

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

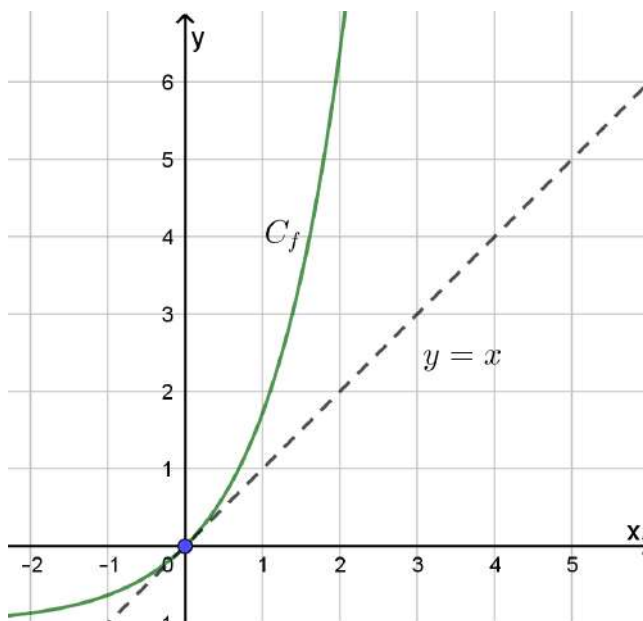
α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 9)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και της ευθείας $y=x$, η οποία εφάπτεται της C_f στο μοναδικό κοινό τους σημείο, την αρχή των αξόνων. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .



(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α , β ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

(Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 9)

Έστω $f^{-1}(x) = (x+1)^2, x \geq -1$

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2 - 1$, $x \leq 1$.

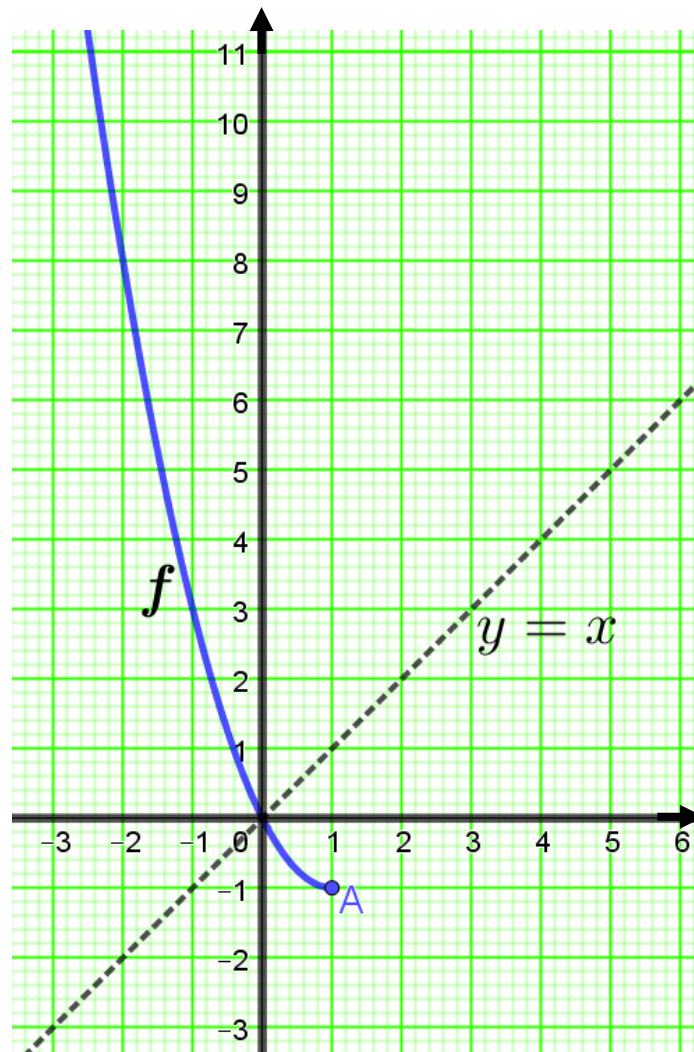
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της f και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .



(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα $x\chi'$ και για ποιες είναι πάνω από τον $x\chi'$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

(Μονάδες 7)

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε

i. το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$

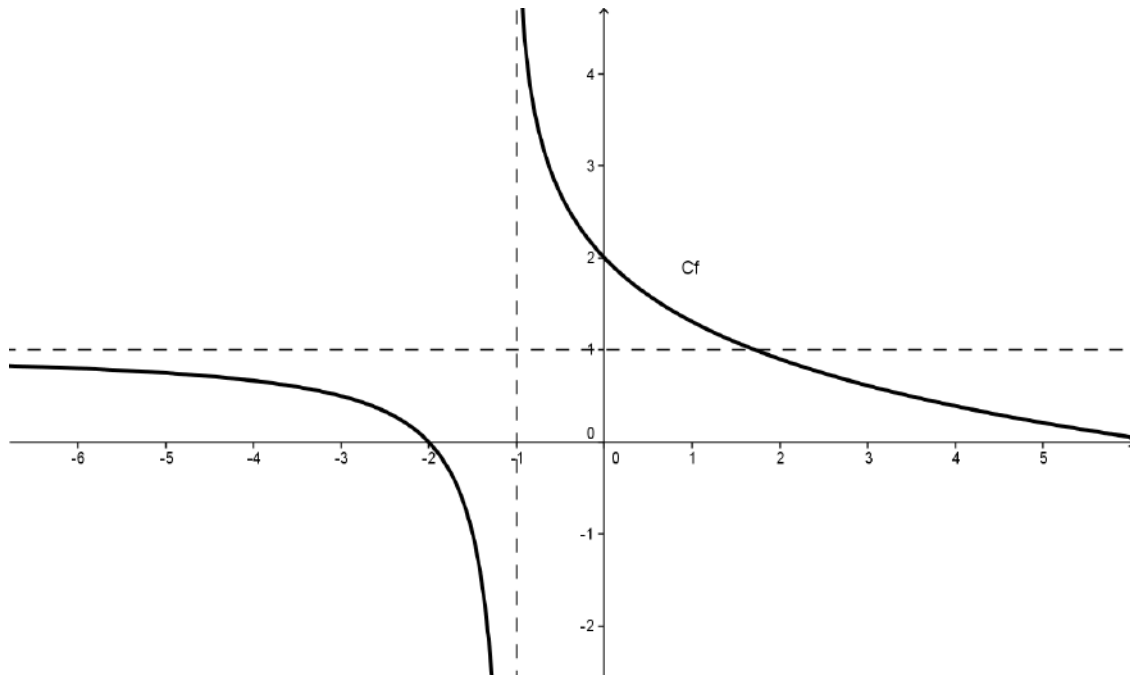
(Μονάδες 4)

ii. το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη -2 και τον άξονα $y'y$ σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2 .



α) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{f(x)}$

(Μονάδες 6)

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(f(x))$

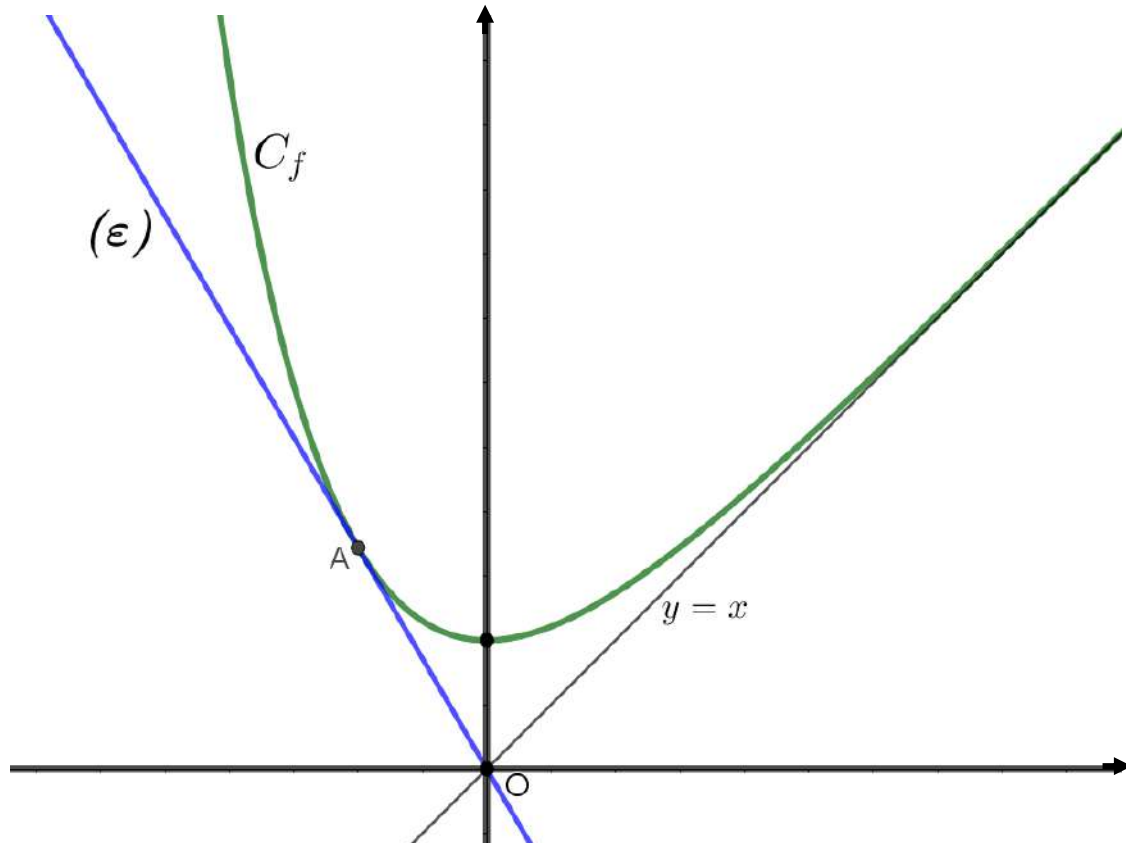
(Μονάδες 7)

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε) , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) .

