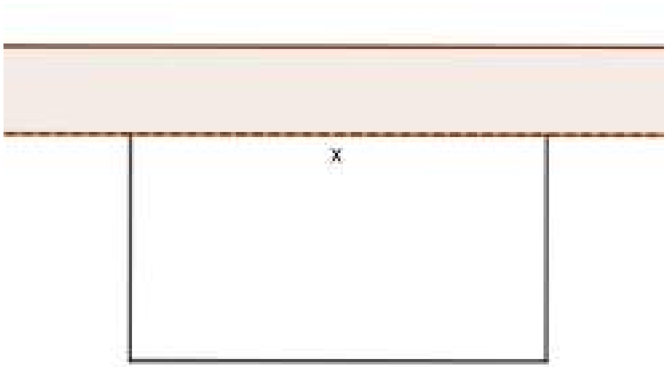
(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού $\mathrm{E}(x)$ της περιφραγμένης περιοχής.

(Μονάδες 5)

δ) Ο Ιάσονας ισχυρίζεται ότι υπάρχει μοναδική τιμή του $x$, που ανήκει στο διάστημα (0, 200) για την οποία το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής, ισούται με 300·π τετραγωνικά μέτρα. Είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός του Ιάσονα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^3 + 2x$ .

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το $R$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 5)

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

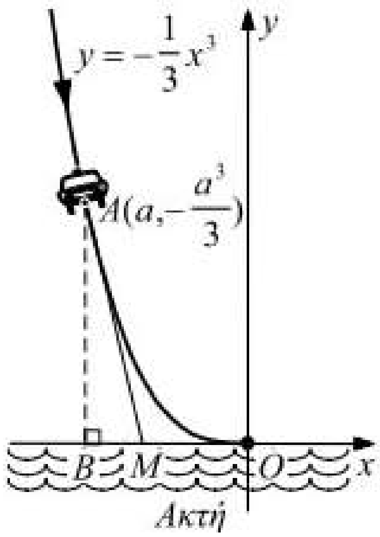
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, με $x \in (-\infty, 0]$ και τυχαίο σημείο $A\left(\alpha, -\frac{\alpha^3}{3}\right)$ με $\alpha < 0$ της γραφικής της παράστασης.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $A$.

(Μονάδες 06)

β)

i. Ένα περιπολικό $A$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα).




Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\alpha(t),$$

να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου $M$ της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή $t_0$, κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη $-3$.

(Μονάδες 08)

ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου $M$.

(Μονάδες 02)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$, που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$, τον άξονα x΄x και την εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο της με τετμημένη $-3$.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου $f'$ μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f$ τρίτου βαθμού.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 06)

β) Αν η γραφική παράσταση της $f$ διέρχεται από τα σημεία $A(0,-1)$ και $B(3,2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της $f$.

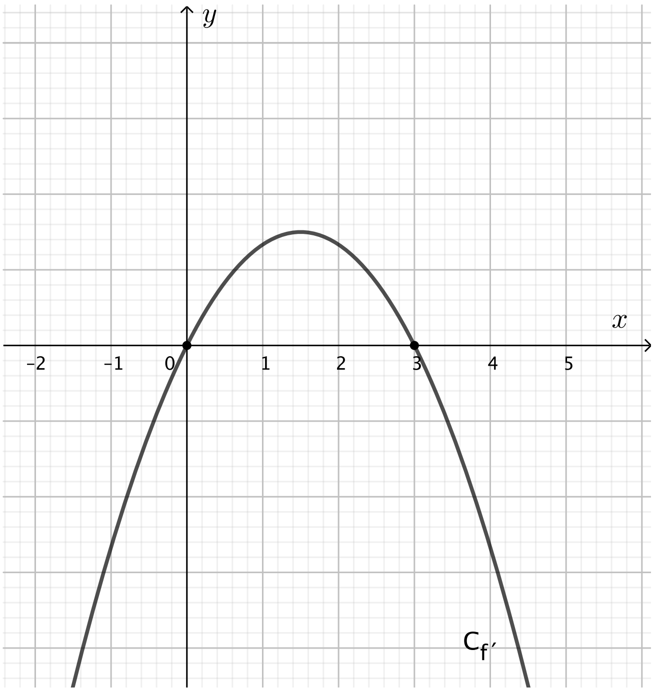
(Μονάδες 04)

γ) Να προσδιορίσετε τον τύπο της $f$.

(Μονάδες 08)

δ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, στο διάστημα $(0,3)$.

(Μονάδες 07)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x-2)e^{x} + (x-1)lnx$, x∈(0, +∝)

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f$ τέμνει τον άξονα x’x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0$ στο διάστημα (1,2).

(Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση $f'$ (Μον. 3) και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της $f$ στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια (Μον. 8)

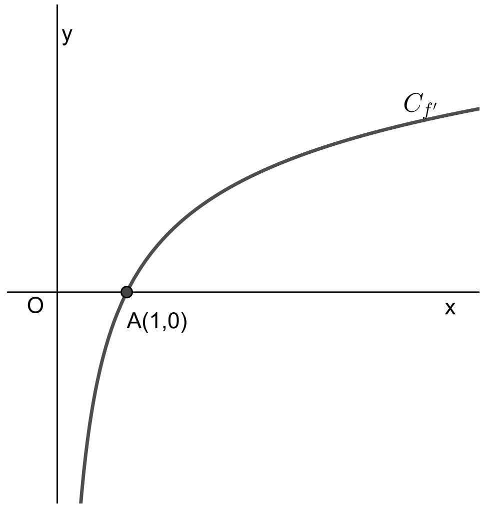
(Μονάδες 11)

γ) Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της $f$ και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον x’x στο σημείο $x_0$ του α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η $C_f$ τέμνει τον άξονα x’x σε δύο ακριβώς σημεία.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται στο (0,+ ∞) η γραφική παράσταση της παραγώγου $f'$ μιας συνάρτησης $f$ με πεδίο ορισμού το (0,+ ∞). Δίνεται επίσης ότι η $f'$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο (0,+ ∞) με $\lim_{x\to\infty} f'(x) = +\infty$.




α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f$.

(Μονάδες 09)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

1ον: «Η γραφική παράσταση της $f$ δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».

2ον: «Υπάρχει μοναδικό κ∈(0,+ ∞) τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο Μ(κ, $f(\kappa)$) να ισούται με 2».

Ποιοί από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)

γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της $f$ στο πεδίο ορισμού της; Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας. (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4

Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό $x$ των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό $y$ των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς.

Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση $y = f(x) = axe^{-\beta x}$, $x \in (0, +\infty)$ όπου $\alpha, \beta$ θετικές σταθερές, με $\beta \in (0,1)$ και $a \in (1, +\infty)$.

(α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού $x$ που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό $y$ των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο. Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού $y$;

(Μονάδες 9)

(β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά.

(Μονάδες 7)

(γ) Θεωρούμε συνάρτηση $F$ η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης $f$. Να αποδείξτε ότι $F(\beta) - F(2\beta) = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{2\beta^2+1-(1+\beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας $T$ (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου $t$ (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση $T(t) = E + (T_0 - E)e^{-kt}$ όπου:

- $E$ είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E < T_0$.
- $T_0 = T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- $k$ είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίστε το $\lim_{t \to +\infty} T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι $T'(t) = k[E - T(t)]$.

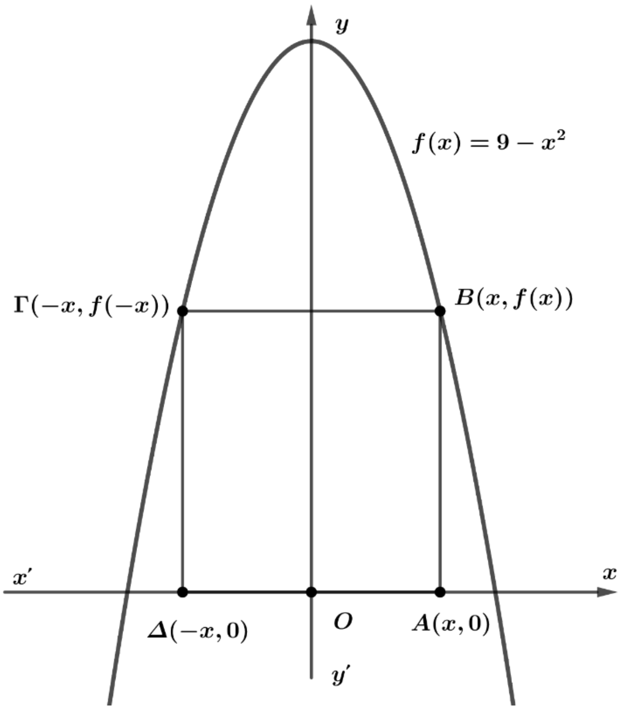
(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (E - T(t)) \cdot ln(T(t))dt$ ισούται με $\frac{2e^3 - 3e^4}{k}$ αν είναι $T(0) = e^4$ και $T(1) = e^3$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 9 - x^2$ . Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα $x'x$ είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Οι κορυφές Α(x,0) και Δ(-x,0) είναι σημεία του άξονα $x'x$, ενώ οι κορυφές $B(x, f(x))$ και $Γ(-x, f(-x))$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.




