

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2022$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa, \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x) \leq \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 2$$

(Μονάδες 04)

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε το $f(0)$.

(Μονάδες 04)

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού:

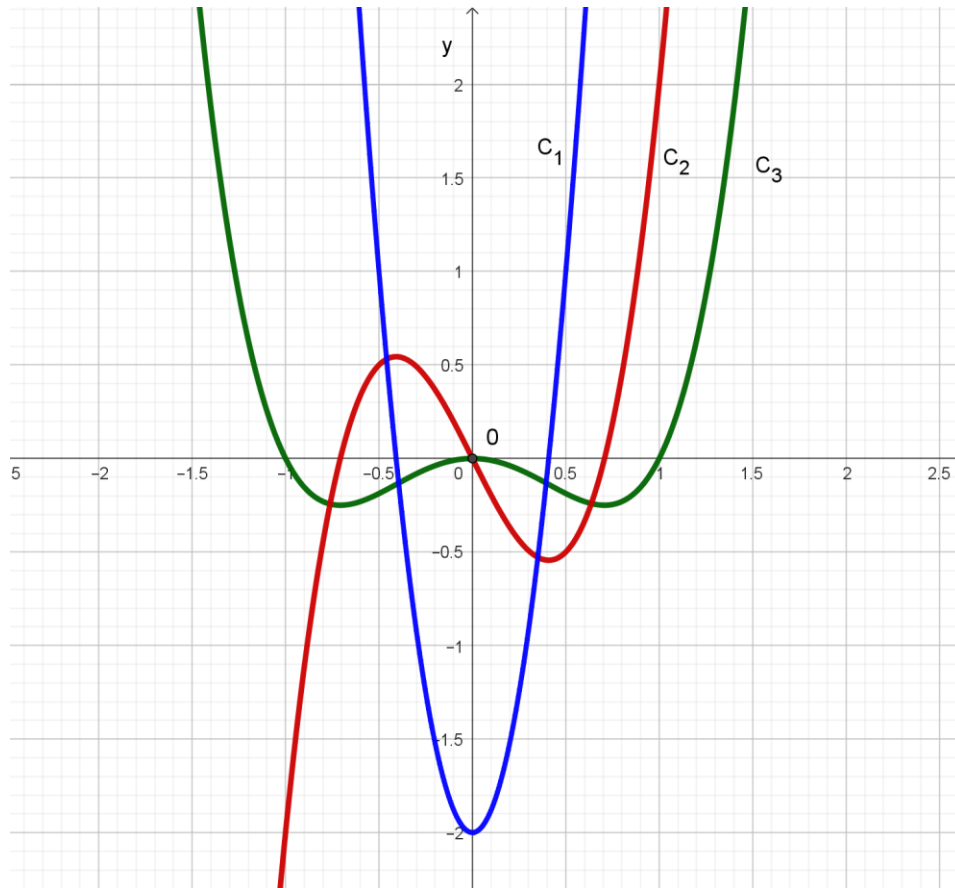
$$\left| f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \right| = -f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \text{ κοντά στο } 0$$

Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1 , C_2 , C_3 τριών συναρτήσεων f , f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι οι C_2 και C_3 διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2 ,



α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος, τη συνάρτηση F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 7)

β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F .

(Μονάδες 6)

γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\eta\mu x} \right) = 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.

(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

(Μονάδες 08)

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , στο σημείο $(0, g(0))$.

(Μονάδες 04)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι κυρτή.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - 2 \ln x$, $x > 0$.

α) Να βρείτε:

i. Την μονοτονία της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

ii. Το πρόσημο της f .

(Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x > 0$, έχει μέγιστη τιμή την

$$g\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2e}.$$

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g .

(Μονάδες 6)