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{f(x)}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(x)$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $\alpha^2 < \alpha$, τότε να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ([f(\alpha^2 - \alpha) - f(0)] x) = -\infty$$

(Μονάδες 09)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - 1) = f(0)$.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2

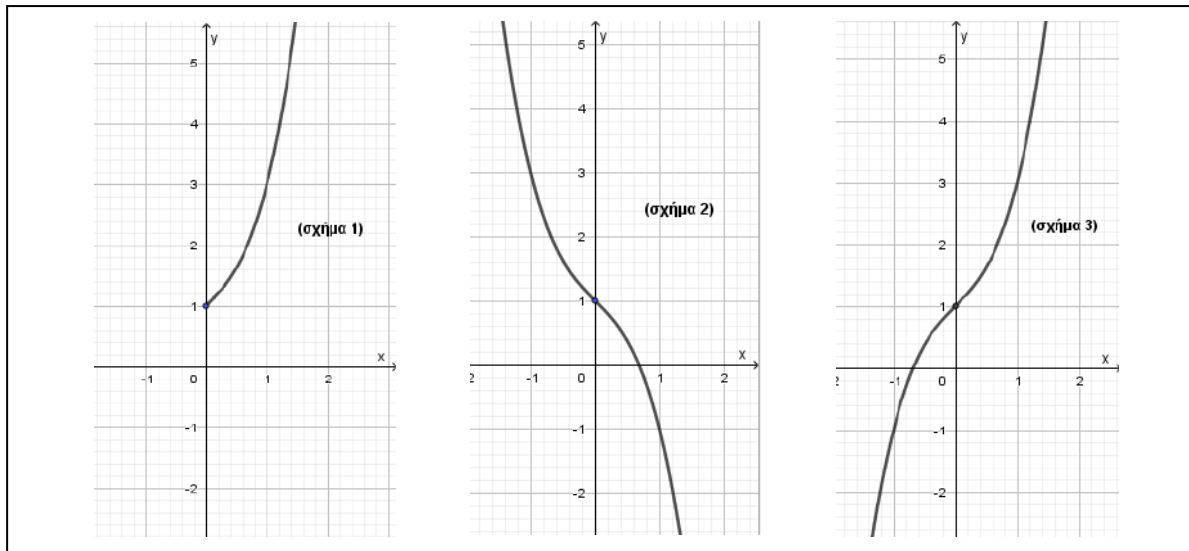
Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 07)

β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 07)

γ)

i. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$.

(Μονάδες 06)

ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x^3 + x + 1| = 2023$.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο σημείο της $A(1, f(1))$.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$, $x \geq 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

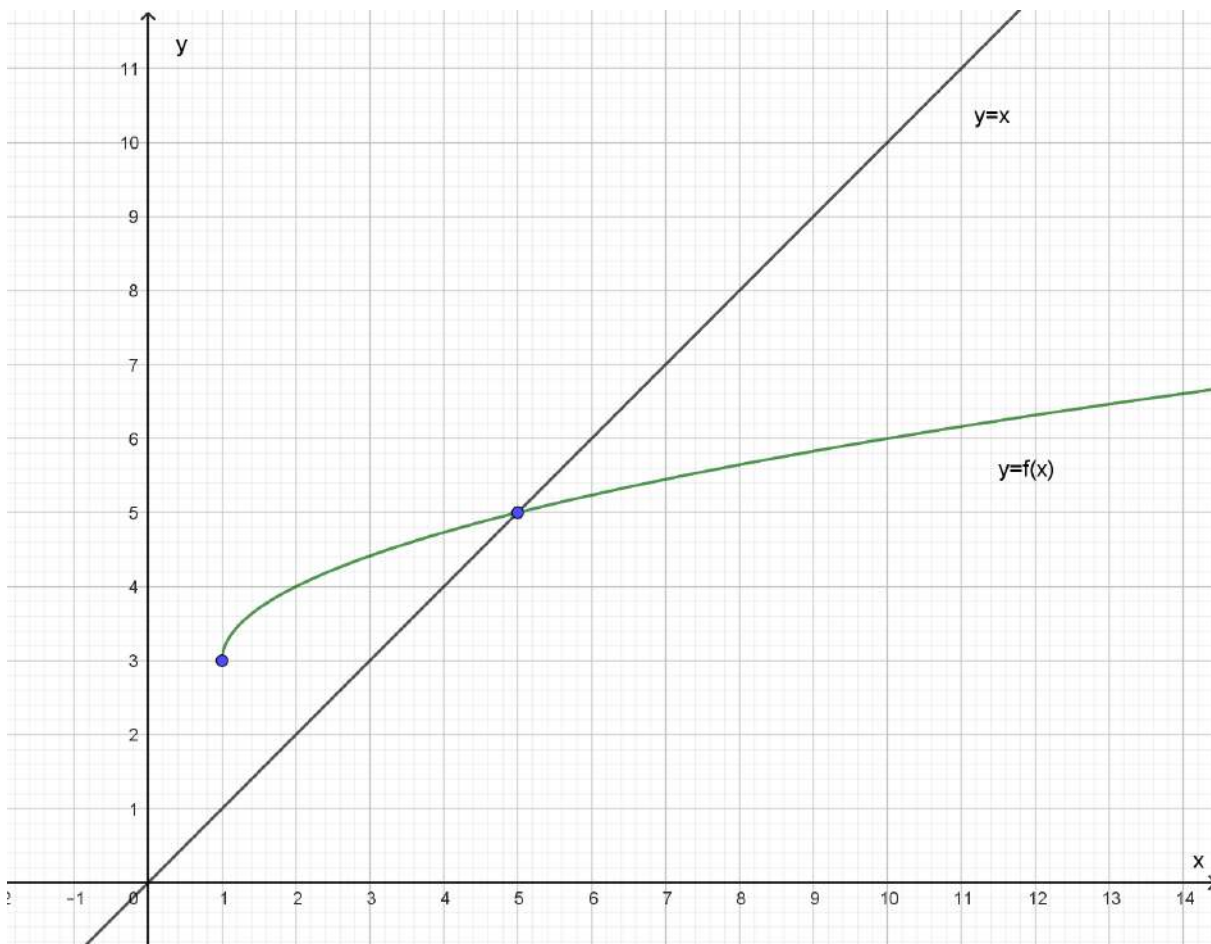
(Μονάδες 07)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της f .

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y = x$ της γωνίας xOy . Αφού μεταφέρετε το σχέδιο στην κόλλα σας, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1} και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f , f^{-1} .

(Μονάδες 08)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{αν } x \in [-1, 2] \\ x - 1, & \text{αν } x \in (2, 5] \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 2$.

(Μονάδες 09)

γ) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1, 5]$.

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f = [0,1]$.

(Μονάδες 05)

β)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι “1 – 1”.

(Μονάδες 10)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 0, x \in [0,1]$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $x \in (-\infty, 1]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} .

(Μονάδες 8)

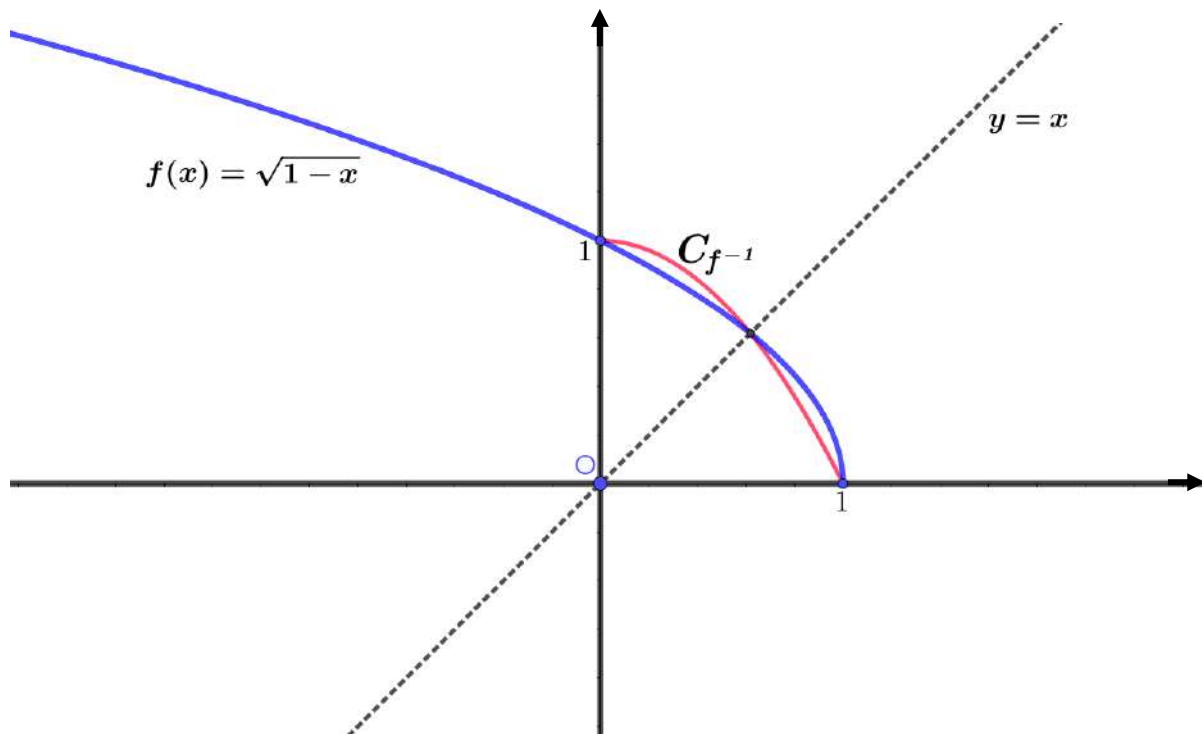
β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της f^{-1} .

Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το παραπάνω σχήμα και το οποίο να συμπληρώσετε με την υπόλοιπη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 2$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον x' γωνία 45° .

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \sqrt{4x - 3}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x) = |2x - 1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x + 1} - 1}$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2\ln x + 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

(Μονάδες 09)

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 1 - \ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -x^3, x \in (-\infty, 0]$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

(Μονάδες 7)

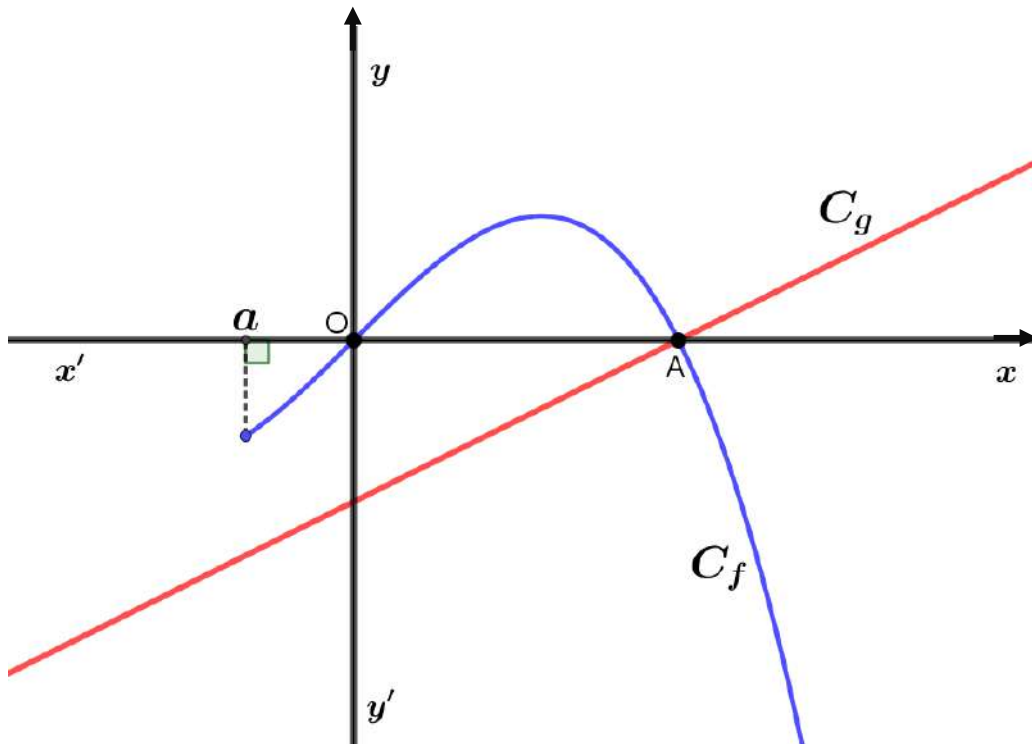
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και την συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Οι γραφικές παραστάσεις } C_f, C_g \text{ των συναρτήσεων } f, g \text{ αντίστοιχα,}$$

φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Γνωρίζουμε ότι:

- οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1, 0)$.
- η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η C_f δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα x' εκτός από τα σημεία O και A .



α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{g(x)}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{f(x)}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$.

(Μονάδες 8)

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{xf(x) - 3x^2}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f = [0,2) \cup (2,3) \cup (3,5]$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες $(0,0)$ και $(4,0)$. Επίσης, δίνεται ότι $f(1)=1$.

Με βάση το παρακάτω σχήμα:

α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

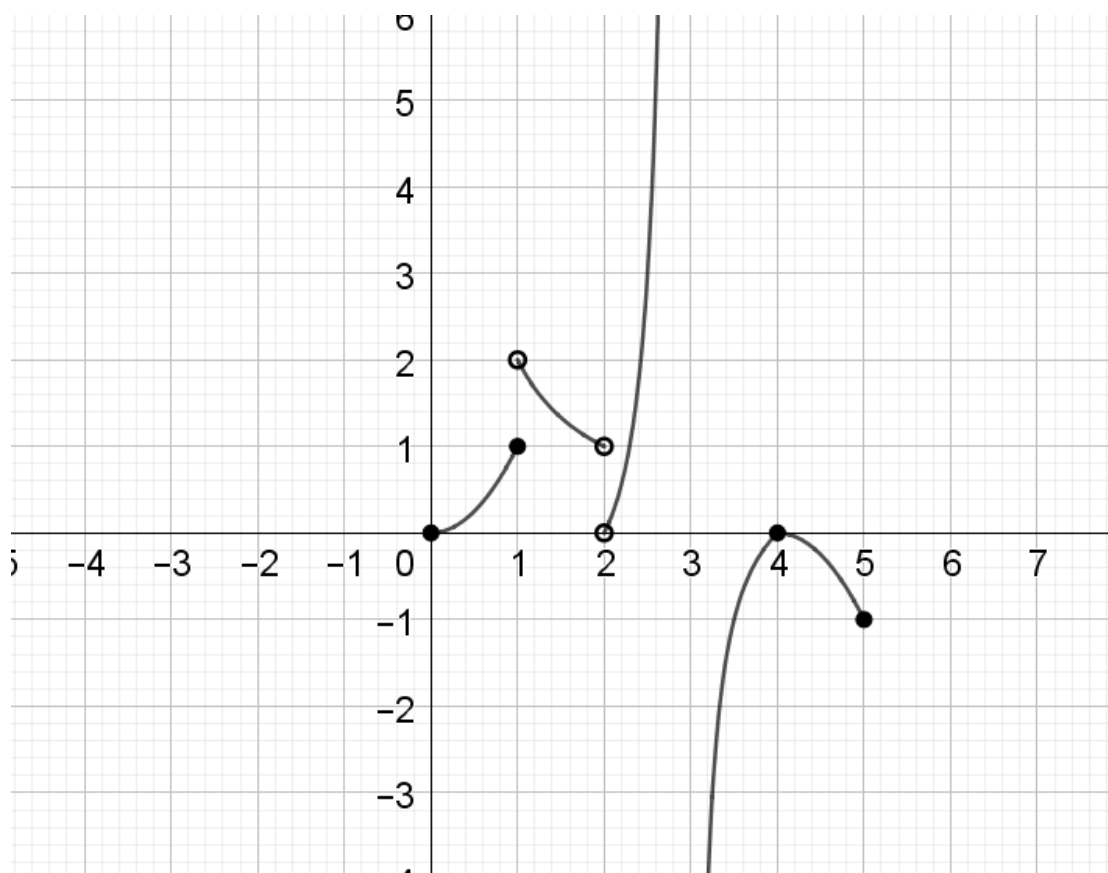
(Μονάδες 7)

γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\ln x - 1) + 1$, $x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x \ln x + 1 = x$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x \leq 0 \\ \eta \mu x, & x > 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0, 0)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$.

α) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_0 = 2$;

(Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.

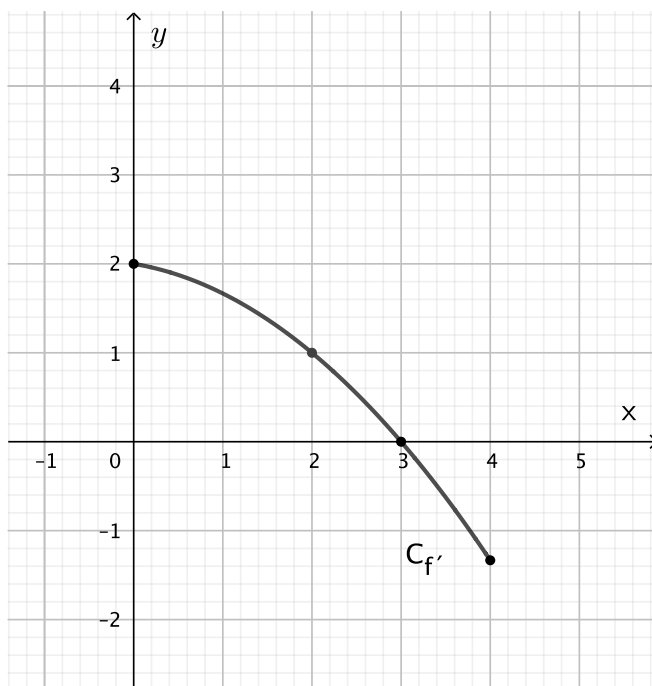
(Μονάδες 08)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$.

(Μονάδες 06)

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f''(x)dx$.

(Μονάδες 05)



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ και $g(x) = x - 2$.

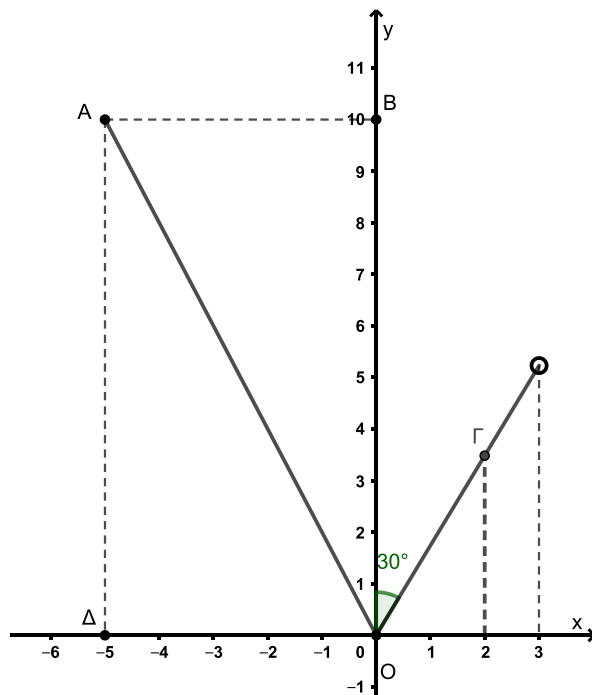
α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h , με $h(x) = |g(x)|$. (Μονάδες 7)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Γ ; (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x & , \text{αν } x < 0 \\ 1 & , \text{αν } x = 0 \\ \sin x & , \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \cdot g$. (Μονάδες 9)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων

των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$, που ορίσατε στα ερωτήματα (α) και (β). (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,5]$.