α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του $x \in [0,3]$ δίνεται από την συνάρτηση $E(x) = 18x - 2x^3$. (Μονάδες 6)

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E(x)$ ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 6)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , του άξονα $x'x$ και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \\ e^{x-2} - 2, & x \geq 2 \end{cases}$ και

$g: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

i. τη συνάρτηση $f$ και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. τη συνάρτηση $g$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 14)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της $f$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της $g$ για κάθε $x \neq 2$. (Μονάδες 04)

γ) Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο $x_0$, τότε και $\lim_{x \to x_0} f(x) > \lim_{x \to x_0} g(x)$.»

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = lnx, x > 0$ και τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,3)$.

α)

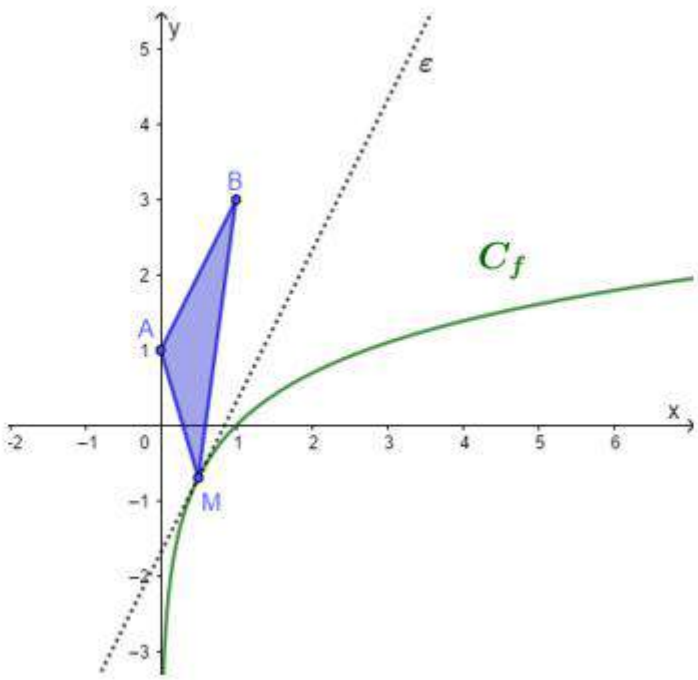
i. Να βρείτε σημείο $M_0$ της $C_f$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία $AB$.

(Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο $M_0$.

(Μονάδες 02)

β) Έστω $E(x) = \frac{1}{2}(2x + 1 - lnx), x > 0$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου $ABM$, όπου $M$ ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της $f$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο $M$ ταυτίζεται με το $M_0$ του α) ερωτήματος.




(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M_1$ της $C_f$ με τετμημένη $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο $ABM_1$ να είναι ορθογώνιο στην κορυφή $A$.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\frac{x^2}{2}+2023, x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 05)

ii. το σύνολο τιμών της $f'$ είναι το $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού $\alpha$, η εξίσωση $e^x+x=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα $\rho$.

(Μονάδες 05)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού $\alpha$, η συνάρτηση $g(x)=\alpha x-f(x)$ με $x\in\mathbb{R}$, έχει μέγιστη τιμή την $\rho f'(\rho)-f(\rho)$.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-3)(x-\lambda)(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ με $1<\lambda<3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε η συνάρτηση $f$ έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

(Μονάδες 08)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(x)=-f(4-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x)dx$.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\lambda x+1}}, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ , $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$ . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f. (Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

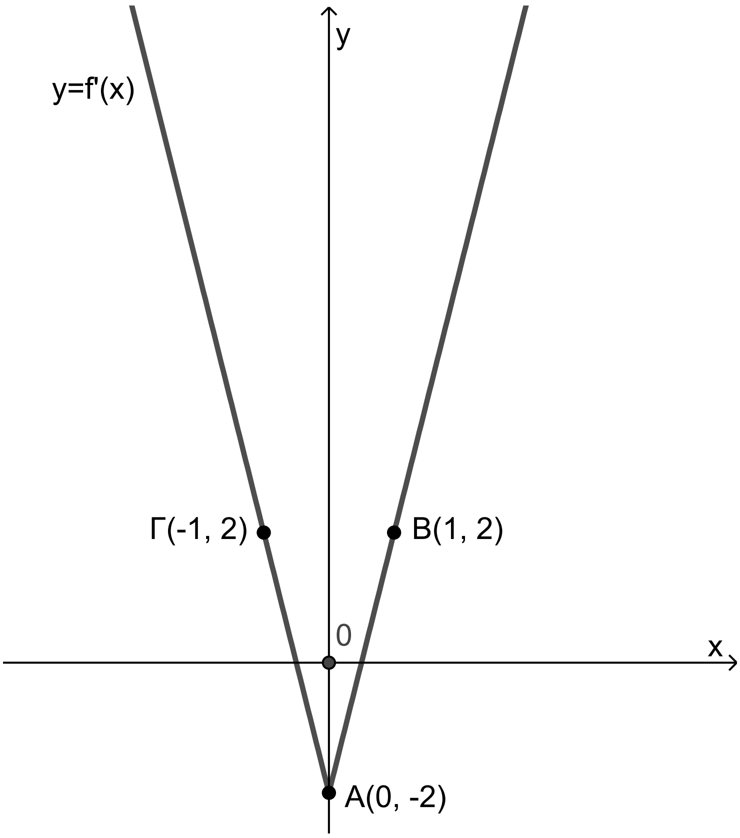
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η γραφική παράσταση $C$ της παραγώγου $f\,'$, είναι οι δύο ημιευθείες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Αυτές έχουν κοινή αρχή το σημείο $A(0\,,-2)$ και διέρχονται η μία από το σημείο $B(1\,,2)$ και η άλλη από το $\Gamma(-1\,,2)$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της $C$ με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 6)

γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της $f$. (Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η γραφική παράσταση της $f$ διέρχεται από το σημείο $\Delta(1,0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $A\Delta$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της $f$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία έχει τοπικό ελάχιστο το $f(2) = -32$. Οι γραφικές παραστάσεις της f και της παραγώγου $f'$ τέμνονται στο σημείο $A(-2\,,0)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της $C_f$ στα σημεία με τετμημένες:

i. $x_1 = 2$, (Μονάδες 5)

ii. $x_2 = -2$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται επιπλέον ότι η $f'$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση 2ου βαθμού και η γραφική παράσταση της $f'$ διέρχεται από το σημείο $B(0\,,-12)$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x) = 3x^2 - 12$, (Μονάδες 4)

ii. $f(x) = x^3 - 12x - 16$, (Μονάδες 5)

iii. η εξίσωση $f(x) = -20$ έχει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Έστω μια συνάρτηση $f:(-\infty\,,0)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=-x+1$. Δίνεται ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1\,,f(-1))$, έχει εξίσωση $y=g(x)$.

α) Να βρείτε το $f(-1)$ και το $f\,'(-1)$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $\mathrm{fog}$ και $\mathrm{gof}$, (Μονάδες 6)

ii. τις παραγώγους $(\mathrm{fog})'(2)$ και $(\mathrm{gof})'(-1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_{\mathrm{fog}}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_1=2$ και η εφαπτομένη της $C_{\mathrm{gof}}$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0=-1$, ταυτίζονται. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ έχει τις κορυφές $Α$ και $Δ$ πάνω στον άξονα $x'x$ και τις κορυφές $Β$ και $Γ$ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ , $x < 1$ και $g(x) = \frac{e}{x}$, $x > 1$, αντίστοιχα. Έστω $Α(α\,,0)$ με $α < 1$.

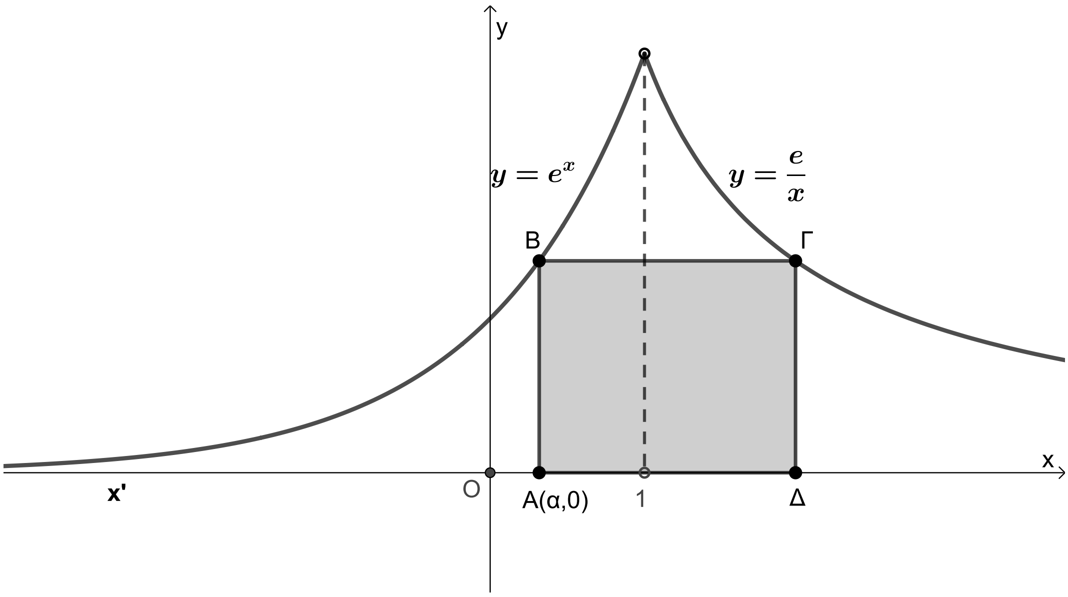
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η τετμημένη της κορυφής $Δ$ είναι $x_Δ = e^{1-α}$ , (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ είναι $Ε(α) = e - αe^α$, $α < 1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ . (Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του α, για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$ γίνεται ίσο με $1$. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)(x-1)}{lnx} = 0 \ \text{ και}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2+1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α)

i. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \to 1} \frac{lnx}{x-1}$$

(Μονάδες 03)

ii. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

(Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 06)

