

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(5,-2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) Αν M είναι το μέσο του $B\Gamma$, να βρείτε τα μέτρα των $\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 8)

γ) Να γραφεί το $\overrightarrow{B\Gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AM}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$ και ορίζουμε τα διανύσματα

$$\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν τα $\vec{\beta}, \vec{w}, \vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-2, 5), B(7, 8), \Gamma(1, -4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$ και $\overrightarrow{AF} = (3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$.

(Μονάδες 11)

β)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου A, B, Γ και τα διανύσματα $\vec{B\Delta}$ και $\vec{\Gamma E}$ τέτοια ώστε $\vec{B\Delta} = \vec{BA} + \vec{B\Gamma}$ και $\vec{\Gamma E} = \vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma B}$.

α)

i. Να δείξετε ότι $\vec{A\Delta} = \vec{B\Gamma}$ και $\vec{AE} = \vec{\Gamma B}$.

(Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A\Delta}$ και $\vec{AE}$ είναι αντίθετα.

(Μονάδες 8)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία A, Δ και E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(1,-1)$ και $B(3,5)$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .

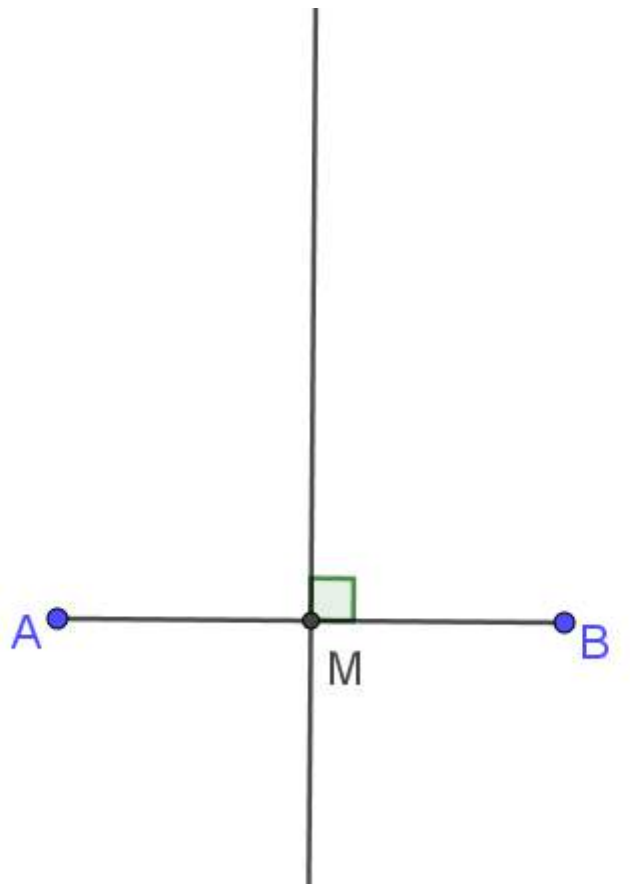
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος AB .

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος C με κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho=2$ και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x+4y-1=0$.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C .

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1,2)$ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

(Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα $\vec{\alpha}^2$ και $\vec{\beta}^2$.

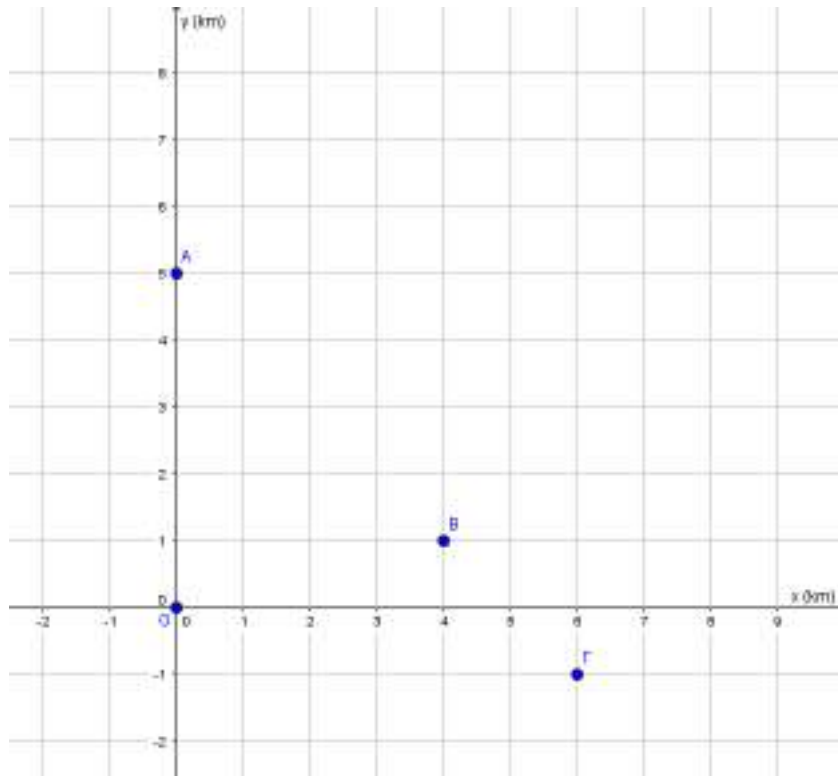
(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



α)

- i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 06)

- ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $B(6, -1)$.

α)

- i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

(Μονάδες 5)

- ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB , είναι το σημείο $M(3,2)$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB .

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(6,3)$, $\Delta(1,-2)$ και $\Gamma(9,2)$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το μέσο M του τμήματος AB έχει συντεταγμένες $(4,2)$ και το μέσο N του τμήματος $\Gamma\Delta$ έχει συντεταγμένες $(5,0)$.

(Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{MN} = (1, -2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$.

(Μονάδες 8)

γ) $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2,1)$ και $\overrightarrow{AG} = (3,-1)$.

α) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{BG} = (1,-2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτείνουσα την ΑΓ.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(-3, 2)$, $B(1, 6)$ και $\Gamma(-13, -7)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A, B .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A, B έχει εξίσωση $y = x + 5$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην AB .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

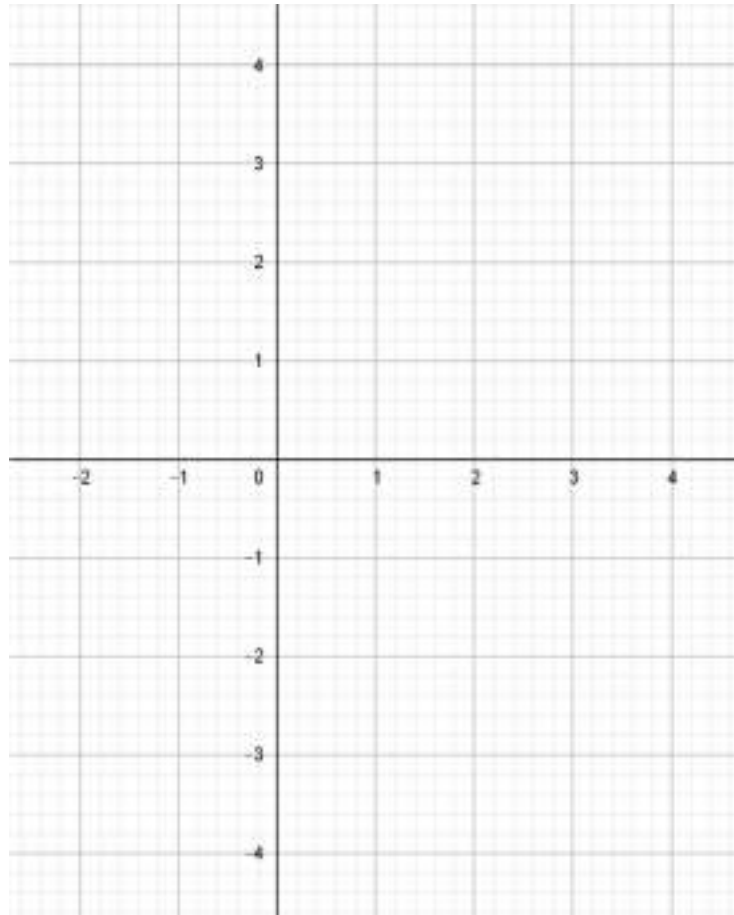
Δίνονται τα διανύσματα $\vec{v} = (3, 0)$ και $\vec{w} = (-3, 4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

β)

i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$.



(Μονάδες 10)

ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας θ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$, $\vec{\beta} = (3,-1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

β) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$ και $\Gamma(1,1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να εξετάσετε αν τα σημεία A, B και Γ ορίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ και $\overrightarrow{AG} = (3, -1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{BG} = (1, -2)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BG}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BG}|$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$.

α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο M .

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 : 3x - y = 4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ με κέντρο $K(1, 2)$ και η ευθεία

$$\varepsilon : 3x + 4y + 1 = 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 4$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη $\left(\vec{\alpha}, \vec{\gamma} \right)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,2)$, $\vec{\beta} = (-2,1)$.

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

(Μονάδες 7)

β) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 6)

γ) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του μέτρου του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,3)$

α) i) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα A, B .

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η $(\epsilon): y = 2x - 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει στην ευθεία (ϵ) .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

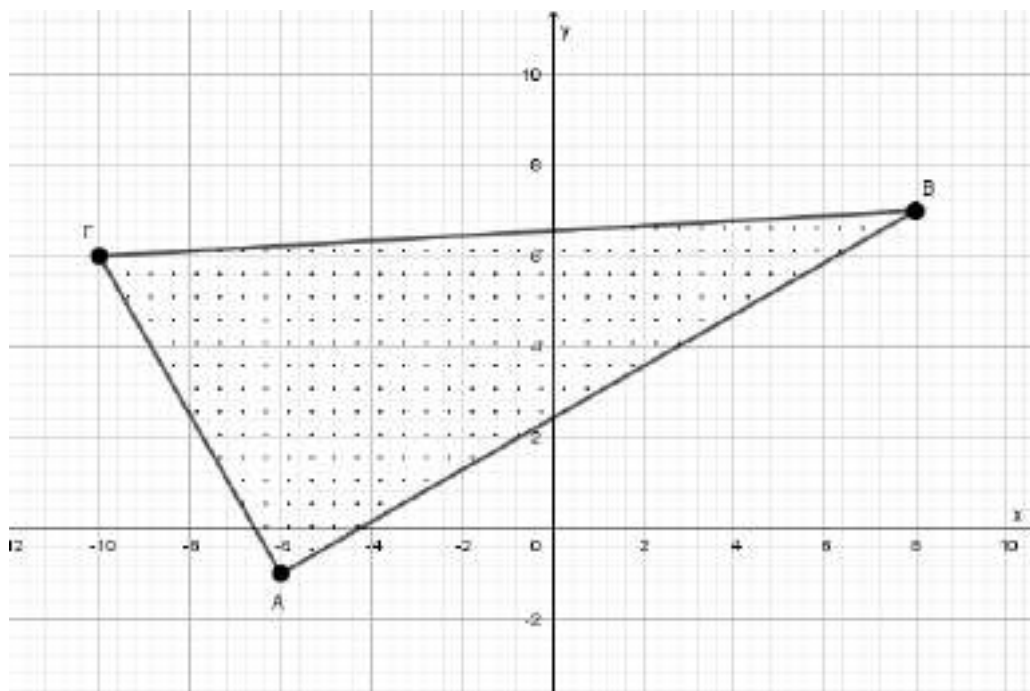
(Μονάδες 13)

β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (c) και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(-6, -1)$, $B(8, 7)$, $\Gamma(-10, 6)$, τα οποία ορίζουν τρίγωνο $AB\Gamma$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και του αθροίσματος τους $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(3, -2)$ και $\Gamma(5, 2)$. Αν το σημείο $M\left(3, \frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $B(1, -1)$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $A\Gamma$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή $(C): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E' και E .