α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$;

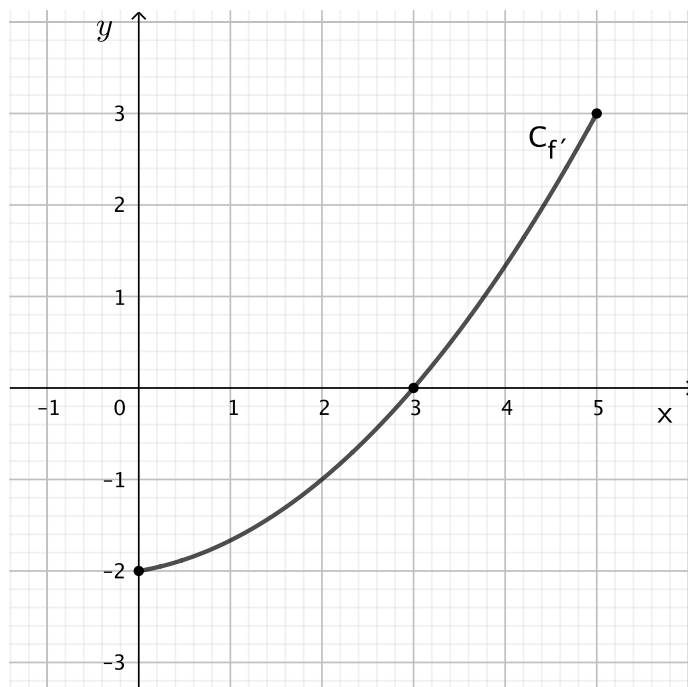
(Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,5]$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_0 = 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 09)



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού, η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$, και της παραγώγου της, f' .

α) Να βρείτε την κλίση της συνάρτησης f στο $x_0 = 2$.

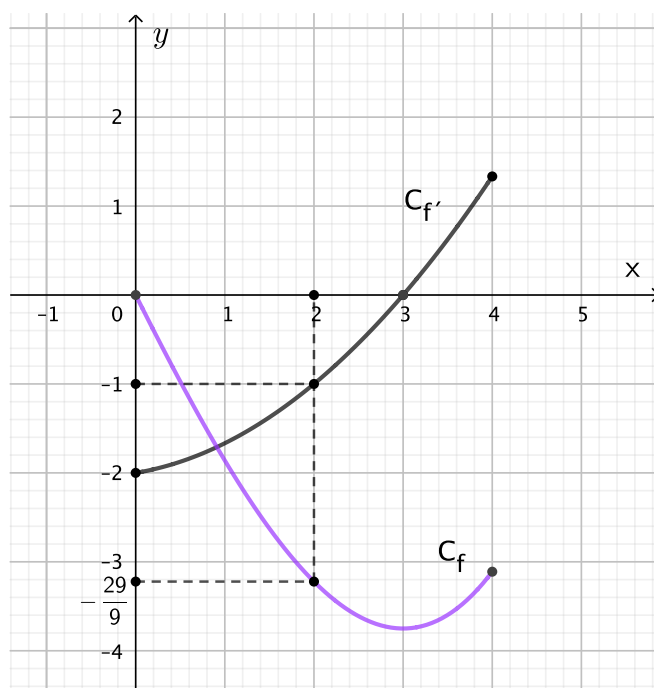
(Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 2$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1,5]$.

α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' είναι το σημείο $A(2, -1)$, με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[-1,2]$ και κυρτή στο $[2,5]$.

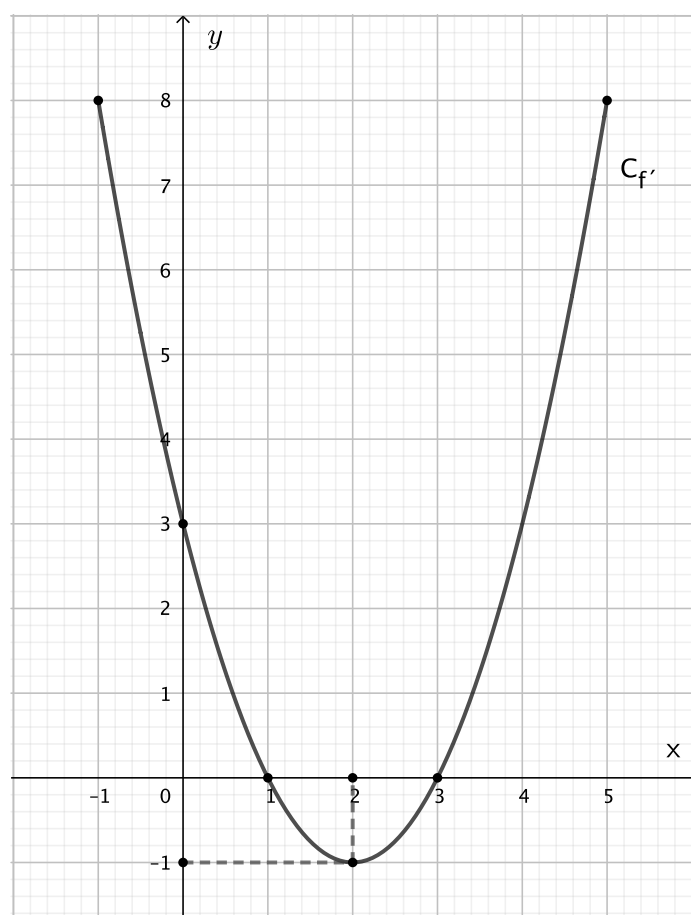
(Μονάδες 10)

β) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_0 = 2$;

(Μονάδες 06)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $3f(2) - 1 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 2$.

(Μονάδες 09)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x - 1)^3 - 3x, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

(Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2, +\infty)$ είναι το διάστημα $[-5, +\infty)$.

(Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

(Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

(Μονάδες 08)

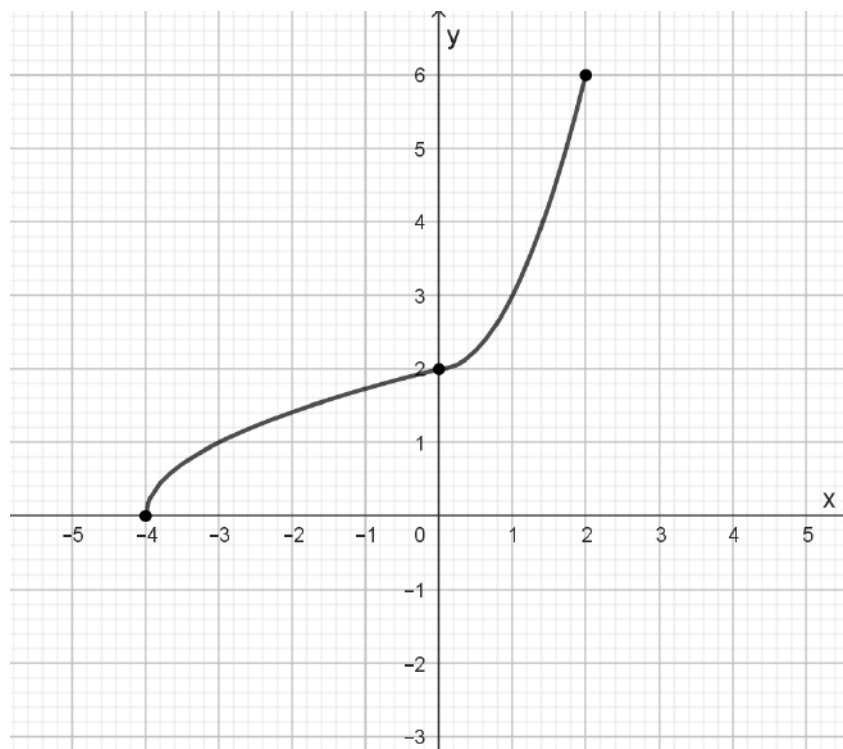
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης f . Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f^{-1}(f(6))$. (Μονάδες 8)

γ) Στο σύστημα αξόνων που ακολουθεί να χαράξετε την γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{αν } x < 2 \\ ax^2 - 4, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$ με $a \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο $x_0 = 2$, δηλαδή τα $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

(Μονάδες 07)

γ) Αν $a = 2$, να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο της συνάρτησης f . (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0, 2]$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο $[0, 2]$ (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