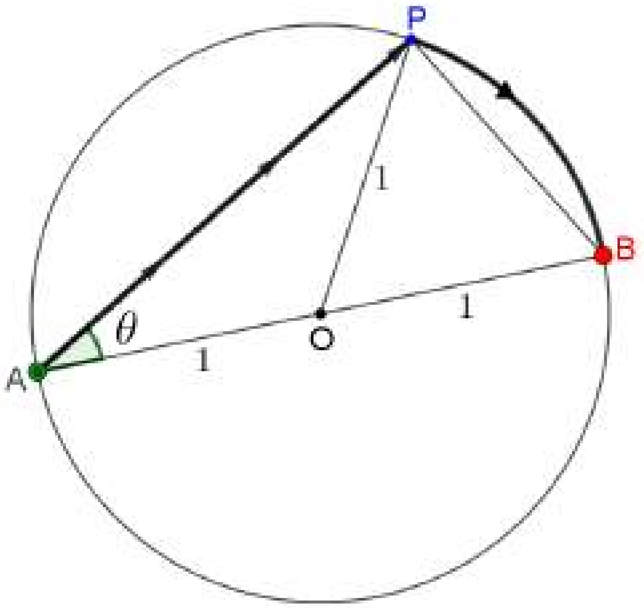
δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου $E$, που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$, τον άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4

Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο Α μια κυκλικής λίμνης ακτίνας $1\ Km$ και θέλει να φτάσει στο σημείο Β της λίμνης ώστε η $AB$ να είναι διάμετρος του κύκλου. Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων: να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $AP$ έχοντας ταχύτητα $3\ Km/h$ και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου $PB$ με ταχύτητα $6\ Km/h$.

Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $P\hat{A}B$ είναι $\theta\ rad$.




α) Να αποδείξετε ότι $(AP) = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το Α στο Β είναι $f(\theta) = \frac{1}{3}\cdot(2\sigma\upsilon\nu\theta + \theta),\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta$ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος.

(Μονάδες 10)

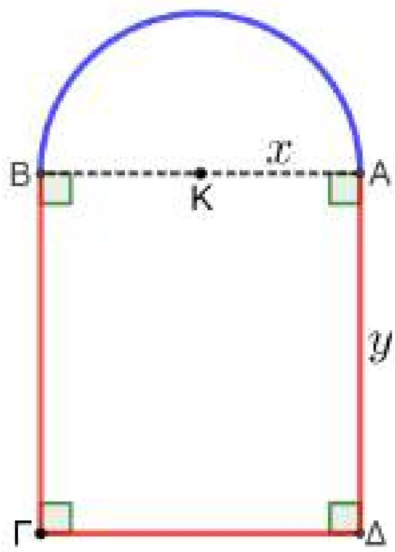
γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$.

(Μονάδες 7)

Δίνονται: το μήκος $S$ ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $x\ rad$ σε κύκλο ακτίνας $R$, είναι $S = x\cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) x (ταχύτητα).

ΘΕΜΑ 4

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με $4\ m$, αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(AK) = x\ m$ και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(AΔ) = y\ m$. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.




α) Να αποδείξετε ότι $y = -\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2$ και $E(x) = -\frac{\pi+4}{2} \cdot x^2 + 4x$, με $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου.

(Μονάδες 9)

γ) Ονομάζουμε $x_0$ την τιμή του $x$ που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{ln(E(x))}{E(x) - E(x_0)}$.

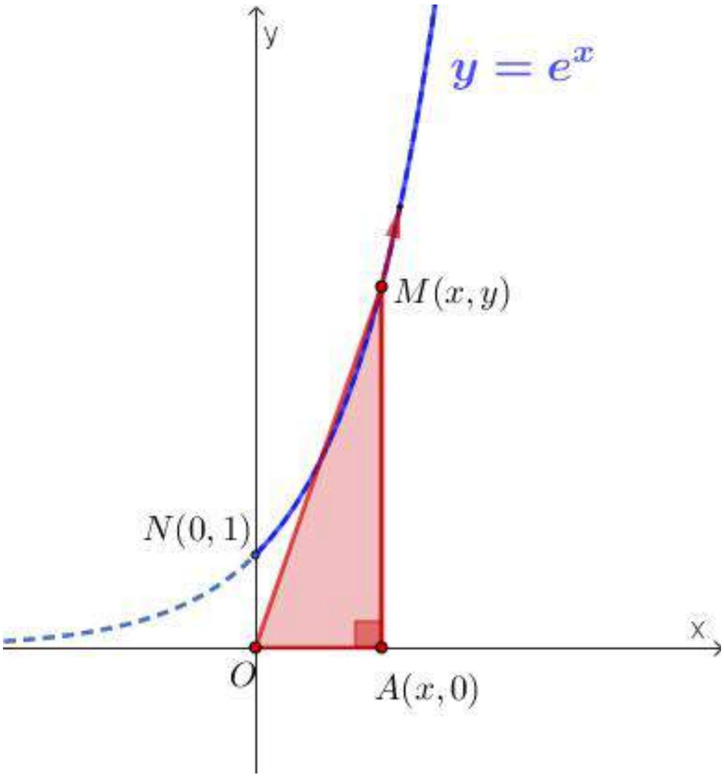
(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2, x \in (0, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$.

(Μονάδες 08)

β) Ένα κινητό Μ ξεκινά από το σημείο $\mathrm{N}(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x,\ x \geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2cm/sec$.




i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E$ του τριγώνου ΟΑΜ, όπου $O(0,0), A(x, 0)$ και $M(x, y)$ είναι $E(x) = \frac{1}{2}xe^x,\ x \geq 0$.

(Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή $t_0$, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E$ είναι $3e^2 cm^2/sec$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση $f$ στο διάστημα [-3,2], η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της $f$,η $C_{f'}$, που στο διάστημα (-1,2] είναι ευθύγραμμο τμήμα.

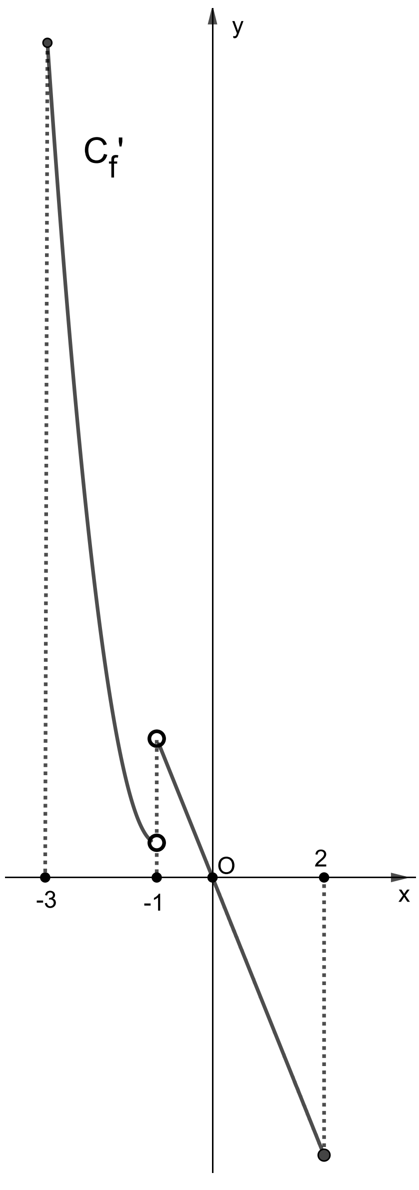
α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία της. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε:

i. Τα κρίσιμα σημεία της $f$, αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 06)

ii. Τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους. (Μονάδες 05)

γ) Αν η $f'$ είναι συνεχής στο [0,2] και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x)dx = -4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$. (Μονάδες 06)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται της $C_f$ στο σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

(Μονάδες 04)

ii. Η $C_f$ έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y=x$ τα οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 06)

β) Για τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)-x=\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η $y=x$ είναι ασύμπτωτη της $C_g$ στο $+\infty$.