(Μονάδες 10)

β) Αν το N είναι τυχαίο σημείο της (C) , να βρείτε την τιμή της διαφοράς $|(NE') - (NE)|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή (C) .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς 10 και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

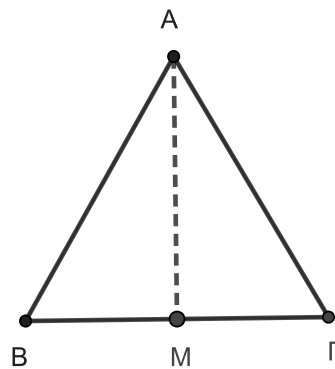
- i. $(\widehat{AB}, \widehat{A\Gamma})$
- ii. $(\widehat{AM}, \widehat{B\Gamma})$
- iii. $(\widehat{AM}, \widehat{\Gamma A})$
- iv. $(\widehat{BM}, \widehat{\Gamma M})$
- v. $(\widehat{\Gamma M}, \widehat{\Gamma B})$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

- i. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$
- ii. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Gamma A}$
- iii. $\overrightarrow{\Gamma M} \cdot \overrightarrow{\Gamma B}$

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O , πλευρά 4 και $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

α) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

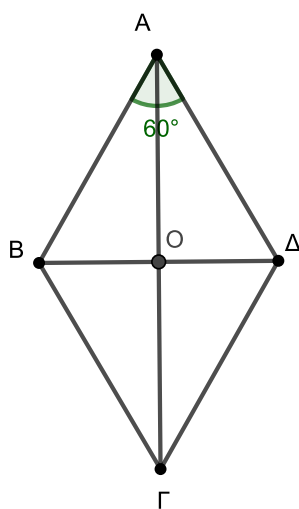
β) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

γ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AO}$

δ) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}$

ε) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(Μονάδες 25)



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

(Μονάδες 09)

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Οx.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσής των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1) : 8\chi + \psi - 28 = 0$, $(\varepsilon_2) : \chi - \psi + 1 = 0$, $(\varepsilon_3) : 3\chi + 4\psi + 5 = 0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των (ε_1) και (ε_2) .

(Μονάδες 09)

β) Αν το σημείο τομής είναι το $M(3,4)$ να υπολογίσετε:

i. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου O η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 08)

ii. Την απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ε_3) .

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: y = \frac{2}{3}x + 1$ και $\varepsilon_2: x = \frac{3}{2}y + 9$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (-3, 2)$.

α) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (x, y)$ όταν $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$ και $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(0, 8)$, $\Gamma(5, 3)$ και $\Delta(10, 5)$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 12)

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με: $|\vec{\alpha}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$ και $B(6,7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 07)

β) Αν $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$. (Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(11,5)$, $\Gamma(3,7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

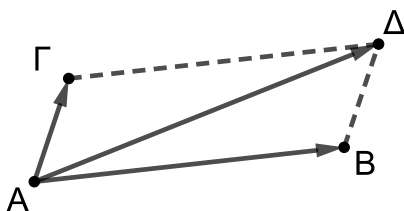
(Μονάδες 12)

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$.

(Μονάδες 08)

γ) του σημείου Δ .

(Μονάδες 05)



ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(-1, 6)$, $B(1, 2)$ και $\Gamma(3, -2)$.

- α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 06)
- γ) Να αποδείξετε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) και (ε_3) με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και $y = -1$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε_3) .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(1, -1)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,7)$, $B(-1,5)$ και $\Gamma(3,3)$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 09)

β) Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, τότε να υπολογίσετε:

- i. Τις συντεταγμένες του M .
- ii. Την εξίσωση της διαμέσου AM .

(Μονάδες 16)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $\Gamma(4,-1)$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$.

α) Να βρεθεί το σημείο B .

(Μονάδες 09)

β) Αν $B(5,0)$:

i. Να δείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

(Μονάδες 08)

β) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενής του στο σημείο A .

(Μονάδες 09)

ii. Να βρεθεί το σημείο B , το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(2,5)$, $B(3,6)$ και $\Gamma(-1,-2)$.

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$.

(Μονάδες 07)

β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το A .

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(-8, 1)$, $B(4, 5)$ και $\Gamma(-4, 9)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του ευθυγράμμου τμήματος AB .

(Μονάδες 08)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος (C) που έχει κέντρο το σημείο K και διάμετρο το τμήμα AB διέρχεται από το σημείο Γ .

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C) .

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία $A(1,1)$, $B(5,2)$, $\Gamma(0,-2)$ και $\Delta(8,0)$.

- α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου του ερωτήματος α). (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(2, 1)$, $\Gamma(3, -1)$ και $\Delta(4, 2)$.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A, B, Γ και Δ . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)

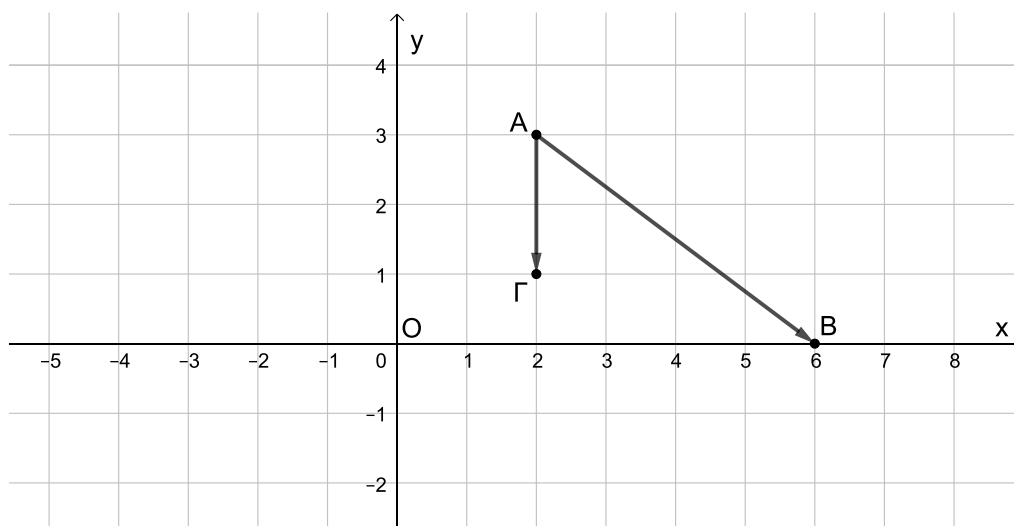
γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (4, -3)$ και $\overrightarrow{AG} = (0, -2)$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο κύκλος $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 8$.

α) Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του.

(Μονάδες 5)

β) Αν $K(1,2)$, να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι

$$d(K, \varepsilon) = \frac{13}{5}.$$

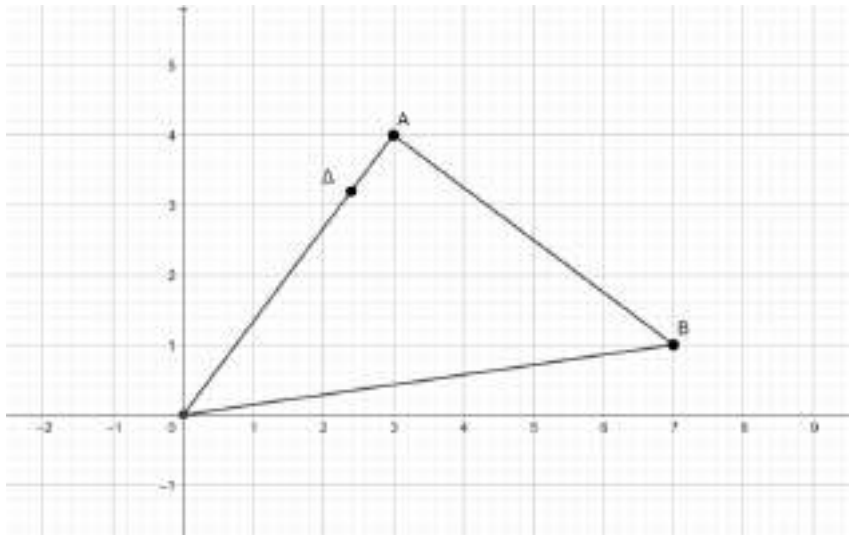
(Μονάδες 13)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο AOB με $A(3,4)$, $B(7,1)$, O η αρχή των αξόνων και το σημείο $\Delta\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ της πλευράς AO .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$.

(Μονάδες 9)

γ) Δίνεται ότι $(OAB) = \frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Να δείξετε ότι $(A\Delta B) = \frac{1}{5}(OAB)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η κωνική τομή με εξίσωση $(C) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της κωνικής τομής και να βρείτε μία εστία της.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(1, 2022)$ μπορεί να ανήκει στην (C) .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(-1, 5)$ και $B(2, 1)$. Αν οι πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1: y = -x + 4$ και $\varepsilon_2: y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma(4, 0)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε:

i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$

(Μονάδες 6)

ii. την εξίσωση του ύψους BD .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-3,5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB .

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(KA) = \sqrt{5}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $K(-3,1)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 4x - 3y + 5 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ε) .

(Μονάδες 9)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε) .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $A(1,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 3$.

α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ε) .

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες $(\eta), (\varepsilon)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

α) τον κύκλο C .

(Μονάδες 9)

β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον yy' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 8)

γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx' και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παραβολή C με εξίσωση $y^2 = 4x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της C .

(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C στο σημείο της $M(4,4)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή C , τη διευθετούσα δ και την ευθεία (ε).

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(-1,5)$, $B(3,3)$. Να υπολογίσετε:

α) Τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB .

(Μονάδες 8)

β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB .

(Μονάδες 8)

γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος AB .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται το σημείο $A(3, -4)$.

i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο C .

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x^2$ (1).

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο A(2,2).

(Μονάδες 10)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή (1), την εστία, τη διευθετούσα και την εφαπτομένη της παραβολής.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(6,0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA) = (MB)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ ώστε $A(5, 6)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(12, 2)$ και το ύψος του $A\Delta$, όπου Δ σημείο της $B\Gamma$, όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $B\Gamma$ και $A\Delta$.

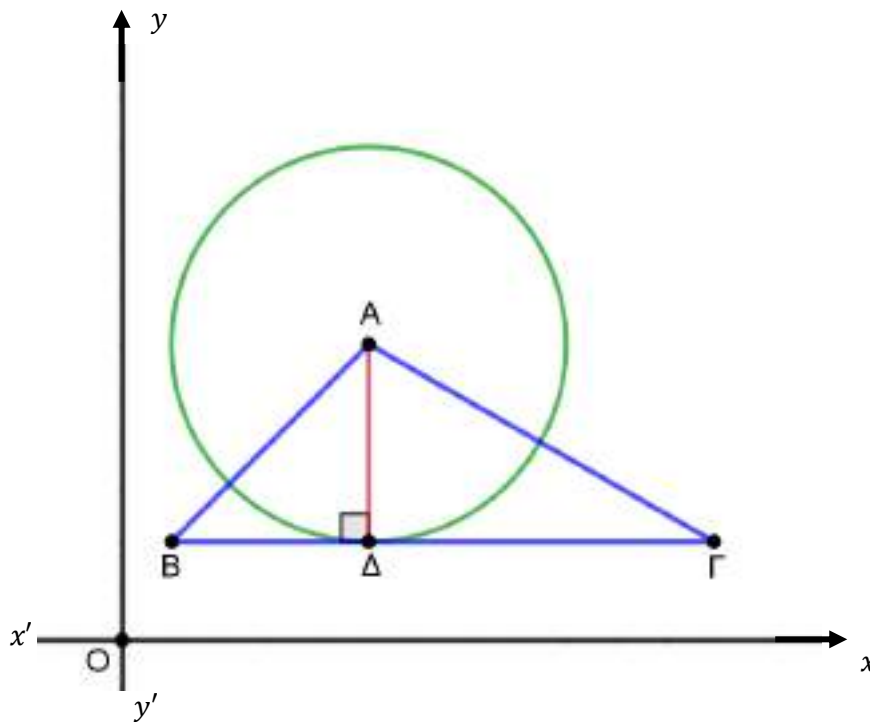
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο A , ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $B\Gamma$ στο σημείο Δ .