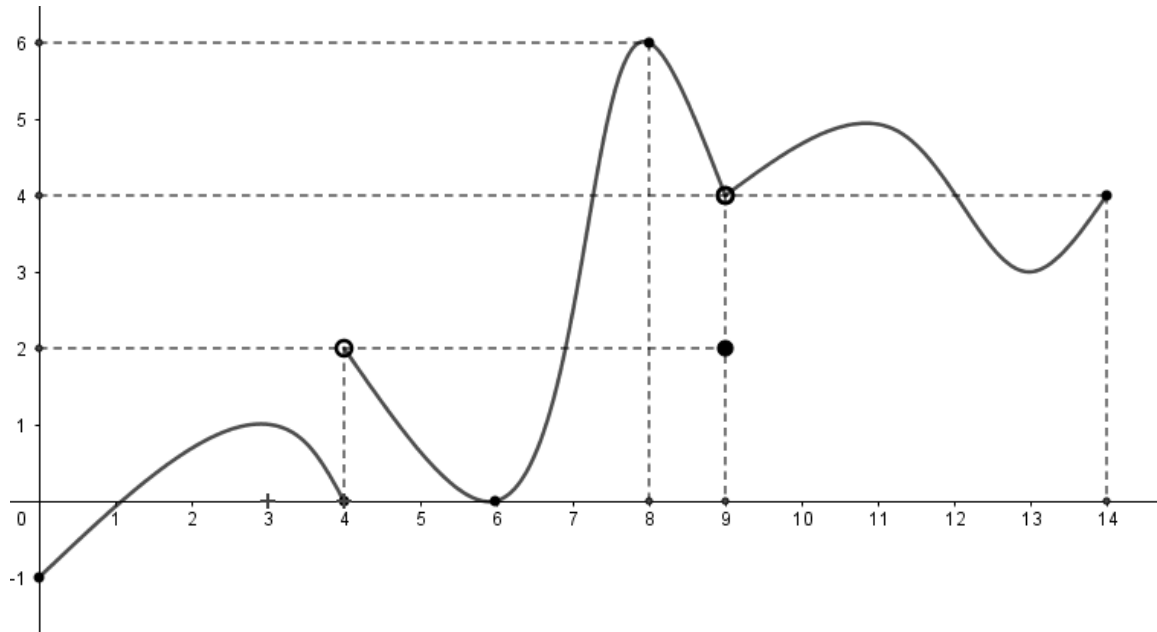
i. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 2]$. (Μονάδες 05)

ii. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . (Μονάδες 03)

iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο έξι και ο οριζόντιος άξονας εφάπτεται στη γραφική της παράσταση στο σημείο αυτό.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρείτε τα παρακάτω όρια:

- i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 14} f(x)$
- v. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

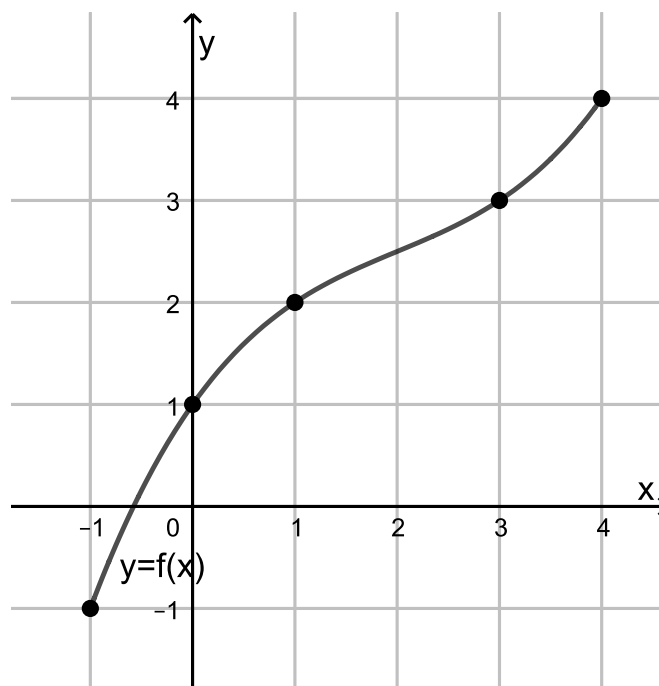
ΘΕΜΑ 2

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = [-1, 4]$ και με γραφική παράσταση C_f που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη C_f :

α) να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f , (Μονάδες 8)

β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$, (Μονάδες 8)

γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} . (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

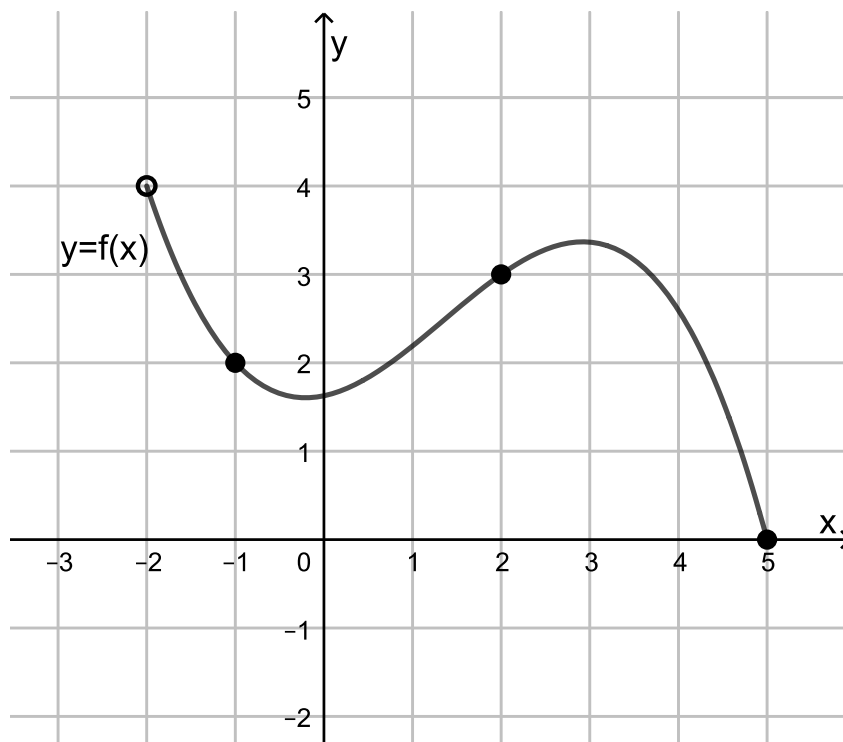
Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f , (Μονάδες 6)

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$ και $f(5)$, (Μονάδες 6)

γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f , εφόσον υπάρχουν, (Μονάδες 7)

δ) την τιμή της σύνθεσης $f \circ f$ στο -1 . (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 2

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = -2$ και $f'(0) = 0$. Έστω επίσης οι συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -x$ και $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή $(g \circ f)(0)$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την παράγωγο $g'(-2)$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την παράγωγο της $g \circ f$ στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g \circ f$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$. (Μονάδες 7)

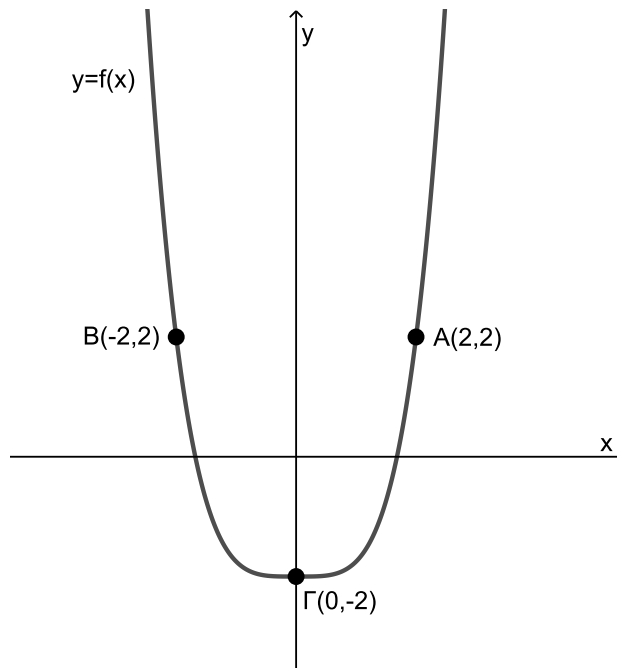
ΘΕΜΑ 2

Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, διέρχεται από τα σημεία $A(2, 2)$, $B(-2, 2)$ και $\Gamma(0, -2)$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = |x|$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές $(g \circ f)(2)$, $(g \circ f)(-2)$ και $(g \circ f)(0)$. (Μονάδες 8)

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται παρακάτω. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g \circ f$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^{3x+2}, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε την συνάρτηση $g \circ f$.

(Μονάδες 08)

γ) Αν $g(f(x)) = 6x + 4, x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - \eta \mu^2 x - 4}{x}$$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x < 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 05)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 08)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 – 1”.

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f , την f^{-1} .

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. $f \cdot g$

(Μονάδες 7)

ii. $\frac{f}{g}$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το διάστημα $(-1, 1)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.

(Μονάδες 9)

γ) Δίνεται ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $(f \circ g)(x)$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ και $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}^*$ και της g το διάστημα $(-1, 1)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $(f \circ g)(x)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9x^2 + 16} - \frac{5}{2} \ln(8x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για $x \in (-\infty, 3]$ η $(f \circ g)(x) = \sqrt{3-x} - 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = (f \circ g)(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \ln(x-2) + 5$ για κάθε $x > 2$ και $g(x) = 2x-1$ με $x \in \mathbb{R}$.

α)

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη. (Μονάδες 6)
- ii. Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1} . (Μονάδες 7)

β)

- i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)
- ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 3x^2 - 8, x \in \mathbb{R}$.

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα.

(Μόρια 10)

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .

(Μόρια 7)

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f , διαφορετικό από το A , στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ε) .

(Μόρια 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

(Μονάδες 14)

β) Να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 2

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$ για κάθε

$x \neq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν η f είναι

i. συνεχής στο 2.

(Μονάδες 8)

ii. παραγωγίσιμη στο 2.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x) - 2x| \leq (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1) = 2$.

(Μονάδες 10)

β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

(Μονάδες 10)

γ) η f είναι συνεχής στο 1.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x$, $x \in [1,2]$.

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x\eta\mu x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ , με $\varphi(x) = f'(x) - \frac{1}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν

$$\varphi(0) < 0 \text{ και } \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0.$$

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2$, $x \in [0,2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης.