(Μονάδες 05)

ii. Στο διάστημα $(0,+\infty)$, η $C_g$ βρίσκεται πάνω από την $y=x$.

(Μονάδες 04)

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g$ του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της $f$.

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $g:[-96,96]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=e^{\frac{x}{96}}+e^{-\frac{x}{96}}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 12)

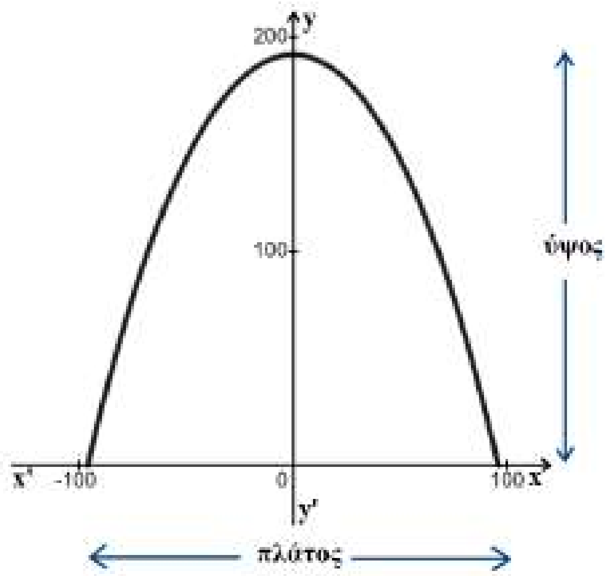
β) Αν $\alpha>0$ και $f(x)=2\alpha\left[g(96)-g(x)\right]$, $x\in[-96,96]$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(-96,96)$.

(Μονάδες 06)

ii. Να προσδιορίσετε τον αριθμό $\alpha$ όταν επιπλέον, είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, παριστάνει την αψίδα του Σεντ Λούις η οποία έχει την ιδιότητα το πλάτος της να ισούται με το ύψος της.

(Μονάδες 07)



ΘΕΜΑ 4

Η συνάρτηση $x(t)=(t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού Α, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

α) i. Να βρείτε πότε το κινητό Α είχε ταχύτητα μηδέν.

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά.

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε το συνολικό διάστημα $S$ που διήνυσε το κινητό Α.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού Α, από τη χρονική στιγμή 1 sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του Α ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το Α στο διάστημα αυτό.

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε:

$$f'(0)=f(0)=0 \text{ και } \int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx=-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx$.

(Μονάδες 07)

β) $f(\pi)=0$.

(Μονάδες 08)

γ) Στο διάστημα $(0,\pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

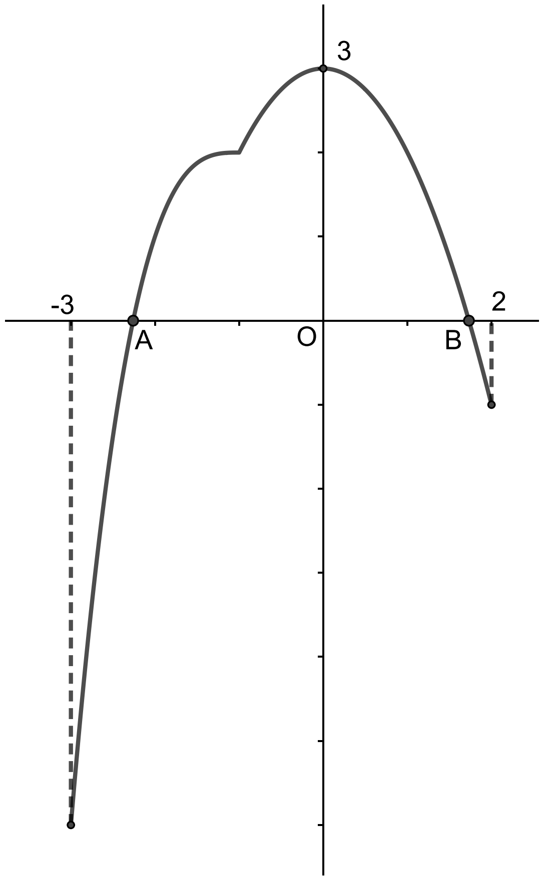
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f$ στο διάστημα [-3,2] η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το 3 και τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία Α και Β. Έστω $g$ η συνάρτηση με $g(x) = f(x) + x$, $x \in [-3,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής στο [-3,2]. (Μονάδες 05)

ii. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. (Μονάδες 10)

β) Αν η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2), να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g$, στο σημείο που η $f$ παρουσιάζει μέγιστο, έχει εξίσωση $y = x + 3$ . (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση $f$ με $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1, x < 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 1, x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $f$ έχει δύο ακριβώς ρίζες τις $x_1, x_2$ με $x_1 < 0$ και $x_2 > 3$.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f$ ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με $x_1, x_2$ οι ρίζες της $f$ του ερωτήματος α). (Μονάδες 04)

ii. Να βρείτε όλα τα $\xi \in (x_1, x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

(Μονάδες 04)

γ) Αν ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο με τετμημένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f$, την ευθεία ε και την ευθεία x=0. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση $f$ με $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η $f$ παρουσιάζει στο $x_1 = 0$ τοπικό ελάχιστο, στο $x_2 = 2$ μέγιστο και το σημείο $\Gamma(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της $C_f$.

(Μονάδες 09)

ii. Τα σημεία$\mathrm{A}(x_1, f(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2, f(x_2)$ και $\Gamma(x_3, f(x_3)$ είναι συνευθειακά και το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ ορίζει με τη γραφική παράσταση της $f$ δύο ισεμβαδικά χωρία. (Μονάδες 08)

γ) Έστω ε η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο της Β, η οποία τέμνει τον άξονα y'y στο Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της $C_f$, της ευθείας ε και του άξονα y'y. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, με $x\neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η $f$ αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντιστρόφου.

(Μονάδες 9)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ f$ .

(Μονάδες 6)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις $f\circ f$ και $f^{-1}$ είναι ίσες. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $\varphi(x)=(f\circ f)(x)=\dfrac{x-1}{x}$ με $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \varphi(x)dx$ .

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x\neq 0$ ισχύει:

$$xf(x)+\sigma\upsilon\nu x=1-x^2\eta\mu\frac{1}{x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

(Μονάδες 4)

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{\pi},+\infty\right)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f : (0, 1) ∪( 1, +∞) → ℝ με f(x) = $\frac{x}{\ln x}$ .

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x\to 0} f(x)$ , $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ , $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ και $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ (Μονάδες 6)

β)

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται η εξίσωση $e^x = x^a$ (1) με x >0. Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση f(x) = α και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης αυτής, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$, $x \in R$ και $g(x) = e^{-x}$ με $x \in R$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in R$.

(Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x > 0$. Η παράλληλη ευθεία από το $B$ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα $Oy$ στο σημείο $\Delta$, ενώ η παράλληλη ευθεία από το $\Gamma$ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα $Oy$ στο σημείο $Z$.

(i) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ είναι $E(x) = \frac{x^3}{e^x}$, $x > 0$.

(Μονάδες 6)

(ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $x$, το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \frac{f(x)-g(x)}{x}$, τον άξονα $x'x$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x = ln2$ και $x = 1$, είναι $ln\sqrt{2e} - \frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f$ με $f(x) = \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ με $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και ότι η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $ln(1 + f(x)) - \ln\big(f(x)\big) > f^2(x) \cdot f(ln2)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της $f$, τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$ είναι $ln\left(\frac{27}{4e}\right)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+5x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_o$ που περιέχεται στο διάστημα (0, 1).

(Μονάδες 5)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός $x_o$ είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1.

(Μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x_o+\theta)x^3+2x-5}{f(x_o-\theta)x-5}$, αν $x_o$ είναι ο αριθμός του ερωτήματος (α) και θ ένας θετικός αριθμός.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση $C_f$ της f, την εφαπτομένη της στο σημείο Α(1, 4) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4-\frac{4}{x^2}$, $x\neq 0$.

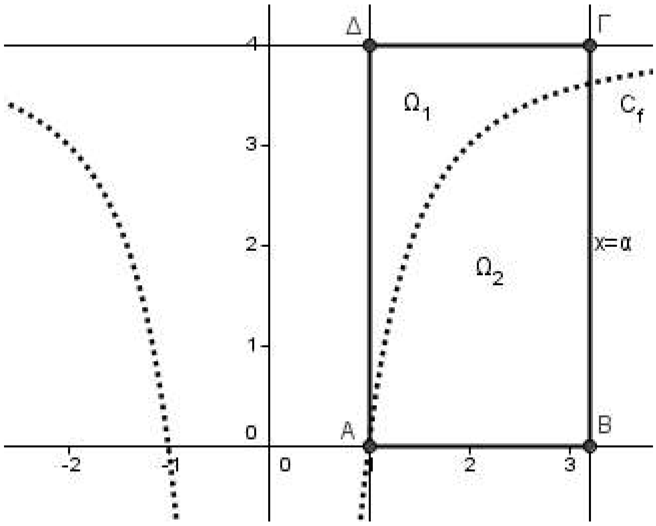
α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης $C_f$ της f.