(Μονάδες 10)

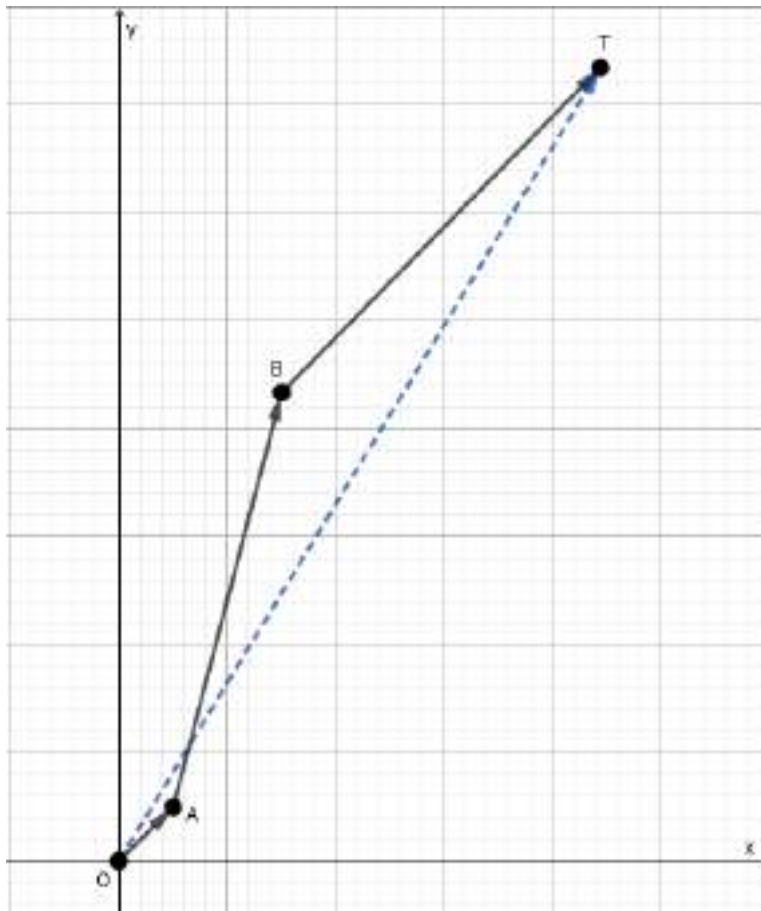


ΘΕΜΑ 2

Ένας εξερευνητής ξεκίνησε από την κατασκήνωσή του (σημείο O) τρεις μέρες πριν, για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφθασε στο σημείο A , στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφθασε στο σημείο B και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφθασε στο σημείο T . Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του μπορούν να περιγραφούν από τα παρακάτω διανύσματα

$$\overrightarrow{OA} = (1, 1), \quad \overrightarrow{AB} = (2, 4), \quad \overrightarrow{BT} = (2, 5\sqrt{3} - 5),$$

όπως φαίνονται στο σχήμα:



Αν οι αποστάσεις εκφράζονται σε χιλιόμετρα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OT} = (5, 5\sqrt{3})$.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$: (1).

α) Να δείξετε ότι ο κύκλος C έχει κέντρο $K(3,4)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

(10 μονάδες)

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K του κύκλου από την ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y = 0$ ισούται με 5 μονάδες μήκους.

(08 μονάδες)

γ) Να δικαιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός: «Ο κύκλος C και η ευθεία ε εφάπτονται».

(07 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + 3y = 5$ και $\varepsilon_2: 4x + 6y = 8$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας ε_1 .

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε_2 .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,3)$, $\vec{\beta} = (-1,1)$ και $\vec{\gamma} = (-5,-5)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ , μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση

$$(x - 1)(x + 3) + (y + 1)(y - 3) = -4 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R = 2$.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να βρείτε τα σημεία A και B του κύκλου (K,R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με -1 .

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$.

- α) Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $(\frac{1}{8}, 1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 8x - 2y + 3 = 0$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η έλλειψη (c) με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι $a = 4$, $b = 2$ και $c = 2\sqrt{3}$.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες της έλλειψης (c) .

(Μονάδες 08)

γ) Να σχεδιάσετε την έλλειψη (c) και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 16$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{w} = (-10,2)$ και τα σημεία $A(-1,2)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(0, \gamma)$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα και το διάνυσμα $\vec{w}$ είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και να αποδείξετε ότι $\beta = 1$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{9}{5}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της.

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη C σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα τις εφαπτόμενες στις κορυφές της C και να γράψετε τις εξισώσεις τους.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή C με εξίσωση $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

α) Να βρείτε τις εστίες της C .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της C .

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε την υπερβολή C και τις ασύμπτωτές της στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι τα διάνυσμα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{\beta}| = 4|\vec{\alpha}|$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ και $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

α) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{BG}$ συναρτήσει του διανύσματος $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $\vec{u} = (4, -1)$ να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v} = (1, \kappa)$.

(Μονάδες 09)

γ) Για $\kappa = 4$ να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ του προηγούμενου ερωτήματος.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + y + 2 = 0$.