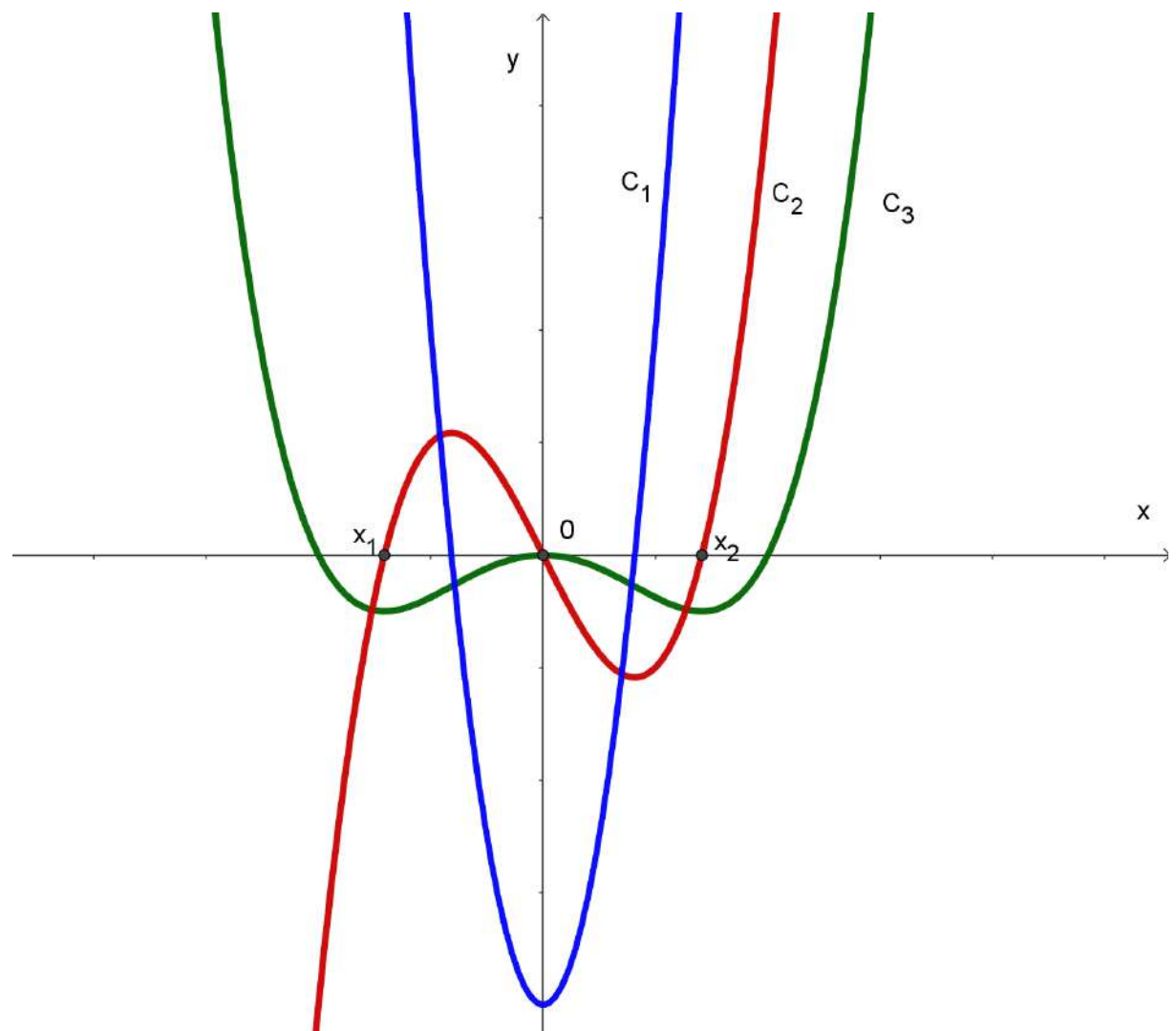
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1 , C_2 , C_3 τριών συναρτήσεων f , f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2 ,



α)

ι. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F .

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$F' = f$		0	0	0	
F					

(Μονάδες 10)

ii. να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F .

(Μονάδες 08)

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f' και F .

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, σύνολο τιμών το $[-\frac{1}{2}, 1)$ και

$$\text{τύπο } f(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{x+2}}.$$

Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $[-\frac{1}{2}, 1)$, σύνολο τιμών το

$$[0, +\infty) \text{ και τύπο } g(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x} \right)^2. \text{ Με δεδομένο ότι η συνάρτηση } f \text{ είναι 1-1,}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε x που ανήκει στο $[0, 1)$.

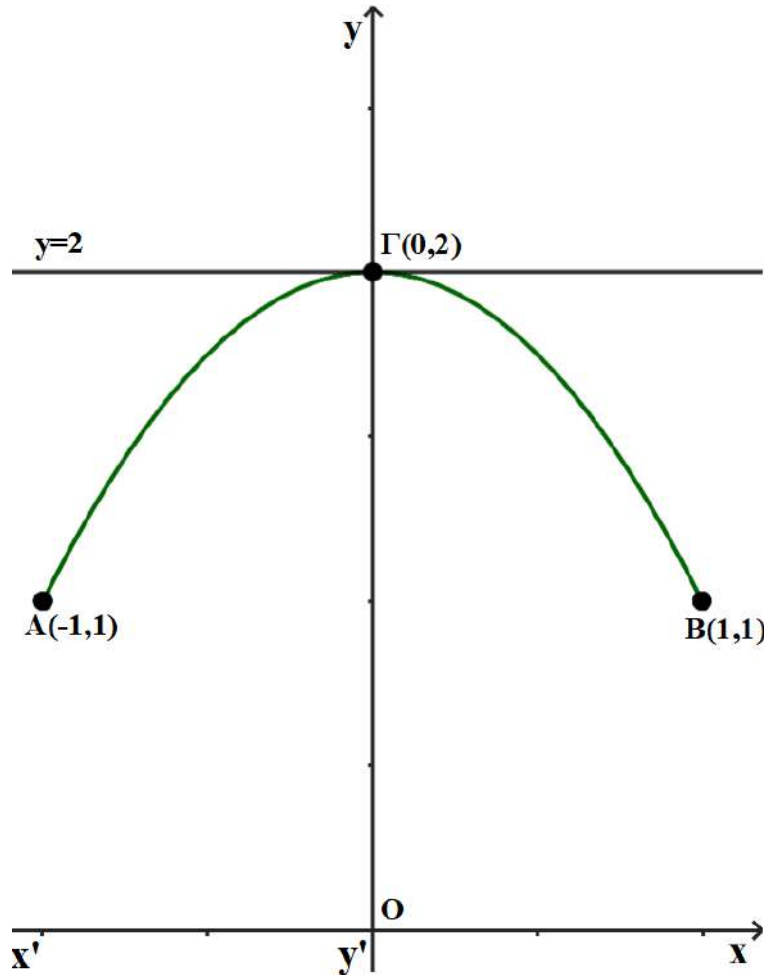
(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f , C_g των συναρτήσεων f , g αντίστοιχα δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ και η ευθεία $y=2$. Αν η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από τα σημεία $A(-1,1)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(0,2)$ τότε με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει: $1 \leq f'(x) \leq 2$, για κάθε $x \in [-1,1]$.

(Μονάδες 07)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

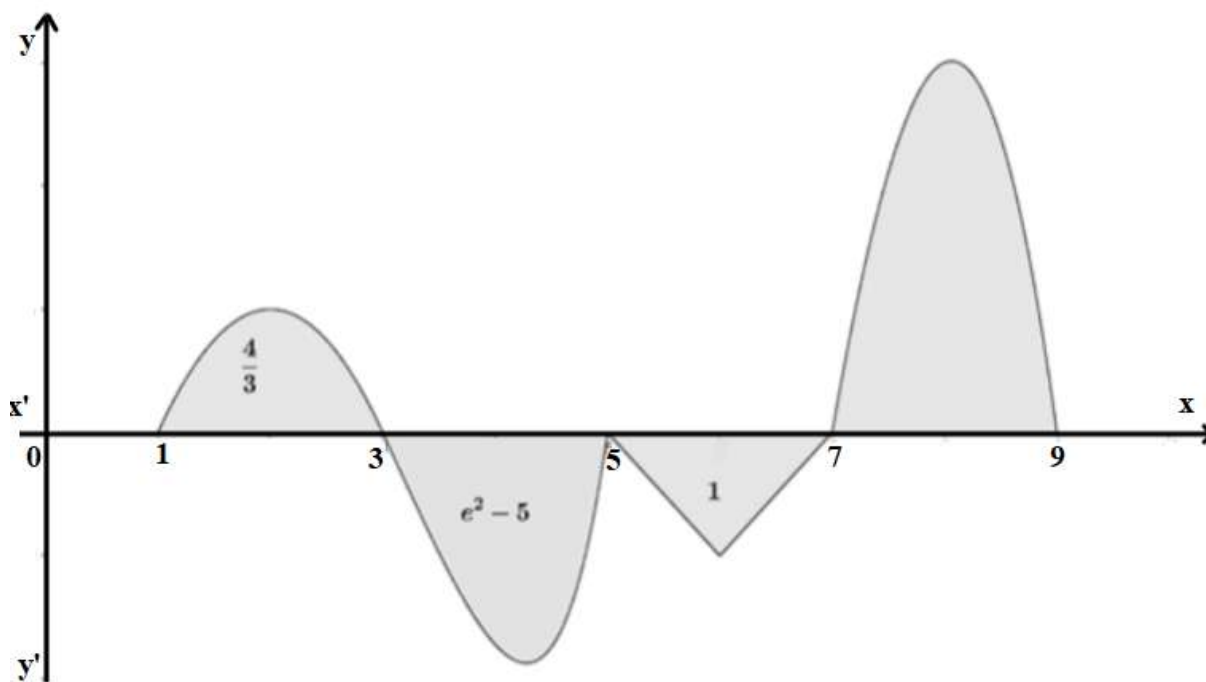
(Μονάδες 08)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,9] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι τιμές των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1,7]$.



Δίνονται ακόμη ότι:

- $\left(\int_7^9 f(x) dx \right)^2 = 16$ και
- η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία με τετμημένες 1, 3, 5, 7.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_7^9 f(x) dx = 4$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, όταν $x \in [1,9]$.

(Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^9 f(x) dx$.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για τα εμβαδά των περιοχών $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ του παρακάτω σχήματος ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = E(\Omega_3) = \frac{4}{3}$.

α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 f(x) dx$.