(Μονάδες 9)

β) Αν οι εφαπτόμενες της $C_f$ στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1x_2=-4$.

(Μονάδες 6)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο ΑΒΓΔ που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\alpha$, $\alpha>1$ και $y=4$. Η $C_f$ χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία $\Omega_1$, $\Omega_2$.



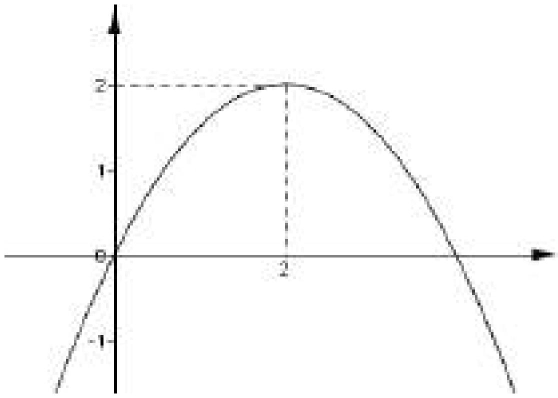

i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α, τα εμβαδά $E(\Omega_1)$, $E(\Omega_2)$ των χωρίων.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1)=E(\Omega_2)$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4




Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο Κ(2, 2) και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x,\ x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον ά-ξονα y΄y στο σημείο A(0, 1), να αποδείξετε ότι

$$f(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2+1$$

(Μονάδες 6)

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση

$$g(x)=x^2+x+1-\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$$

γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x>0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις $C_f$, $C_g$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\pi$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$.

α) Να μελετήσετε την $f$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023}>2023^{2022}$.

(Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε την $f$ ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 6)

δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την $f$ σε καθένα από τα διαστήματα $[2021,2022]$ και $[2022,2023]$ να αποδείξετε ότι $2f(2022)<f(2021)+f(2023)$.

(Μονάδες 7)

Δίνεται $e\simeq 2,71$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x$. Να αποδείξετε ότι

α) η $f$ είναι κυρτή.

(Μονάδες 6)

β) η $f$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_o \in (\frac{1}{2},1)$ το οποίο είναι μοναδικό.

(Μονάδες 7)

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_o}+x_o$ .

(Μονάδες 6)

δ) η εξίσωση $f(x)=2$ είναι αδύνατη.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x} & , \quad x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi] \\ 1 & , \quad x=0 \end{cases}$

και $\phi(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in[-\pi,\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η $\phi$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi,\pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της.

(Μονάδες 10)

β) Να μελετήσετε την $f$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

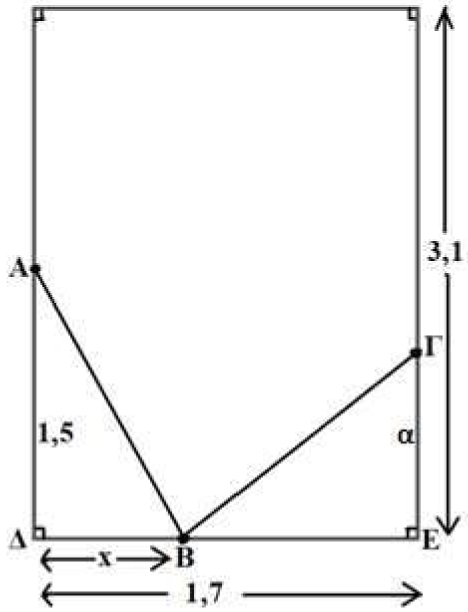
(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in(-\pi,\pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa}\phi(x)dx=0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Ένα γαλλικό μπιλιάρδο έχει μήκος $3{,}1$ μέτρα και πλάτος $1{,}7$ μέτρα. Ένας παίκτης χτυπάει την άσπρη μπάλα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να χτυπήσει πρώτα στο σημείο Α, μετά να κινηθεί ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Β και από εκεί να συνεχίσει ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Γ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνονται τα μήκη $\Delta\mathrm{B} = x$, $\Delta\mathrm{E} = 1{,}7$, $\mathrm{A}\Delta = 1{,}5$, $\Gamma\mathrm{E} = \alpha$ και $L = \mathrm{AB} + \mathrm{B}\Gamma$ που εκφράζονται σε μέτρα.




α) Να αποδείξετε ότι $L = L(x) = \sqrt{x^2 + 2{,}25} + \sqrt{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται ακόμη ότι το $L$ γίνεται ελάχιστο μόνο όταν το Β απέχει $1{,}02$ μέτρα από το Δ.

i. Αν $L'(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 + 2{,}25}} - \sqrt{\dfrac{(1{,}7 - x)^2}{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2}}$, $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$ να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

(Μονάδες 10)

ii. Αν $L''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{17}{10}\right)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1{,}02} \dfrac{1}{L'(x)}$, εφόσον υπάρχει.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2-4x+6)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ στο σημείο της Μ$(0, f(0))$.

(Μονάδες 5)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x)\geq 2x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1\,, & -1 \leq x < 1 \\ 1 + \frac{(lnx)^2}{x}\,, & x \geq 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f$.

(Μονάδες 7)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$. Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = lnx + 1 - \frac{1}{x}$ , $x > 0$ και $g(x) = \ln(lnx)$ , $x > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η $f$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.

(Μονάδες 7)

β) Έστω $(\varepsilon)$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $g$ στο σημείο $T(e, g(e))$. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της $f$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη της $(\varepsilon)$.

(Μονάδες 8)

γ) Υποθέτουμε ότι $g(x) < f(x)$ για κάθε $x > 1$. Ένα σημείο $M(x, 0)$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $2\, cm/sec$ πάνω στον θετικό ημιάξονα, προς τα δεξιά. Θεωρούμε τα σημεία $B\big(x\ , f(x)\big)$, $\Gamma(x\ , g(x))$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $OB\Gamma$ τη χρονική στιγμή που το $M$ βρίσκεται στη θέση $(e^2, 0)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Για μια συνεχή συνάρτηση $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύουν:

- $(f(x)+x)^2=x^2(x+1)$, για κάθε $x\in[-1,+\infty)$,
- $f(1)>-1$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}$.

α) Αν $g(x)=f(x)+x$, $x\in[-1,+\infty)$ τότε

i. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x)=0$.

(Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\left(\sqrt{x+1}-1\right)$, $x\geq -1$.

(Μονάδες 07)

γ) Αν η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x)=f(x+1)-f(x)$, $x\in(-1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι

$$\int_{2023}^{2024}\left(f(x+1)-f(x)\right)dx<\int_{2023}^{2024}\left(f(x+2)-f(x+1)\right)dx.$$

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\dfrac{e}{x}-\ln x$ .

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g$ ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x)=x\ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x=1$ .

(Μονάδες 06)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+x}{e-x\ln x-ex}$ .

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$ .

(Μονάδες 06)

ii. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$ .

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ αντιστρέφεται.

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο της $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2}, \pi+1\right)$.

(Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x+1$ εφάπτεται της $C_f$ σε άπειρα σημεία.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι:

i. $|f'(x)| \le 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 3)

ii. $|f(\beta) - f(\alpha)| \le 3|\beta - \alpha|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$.

(Μονάδες 4)

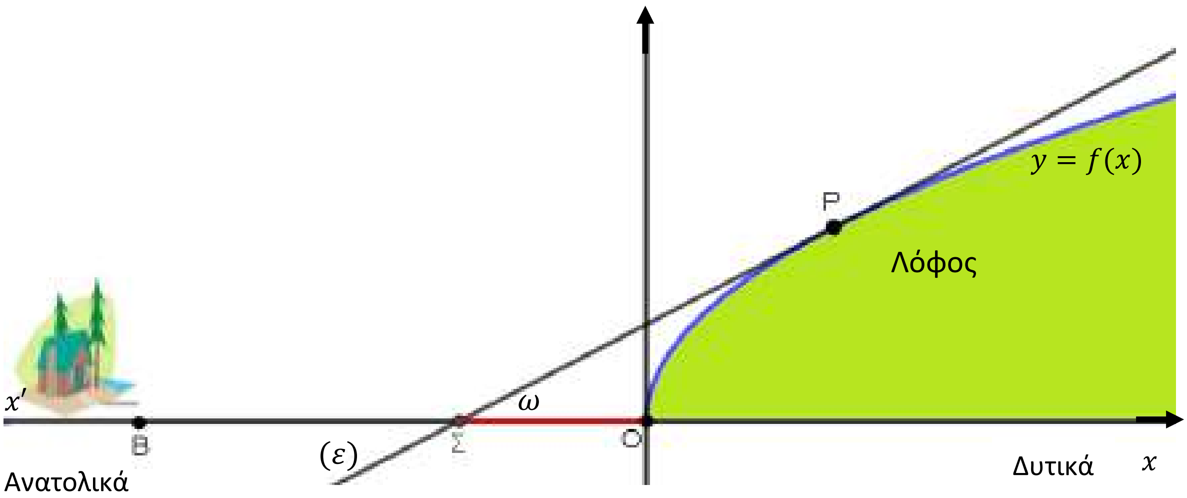
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο απεικονίζεται μια αγροικία στην θέση $B$ του αρνητικού ημιάξονα $Ox'$. Δυτικά της αγροικίας, κατά μήκος του θετικού ημιάξονα $Ox$, υπάρχει ένας λόφος, το ύψος του οποίου δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ για $x \geq 0$. Όλες οι συντεταγμένες μετρούνται σε μέτρα.