α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να δείξετε ότι το σημείο $A(0, 6)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 .

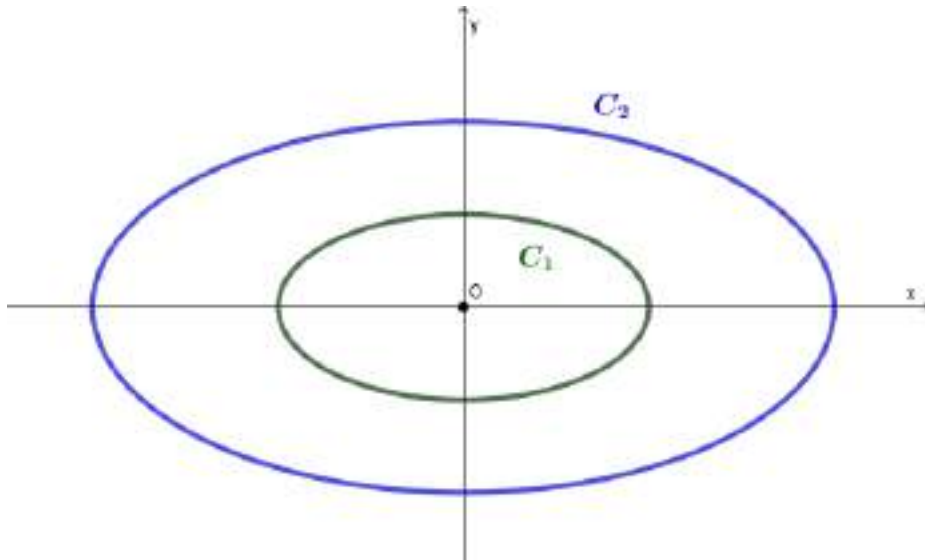
(Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: x^2 + 4y^2 = 4$, $C_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ και οι γραφικές τους παραστάσεις στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε τα μήκη των αξόνων και τις εστίες των δύο ελλείψεων.

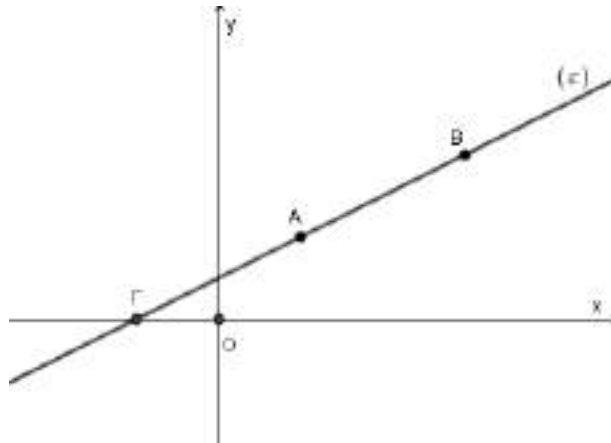
(Μονάδες 14)

β) Από το σχήμα φαίνεται ότι οι δύο ελλείψεις έχουν την ίδια εκκεντρότητα. Να αποδείξετε ότι αυτό είναι αληθές.

(Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,2)$ και Γ μιας ευθείας (ε) .



α) Να βρείτε την κλίση λ της ευθείας (ε) .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

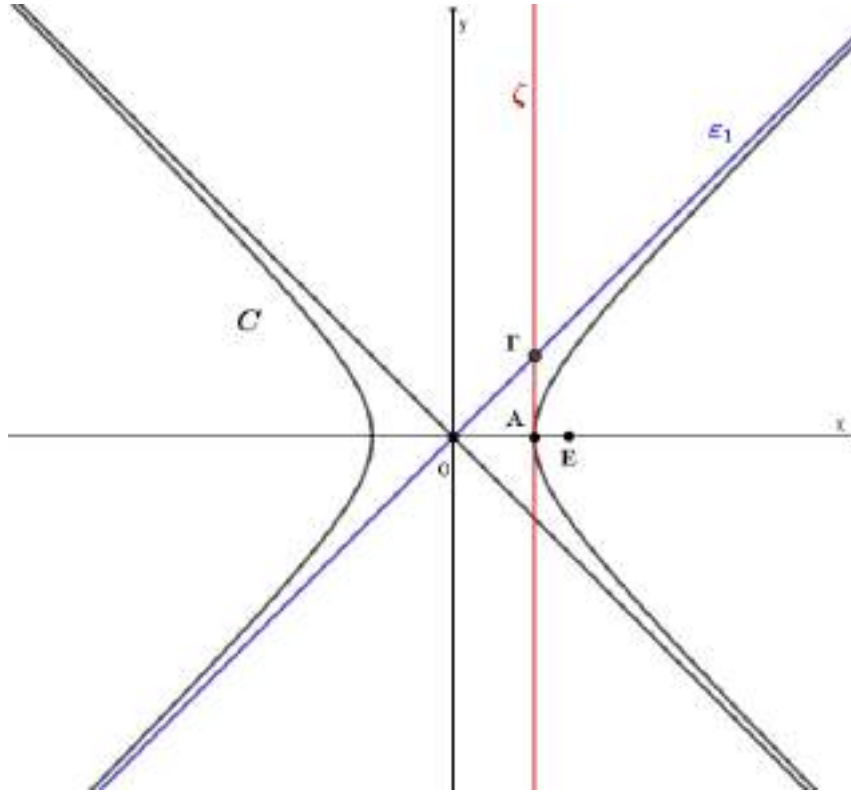
(Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ , στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η υπερβολή $C: x^2 - y^2 = 1$, η εστία της E , η εφαπτομένη της ζ στο σημείο $A(1,0)$ και το σημείο Γ στο οποίο αυτή τέμνει την ασύμπτωτη ευθεία ε_1 της υπερβολής.



α) Να βρείτε τις εστίες E', E και τις ασύμπτωτες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της υπερβολής.