(Μονάδες 6)

ii. $\int_0^3 f(x) dx$.

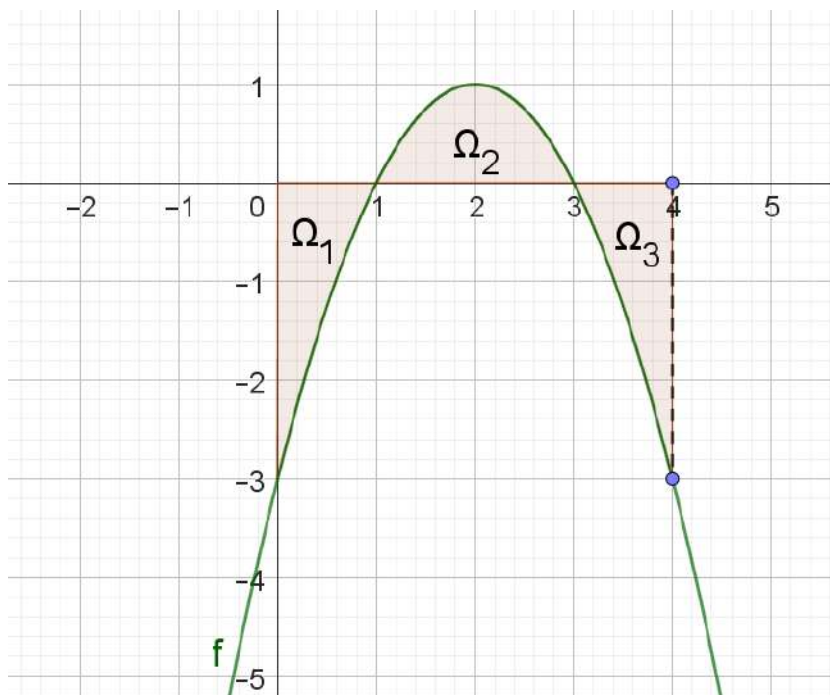
(Μονάδες 6)

iii. $\int_0^4 f(x) dx$.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\int_0^{2023} f(x) dx - \int_4^{2023} f(x) dx$.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2

Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $\int_2^3 f(x)dx = 2$, $\int_1^3 f(x)dx = 4$ και

$\int_1^7 f(x)dx = 10$ να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_3^2 f(x)dx$.

(Μονάδες 5)

β) $\int_3^7 f(x)dx$.

(Μονάδες 6)

γ) $\int_7^2 f(x)dx$.

(Μονάδες 6)

δ) $\int_1^3 (f(x) - x)dx$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ -x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και να σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(0, f(0))$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 3x + 2$, $x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 9)

β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) + 2023 = 0$ έχει θετική λύση.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = x^2 - x + 2$.

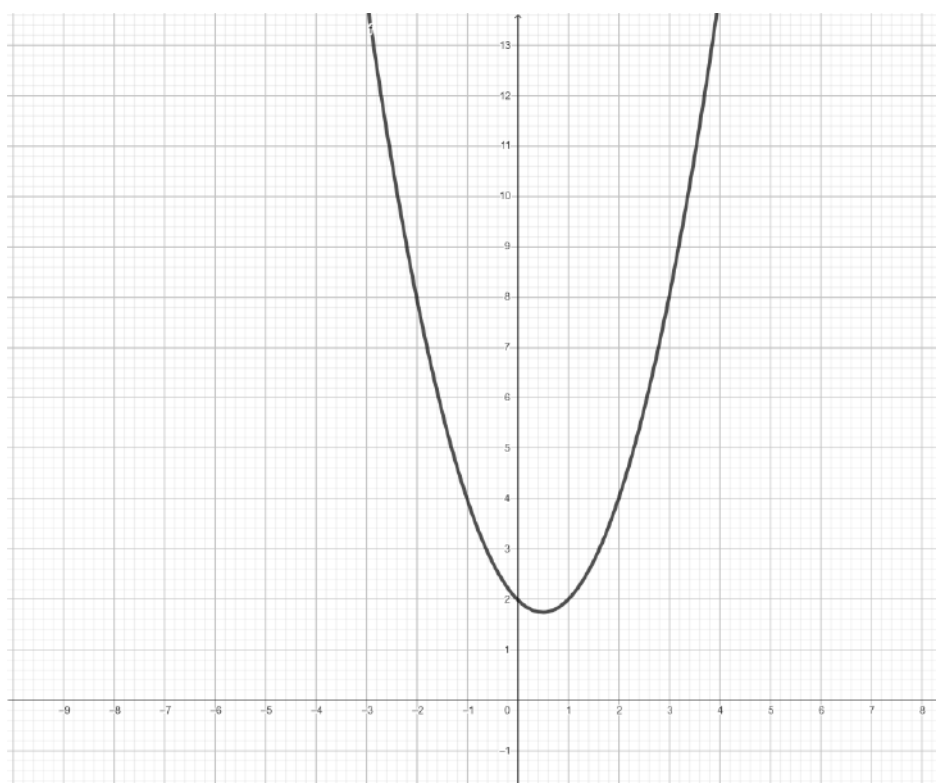
α) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $B(1,2)$.

(Μονάδες 8)

γ) Αφού αντιγράψετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g , να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $y = x + 1$.



(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της $\varepsilon: y = x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "1-1".

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^{2x}}$. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε γραφική παράσταση:

α) Να βρείτε

i. Την μονοτονία της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x \in (1, +\infty)$.

α)

i. Να δείξετε ότι $f'(x) < 0$ με $x \in (1, +\infty)$.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της f .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + 2x$, $x > 0$ και $g(x) = e^{x+2}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.

(Μονάδες 8)

γ) Να ορίσετε την αντίστροφο συνάρτηση της g .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f και να λύσετε τις εξισώσεις: $f'(x) = 0$ και $f''(x) = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 9)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x-1}, x \neq 1$ και $g(x) = \frac{1}{e^x}, x \in \mathbb{R}$.

α)

- i. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$.

(Μονάδες 6)

- ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x) = (f \circ g)(x)$.

(Μονάδες 6)

Αν $h(x) = \frac{e^x}{1-e^x}, x \in \mathbb{R}^*$ τότε:

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι '1-1'.

(Μονάδες 7)

γ) να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g και h ώστε :

$$f(x) = \ln(1 + e^x), \quad g(x) = 2\ln x \quad \text{και} \quad h(x) = \ln(1 + x^2).$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και h είναι ίσες. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε:

$$f(x) = \ln(1 + e^x) \text{ και } g(x) = 2\ln x.$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f + g$. (Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f + g$ ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις g και h ώστε :

$$g(x) = 2\ln x, x > 0 \text{ και } h(x) = \ln(1 + x^2), x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη

(Μονάδες 5)

ii. $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$, με $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ g^{-1}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.

(Μονάδες 12)

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ με $x \neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε'): $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση g έχει αντίστροφη και να αποδείξετε ότι $g^{-1} = -f$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

(Μονάδες 8)

γ) Έστω $h(x) = (g \circ f)(x)$.

Να βρείτε τον μοναδικό αριθμό ξ ο οποίος ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την συνάρτηση h στο διάστημα $[2, 8]$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η τεθλασμένη γραμμή $\Theta\Lambda$ αποτελεί γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης στο $\mathbb{R}$, που διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$ και τέμνει τον άξονα x' στο $\Gamma(-1,0)$.

α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_{-2}^{-1} f(x) dx$

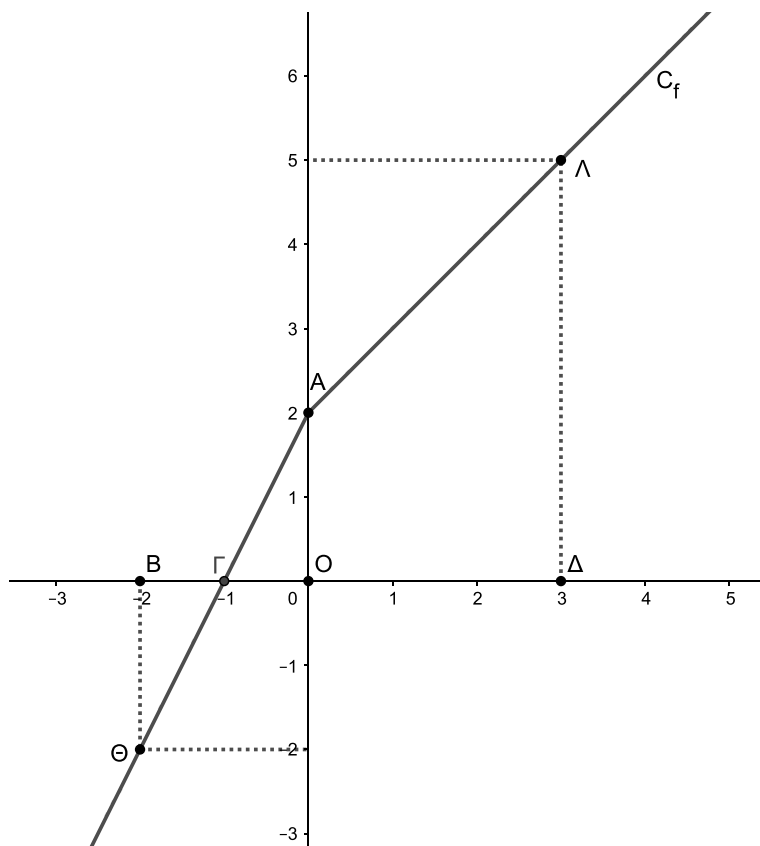
ii. $\int_{-1}^0 f(x) dx$

iii. $\int_0^3 f(x) dx$

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -2$ και $x = 3$.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g .