Καθώς ο ήλιος αρχίζει να δύει, ο λόφος ρίχνει στην πεδιάδα την σκιά του $O\Sigma$, η οποία και μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου $t$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Θεωρούμε $t = 0$ τη στιγμή που ο ήλιος ρίχνει κάθετα τις ακτίνες του στο σημείο $O$ του λόφου, ενώ στη συνέχεια κινούμενος προς τα δυτικά, αρχίζει να δημιουργείται η σκιά.

Ας είναι $\widehat{\omega} = P\widehat{\Sigma}O$.




α) Αν το σημείο $P$ έχει συντεταγμένες $P(x_P, y_P)$, να αποδείξετε ότι η τετμημένη του σημείου $\Sigma$ είναι $x_\Sigma = -x_P$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ ισχύει $\varepsilon\varphi\big(\omega(t)\big) = \frac{1}{2}\big(x_P(t)\big)^{-\frac{1}{2}}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε πόσο γρήγορα μεγαλώνει η σκιά $(O\Sigma)$ τη χρονική στιγμή $t_0$ κατά την οποία οι ακτίνες του ήλιου σχηματίζουν γωνία $\omega = \frac{\pi}{6}$ με τον οριζόντιο άξονα, ενώ αυτή τη χρονική στιγμή $t_0$ η γωνία $\omega$ μειώνεται με ρυθμό $\frac{1}{16} rad$ ανά λεπτό.

(Μονάδες 10)

Δίνεται ότι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = 1 + \varepsilon\varphi^2\omega$.

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0,\pi]$ ισχύει $e^x + \eta\mu x \geq 1$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = x - ln(e^x + \eta\mu x)$, $x \in [0,\pi]$, είναι μια αρχική (παράγουσα) της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x + \eta\mu x}$, $x \in [0,\pi]$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi x f'(x) dx = \frac{\pi}{e^\pi}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξτε ότι $\int_1^e \frac{1}{(e^x + \eta\mu x)\cdot x} dx < 1$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ και το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$. Αν $\mathrm{K}(x,\ln x)$ με $x>0$ τυχαίο σημείο της $C_f$ και $\mathrm{M}(x_o,\ln x_o)$ με $x_o>0$ το σημείο εκείνο της $C_f$ που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $\mathrm{A}$, να αποδείξετε ότι:

α) η απόσταση $\mathrm{AK}$ συναρτήσει του $x>0$ είναι $d(x)=\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}$.

(Μονάδες 5)

β) $x_o^2+\ln x_o-2=0$.

(Μονάδες 7)

γ) η εφαπτομένη της $C_f$ στο Μ

i. είναι κάθετη στην ΑΜ.

(Μονάδες 6)

ii. τέμνει τον άξονα $xx'$ στο σημείο $(x_o^3-x_o,0)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς και γνησίως αύξουσας συνάρτησης $f$ με πεδίο ορισμού το $[0,1]$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$. Το χωρίο Ω περικλείεται από τον άξονα $yy'$ την ευθεία $y=1$ και τη γραφική παράσταση της $f$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$.

(Μονάδες 5)

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα και σχεδιάσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της $f^{-1}$.

(Μονάδες 5)

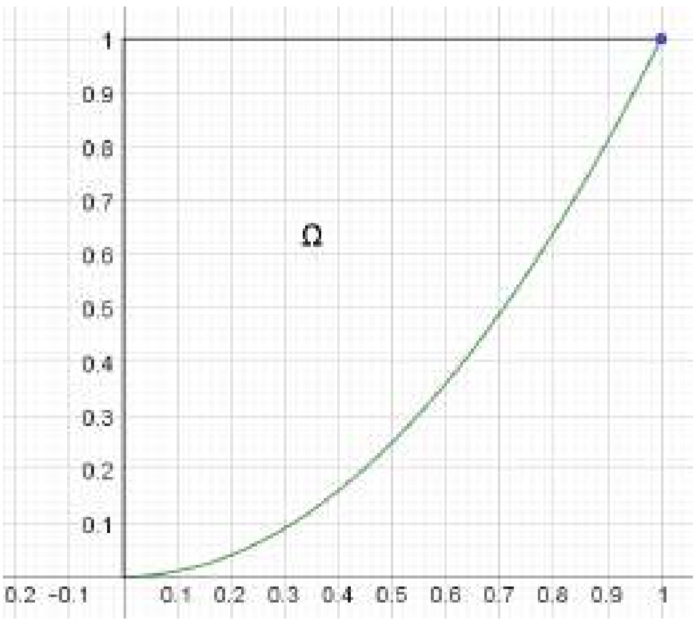
γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 5)

δ) Αν θεωρήσουμε ότι η $f^{-1}$ είναι συνεχής αξιοποιώντας το παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι

i. $\int_0^1 f^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx$. (Μονάδες 5)

ii. $\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$, όπου $\mathrm{E}(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Έστω $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x dx$ και $J=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2 x dx$.

α) Να αποδείξετε ότι $I+J=\frac{\pi^2}{4}$.

(Μονάδες 6)

β) Με χρήση της αντικατάστασης $u=\frac{\pi}{2}-x$ να αποδείξετε ότι $I=J$ και κατόπιν ότι $I=J=\frac{\pi^2}{8}$.

(Μονάδες 7)

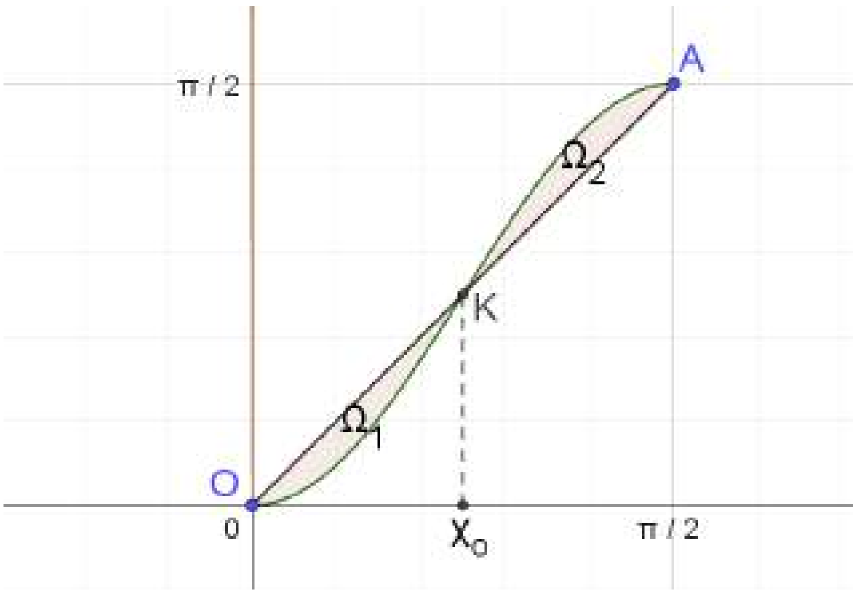
γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f(x)=\frac{\pi}{2}\eta\mu^2 x$ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Η ευθεία ΟΑ τέμνει τη $C_f$ στα σημεία $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $\mathrm{K}(x_o, f(x_o))$ και ορίζει με τη $C_f$ τα χωρία $\Omega_1,\Omega_2$. Να αποδείξετε ότι :

i. το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της $C_f$, του άξονα $yy'$ και της ευθείας $y=\frac{\pi}{2}$ είναι το $J$.

(Μονάδες 6)

ii. τα εμβαδά των χωρίων $\Omega_1,\Omega_2$ είναι ίσα .

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Έστω f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(0)=1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)+2x=f'(x)+x^2$$

α) Να αποδείξετε ότι αν $g(x)=f(x)-x^2$, τότε ισχύει

i. $g'(x)=g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 5)

ii. $f(x)=e^x+x^2$, $x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

i. Υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_o, f(x_o))$, $x_o \in (-1, 0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της $C_f$ είναι οριζόντια.

(Μονάδες 7)

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o$ και για την ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης ισχύει $e^{-1}<m<2$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln^2 x$ και $g(x)=\ln x$ με κοινό πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

α) Να μελετήσετε την f

i. ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 4)

ii. ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 4)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτές της $C_f$ και να σχεδιάσετε τις $C_f, C_g$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

(Μονάδες 8)

γ) i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_g$.

(Μονάδες 4)

ii. Η ευθεία $x=\alpha, 1<\alpha<e$ τέμνει τις $C_f, C_g$ στα σημεία Α, Β. Να βρείτε για ποια τιμή του α το μήκος του τμήματος ΑΒ γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου βενζίνης αφήνεται ανοιχτό τη χρονική στιγμή $t=0$. Η βενζίνη που απομένει μέσα στο δοχείο συναρτήσει του χρόνου $t$ (σε εβδομάδες) δίνεται από τη συνεχή συνάρτηση $g(t)$ (σε λίτρα).