(Μονάδες 10)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ζ .

(Μονάδες 07)

ii. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(1,1)$.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης C: $16x^2 + 25y^2 = 400$.

α) Να βρείτε τα μήκη BB' , AA' του μικρού και τον μεγάλου άξονα της έλλειψης, καθώς και τις εστίες της E και E' . (Μονάδες 12)

β) Αν $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$, να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο E' και διευθετούσα την ευθεία που διέρχεται από το E και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-3, -1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε . (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι: $E = 8$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 5$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$

και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(3,-3)$, $B(2,-8)$ και $\Gamma(7,-3)$. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην πλευρά $B\Gamma$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

α) Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ όπου O η αρχή των αξόνων.

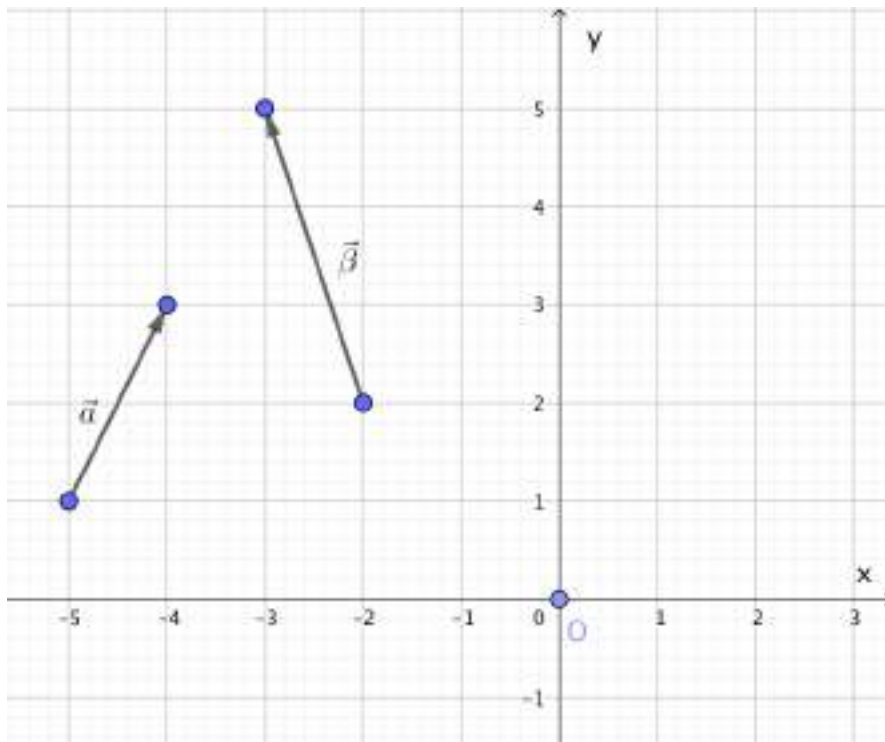
(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 08)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της ε .

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε .

(Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία ε είναι το B .

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(3,2)$ και $B(-1,-6)$. Να βρεθούν:

α) Οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB . (Μονάδες 8)

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B .

(Μονάδες 8)

γ) Η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας (ϵ) του ευθύγραμμου τμήματος AB . (Μονάδες 9)

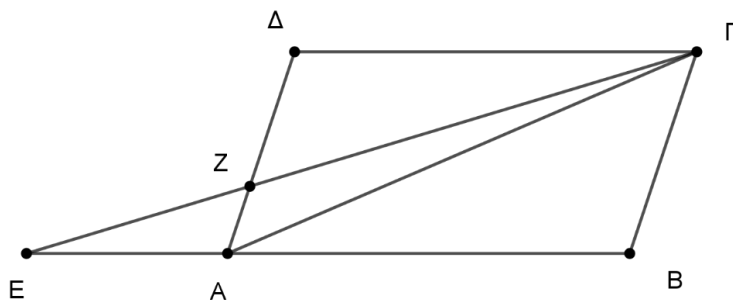
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$. Τα σημεία E και Z είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{Z\Gamma} = 2\overrightarrow{EZ}$. (Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Z , E και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι υπερβολές $(C_1): x^2 - y^2 = 1, (C_2): y^2 - x^2 = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εστίες της C_1 είναι οι $E_1(\sqrt{2}, 0), E'_1(-\sqrt{2}, 0)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν E_2, E'_2 οι εστίες της C_2 τότε να αποδείξετε ότι το $E_1 E_2 E'_1 E'_2$ είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $E(2,0)$, η ευθεία $\delta_1 : x = -2$ και τυχαίο σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου.

α)

- i. Να βρείτε την απόσταση (ME) του σημείου $M(x,y)$ από το $E(2,0)$ ως συνάρτηση των x,y .

(Μονάδες 8)

- ii. Να βρείτε την απόσταση $d(M,\delta)$ του σημείου M από την ευθεία δ ως συνάρτηση των x,y .

(Μονάδες 8)

- β) Αν ισχύει $(ME) = d(M,\delta)$ να δείξετε ότι το σημείο M ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία (ε): $y - 2x = 0$ και τα σημεία $B(1,1)$ και $\Gamma(-1,3)$.

α) Να δείξετε ότι το σημείο $A(5,10)$ ανήκει στην ευθεία (ε).

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η παραβολή με άξονα συμμετρίας τον x' , κορυφή $O(0,0)$ και εστία $E(2,0)$, όπως στο παρακάτω σχήμα. Το σημείο A της παραβολής έχει τετμημένη 3 και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του Oxy .