Αν $\int_1^3 f(x)dx = 6$, $\int_1^8 f(x)dx = 29$, $\int_3^5 f(x)dx = 8$ και $\int_1^5 g(x)dx = -6$, τότε:

α) Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_3^8 f(x)dx$

ii. $\int_5^8 2f(x)dx$

iii. $\int_1^5 (f(x) + g(x))dx$

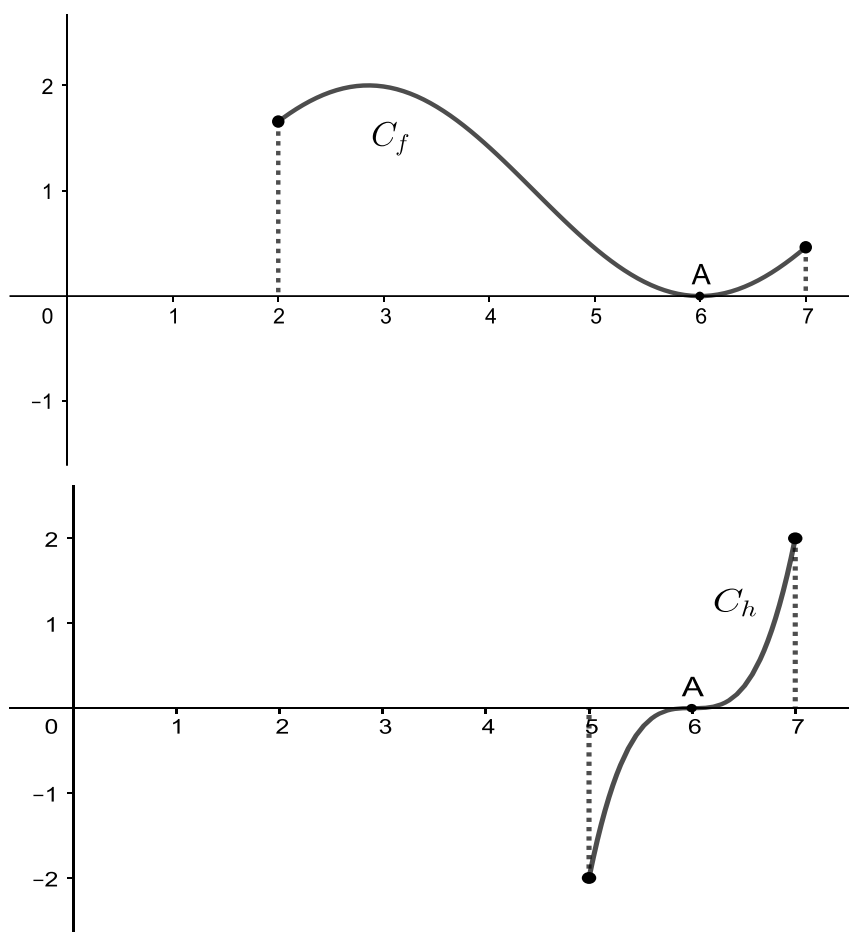
(Μονάδες 18)

β) Αν για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [1,5]$, τότε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 5$.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 συνεχών συναρτήσεων των f και h , οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h . (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο πεδίο ορισμού τους.

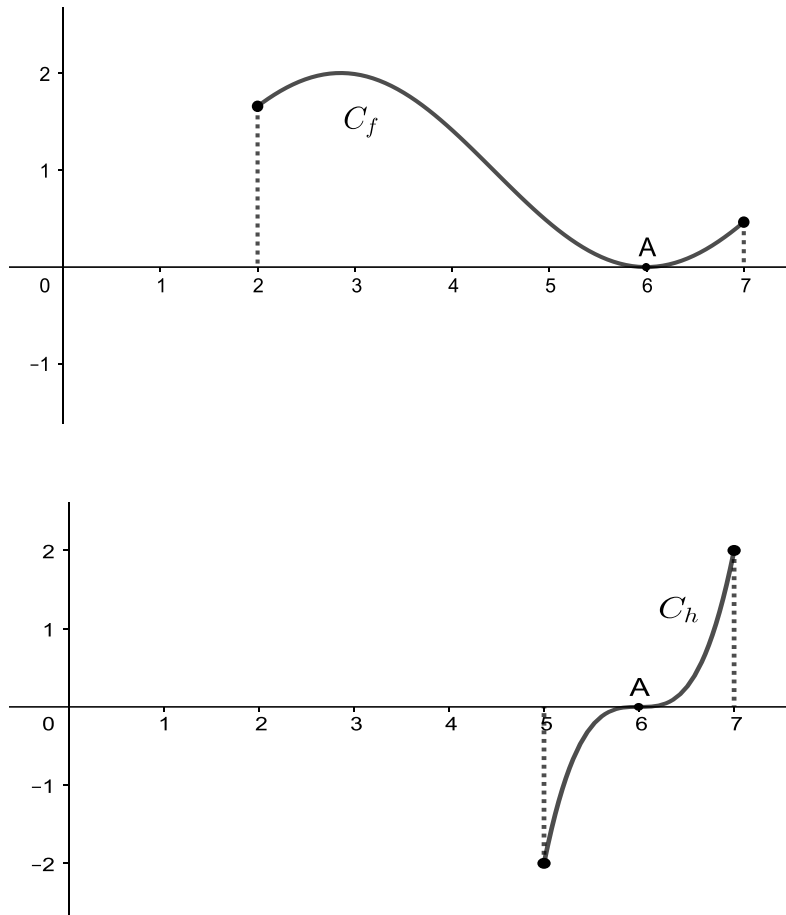
(Μονάδες 10)

ii. Παίρνουν την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f και h . Και οι 2 γραφικές παραστάσεις εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$. Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο 6 και η h παίρνει αρνητικές τιμές αριστερά του 6 και θετικές τιμές δεξιά του 6.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h . (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

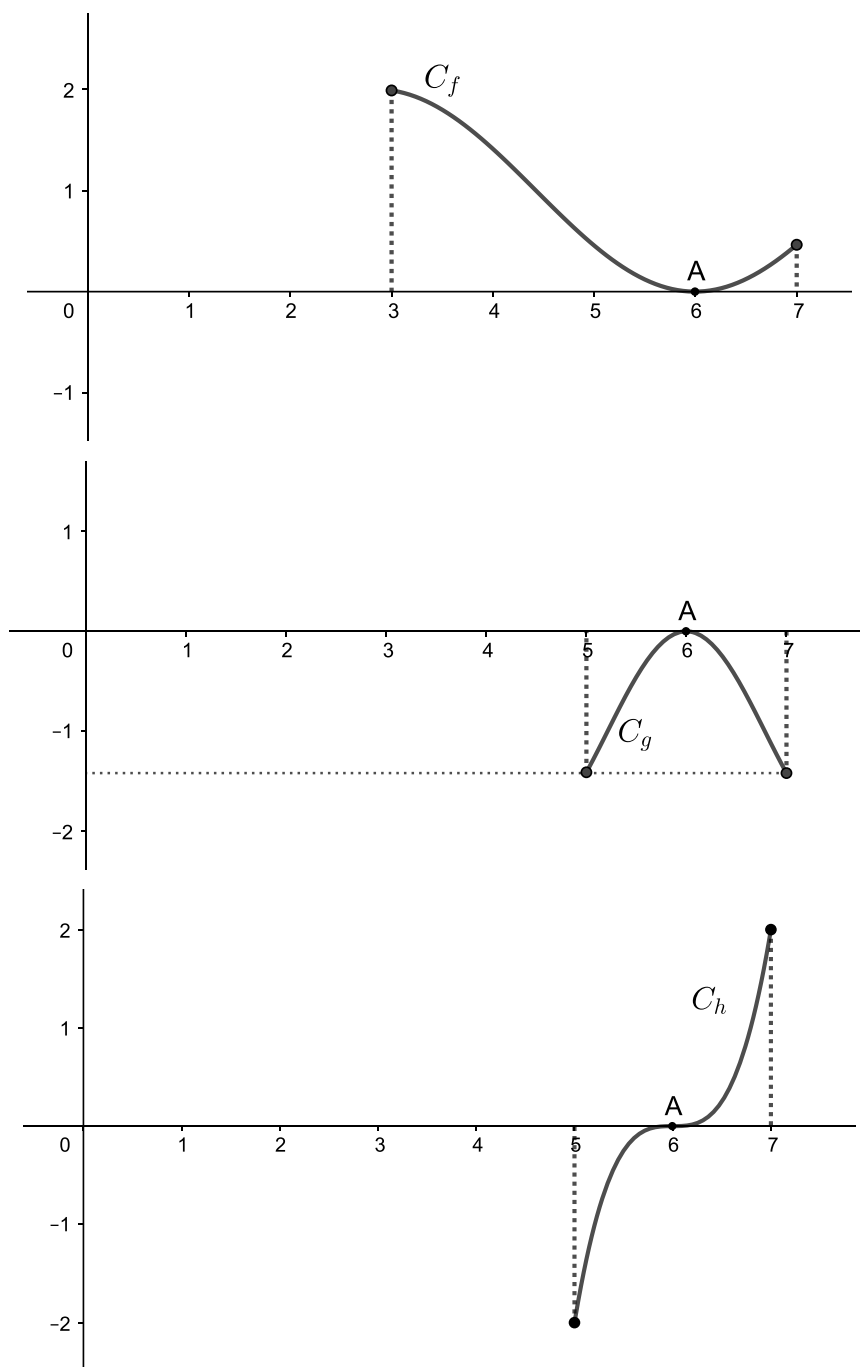
i. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 07)

ii. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{h(x)}$ (Μονάδες 07)

iii. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x)}{x-6}$ (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 3 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f , g και h , οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f , g και h . (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού τους.

(Μονάδες 10)

ii. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1 - \sin x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής

παράστασης της f , του άξονα x' και των ευθειών $x = -2$ και $x = \pi$. (Μονάδες 18)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -5x^2 - 3x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. (Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0. (Μονάδες 7)

γ) Να δικαιολογήσετε γιατί μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1,1]$ και να βρείτε ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$.

(Μονάδες 11)