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t\cdot\ln\frac{4}{5}dt$.

(Μονάδες 06)

β) Αν η βενζίνη του δοχείου έχει ρυθμό εξάτμισης που δίνεται από τον τύπο $g'(t)=5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t\cdot\ln\frac{4}{5}$, για κάθε $t>0$, τότε να βρείτε τον όγκο της βενζίνης που περιέχει το δοχείο δυο εβδομάδες μετά το άνοιγμα του καπακιού του δοχείου.

(Μονάδες 12)

γ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες είναι η $g(t)=5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t$, $t\in[0,+\infty)$ τότε να διαπιστώσετε ότι καθώς ο χρόνος αυξάνεται απεριόριστα μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{x}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x},\ \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

(Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον ισχύει $(x+1)f'(x)\cdot\ln(x+1)=-f(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\ln(x+1)$, $x>0$ είναι σταθερή.

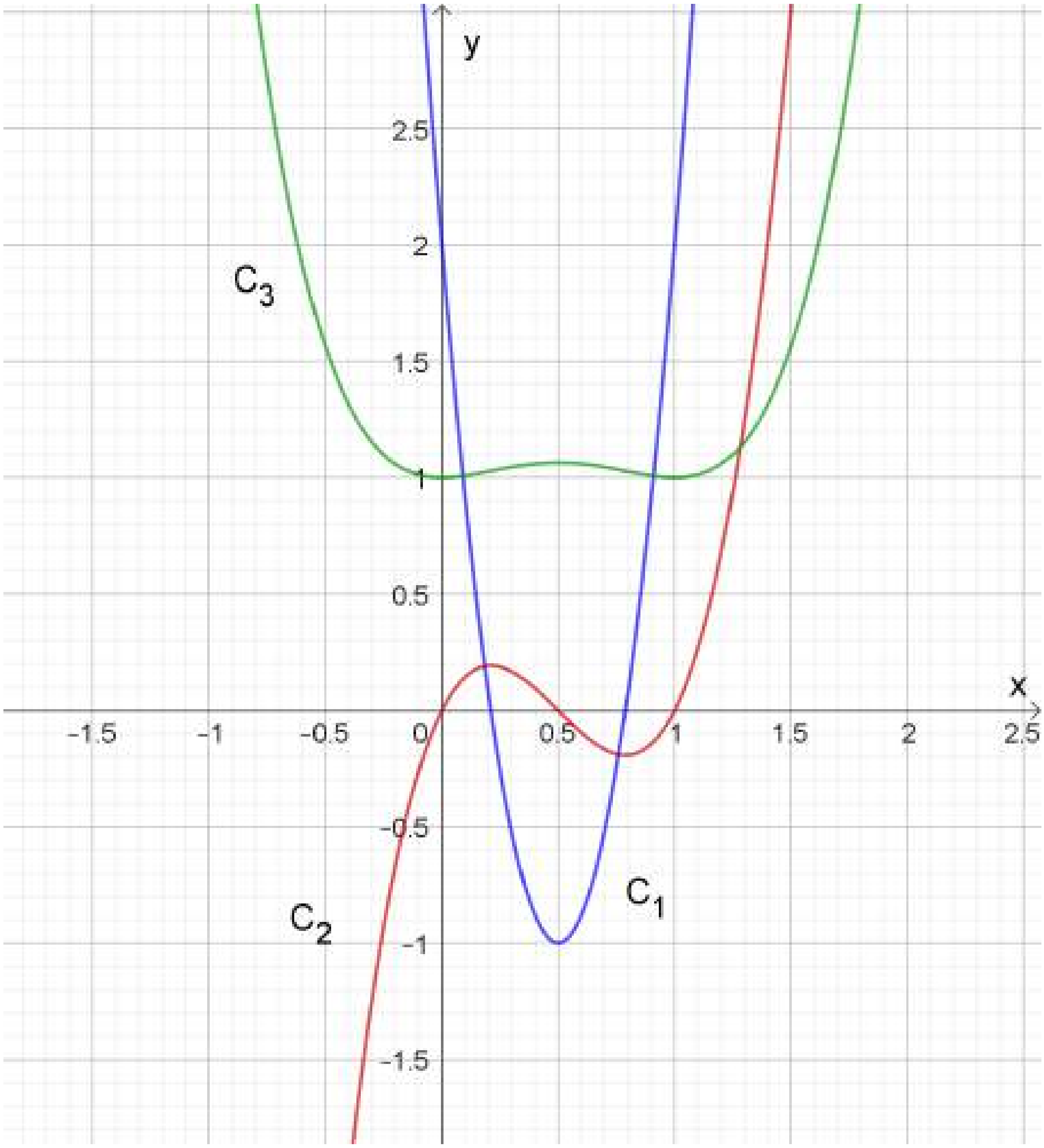
(Μονάδες 08)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\frac{\ln(x+1)}{x}\le g(x)\le\ln(x+1)+\frac{\ln(x+1)}{x}$ και έπειτα να βρείτε τον τύπο της $f$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις $C_1$, $C_2$, $C_3$ τριών συναρτήσεων $f$, $f'$ και $F$, όπου $F$ μία αρχική της $f$ στο $\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι η $C_3$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $1$ ενώ η $C_2$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακόμη σημεία με τετμημένες $\frac{1}{2}, 1$. Με δεδομένο ότι ο τύπος της $f$ είναι $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η $C_2$,



α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, τη συνάρτηση $F$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 7)

β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση $C_3$ αντιστοιχεί στην συνάρτηση $F$ .

ς(Μονάδες 6)

γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $f'$ και $F$ .

(Μονάδες 6)

δ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ .

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το O(0,0), δίνεται το σημείο $\mathrm{M}(1,1)$. Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το Μ τέμνει τους θετικούς ημιάξονες $\mathrm{O}x$ και $\mathrm{O}y$ στα σημεία $\mathrm{A}(x,0)$, $x>0$ και $\mathrm{B}(0,y)$, $y>0$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

α) Για $x \in (1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ συναρτήσει του $x$ δίνεται από τον τύπο: $\mathrm{E}(x)=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για $x=2$ το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ παίρνει την ελάχιστη τιμή, η οποία και να βρεθεί .

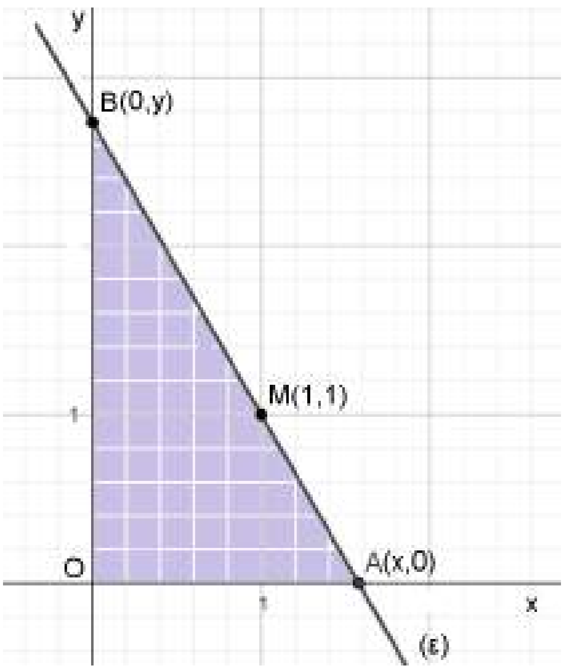
(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της $\mathrm{E}$, στο σημείο $(3,\mathrm{E}(3))$ και τα σημεία $\Gamma, \Delta$ στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

δ) Ένα σημείο $\mathrm{K}(x,y)$ κινείται πάνω στην ευθεία (ζ), και η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Μία βιοτεχνία που ράβει ρούχα πρόκειται να ετοιμάσει μία παραγγελία για 600 παντελόνια σε μία ημέρα. Για το λόγο αυτό θα απασχολήσει ράφτες (άνδρες και γυναίκες), από το εργατικό δυναμικό της, που ράβουν 6 παντελόνια την ώρα και θα αμείβονται με 12 ευρώ την ώρα. Για τον συντονισμό και την εποπτεία των ραφτών, οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα απασχολήσουν και μία από τις γυναίκες μόδιστρους της βιοτεχνίας ως επιστάτρια, την οποία θα πληρώνουν 20 ευρώ την ώρα. Επιπλέον οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα πληρώνουν ασφαλιστικές εισφορές, 20 ευρώ την ημέρα για κάθε εργαζόμενο, συμπεριλαμβανομένης και της γυναίκας επιστάτριας. Αν $x$ είναι ο αριθμός των ραφτών (άνδρες και γυναίκες) που θα απασχολήσει η βιοτεχνία για την διεκπεραίωση της παραγγελίας τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος για την εκτέλεση της παραγγελίας είναι: $\mathrm{K}(x)=20x+\dfrac{2000}{x}+1220$ ευρώ με $x>0$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι αν οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας απασχολήσουν για την εν λόγω παραγγελία, 10 ράφτες, η παραγγελία αυτή θα εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος.

(Μονάδες 3)

δ) Πόσες ώρες θα απασχοληθούν οι ράφτες, πέραν του οκταώρου (υπερωρία), ώστε η παραγγελία να εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος;

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τους αριθμούς $\alpha, \beta$ με $1 < \alpha < \beta$ και την παραγωγίσιμη στο $R$ συνάρτηση $f$, με συνεχή παράγωγο, ώστε $f(x) > 0$, για κάθε $[\alpha, \beta]$. Ας είναι $\lambda$ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$, με $f(a) \neq f(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)+\lambda a - f(a)}{x}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in (\alpha, \beta)$ ώστε $cf'(c) - f(c) - \lambda a + f(a) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι $f'(c) \neq \lambda$, να αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $M(c, f(c))$ και η ευθεία $AB$ τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

(Μονάδες 7)

δ) Αν είναι $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = e^2$, να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}} \frac{x \cdot f'(x^2+1)}{f(x^2+1)} dx$$

ισούται με $-1$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\rightarrow R$, με $\alpha>0$ και $f(x)>0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

- Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)f'(x)dx=-ln2$.
- $\beta f^2(\beta)=\alpha f^2(\alpha)$.
- $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=xf^2(x),\ x\in[\alpha,\beta]$ στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^2(x)$, τις ευθείες $x=\alpha,\ x=\beta$ και τον άξονα $x'x$, είναι $ln4$ τετραγωνικές μονάδες.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

(Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η συνάρτηση $G$ είναι μια αρχική της $f$ στο $[\alpha,\beta]$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(a,\beta]$ ισχύει $\frac{G(x)-G(a)}{x-a}<f(a)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση με $f(x)=\varepsilon\varphi x-1,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x=(1+x)\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια ακριβώς λύση στο ανοικτό διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f$ για όλες τις πραγματικές τιμές του $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

(Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ τις ευθείες $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ και τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης.

(Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x)\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 06)

ii. Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει: $0<f(\alpha+1)-f(\alpha)<1$.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4

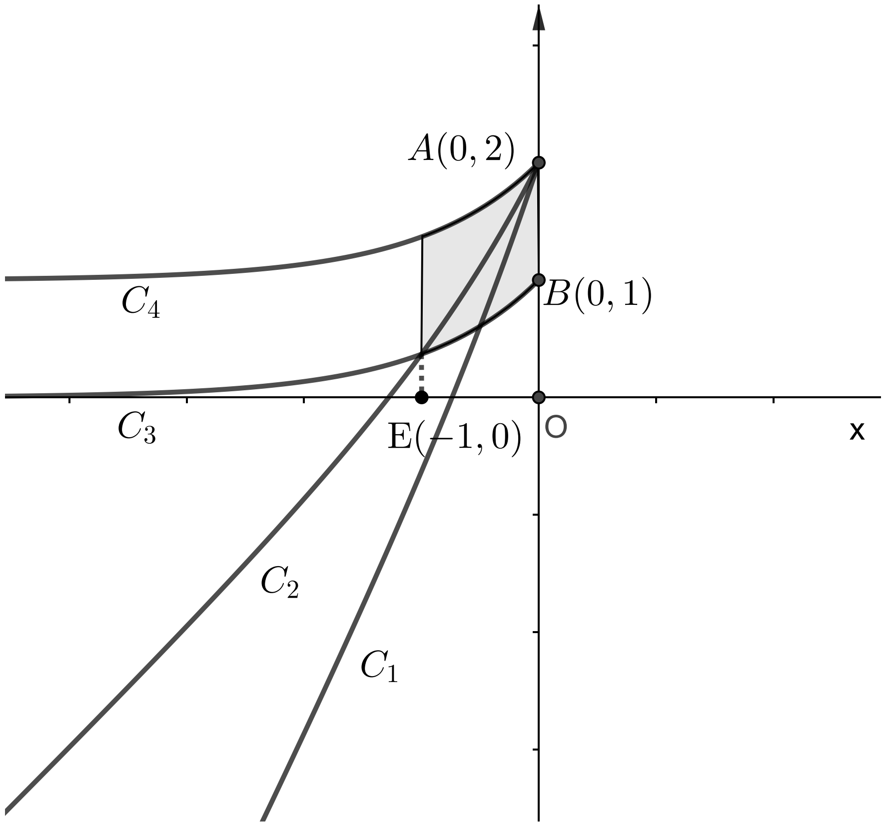
Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,\ g$ και $h$ με $f(x)=e^x,\ g(x)=e^x+1$ και $h(x)=e^x+x+1, x\in(-\infty,0]$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h$ ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 09)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται 4 γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, οι $C_1, C_2, C_3$ και $C_4$. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε μία από τις συναρτήσεις $f, g$ και $h$ τη γραφική της παράσταση, επιλέγοντας μεταξύ των $C_1, C_2, C_3$ και $C_4$ την κατάλληλη και να δικαιολογήσετε πλήρως την επιλογή σας. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι, η καμπύλη $C_2$ χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $C_3$ και $C_4$ και τις κατακόρυφες ευθείες x= -1 και x=0 σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

(Μονάδες 07)



ΘΕΜΑ 4

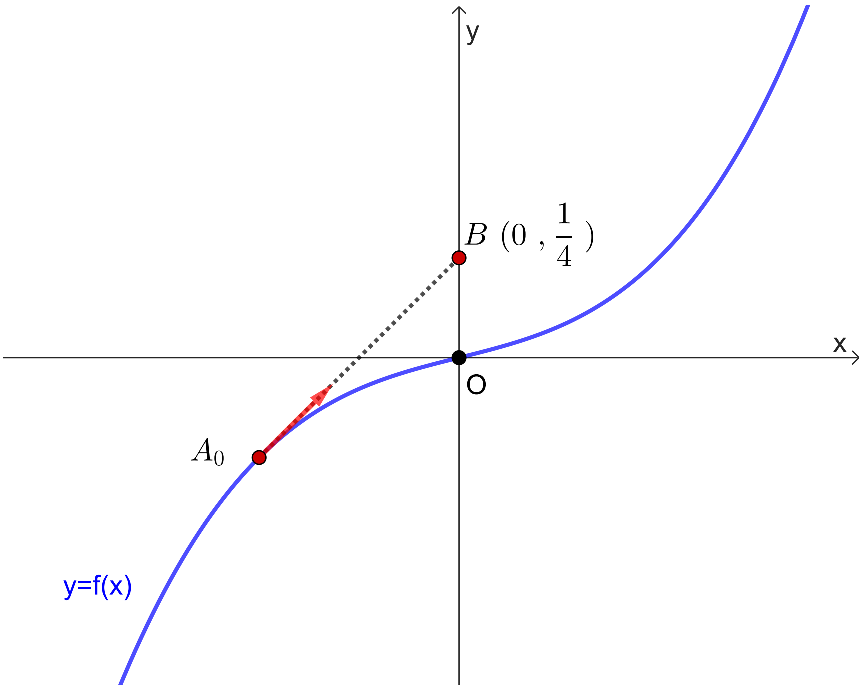
Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x$.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\alpha\,, f\,(\alpha))$ έχει εξίσωση $y = \left(3\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)x - 2\alpha^3$. (Μονάδες 8)

β) Ένα αυτοκίνητο κινείται τη νύχτα, κατά μήκος ενός επίπεδου δρόμου. Θεωρήστε το αυτοκίνητο ως σημείο στο επίπεδο Oxy και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, ως τον δρόμο που αυτό κινείται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t_o$, που το αυτοκίνητο βρίσκεται στο σημείο $A_0$, οι προβολείς του φωτίζουν μια πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο $B\left(0\,,\ \frac{1}{4}\right)$.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $A_0$. (Μονάδες 8)

ii. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή $t_o$, είναι 2, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του αυτοκινήτου, τη χρονική στιγμή $t_o$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις $x, y$ ώστε να έχει εμβαδόν $800\, m^2$. Η μία πλευρά της περιοχής, μήκους $x$, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά $m$ και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά $m$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συναρτήσει του $x$, είναι:

$$K(x) = 8x + \frac{3200}{x}, x > 0$$

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο, και να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους αυξάνεται για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f$ μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-2,2]$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) + x^2 = 4 \text{ για κάθε } x \in [-2,2]$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 06)

β) Αν η γραφική παράσταση της $f$ διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$, τότε να βρείτε τον τύπο της $f$.

(Μονάδες 09)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f$.

(Μονάδες 04)

δ) Ένα κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης της $f$. Καθώς περνάει από το σημείο $B(-1,\sqrt{3})$, η τεταγμένη του $y$ αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x$ του κινητού τη χρονική στιγμή που περνάει από το $B$.

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, συνεχή στο $x_o = 0$,

για την οποία ισχύει

$$xf(x) = \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τον τύπο της $f$.

(Μονάδες 04)

γ) Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 09)

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx \leq \frac{1}{4}$$

(Μονάδες 08)