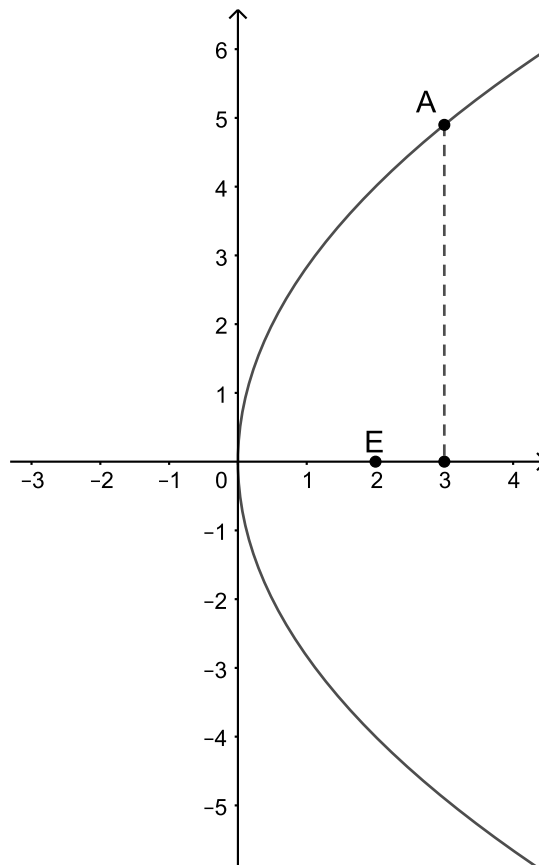
α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 8x$ και ότι $A(3, 2\sqrt{6})$.

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη διευθετούσα (δ) της παραβολής και να γράψετε την εξίσωσή της.

(Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο A . (Μονάδες 09)



ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 12y$.

α) Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(0, 3)$ και να βρείτε τα σημεία της παραβολής που έχουν τεταγμένη 3. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι εφαπτομένες (ε_1) και (ε_2) της παραβολής στα σημεία $A(6, 3)$ και $B(-6, 3)$, αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις $y = x - 3$ και $y = -x - 3$. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) . (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των εστιών E και E' της έλλειψης και την απόστασή τους.

(Μονάδες 09)

β) Το μήκος του μικρού άξονα και το μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης.

(Μονάδες 08)

γ) Την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της έλλειψης στο σημείο της $B(0,4)$.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2

Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(4,0), E'(-4,0)$ και μεγάλο άξονα 10. Να βρείτε:

α) την εξίσωση της C .

(Μονάδες 10)

β) την εκκεντρότητά της C .

(Μονάδες 7)

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{9}{5})$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Η έλλειψη C έχει εστίες τα σημεία $E(3,0), E'(-3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(4, \frac{12}{5})$.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος του μεγάλου άξονα είναι 10.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της C .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(4, \frac{12}{5})$.

(Μονάδες 7)

Δίνεται ότι $\sqrt{1369} = 37$

ΘΕΜΑ 2

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$. Να

βρείτε:

α) την εξίσωση της C .

(Μονάδες 10)

β) τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της C .

(Μονάδες 8)

γ) την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Η υπερβολή C έχει εστίες τα σημεία $E(5,0), E'(-5,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(4,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει εκκεντρότητα $\frac{5}{4}$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της C .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο της $M(5, \frac{9}{4})$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: -x + y - 2 = 0$ και τα σημεία $A(-5,1)$ και $B(-3,5)$.

α) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς το σημείο B . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε:

i. την εξίσωση της ευθείας ε' που διέρχεται από το B και είναι κάθετη στην ε .

(Μονάδες 5)

ii. το σημείο τομής των ευθειών ε και ε' .

(Μονάδες 5)

iii. το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία ε .

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$, $\Gamma(2, 5)$.

α) Να βρείτε σημείο Δ ώστε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το κέντρο O του παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (11, 2)$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (-5, -10)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 14)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$.

(Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(0,3)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(1,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι ορθή. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το μέσο K της υποτείνουσας $B\Gamma$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται το σημείο $A(4, -2)$ και η ευθεία (ε_1) με εξίσωση: $x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:

α) την ευθεία (ε_2) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1) .

(Μονάδες 8)

β) το σημείο τομής B , των ευθειών (ε_1) και (ε_2) : $y = -x + 2$.

(Μονάδες 8)

γ) το συμμετρικό Γ του σημείου A , ως προς την ευθεία (ε_1) .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(2, -4)$ και $B(0, -2)$

α) Να βρείτε το μέσο M του τμήματος AB . (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB .
(Μονάδες 8)

γ) Αν $(\zeta): y = x - 4$ και $(\epsilon): y = 2 \cdot x - 6$, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ) και (ϵ) .
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5, -12)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 7.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-4, 3)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

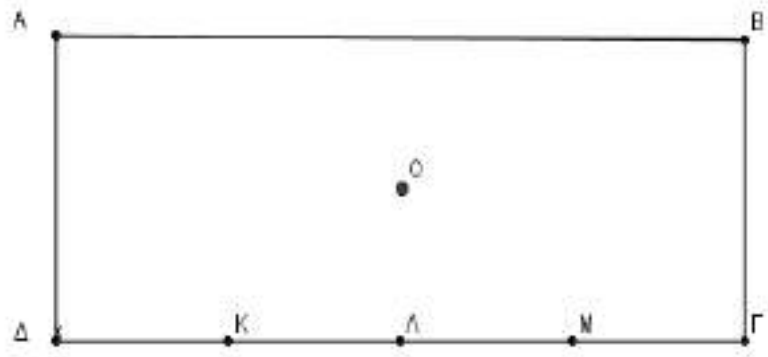
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα φαίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Τα σημεία Κ, Λ, Μ χωρίζουν την πλευρά ΔΓ σε τέσσερα ίσα τμήματα.



Αν $\overrightarrow{ΔΚ} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{ΔΑ} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε καθένα από τα ακόλουθα διανύσματα ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) $\overrightarrow{ΔΓ}$

(Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{ΜΑ}$

(Μονάδες 8)

γ) $\overrightarrow{ΟΔ}$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(4,0)$ και $\Gamma(5,1)$.

α) Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να τοποθετήσετε σε αυτό τα σημεία A, B, Γ .

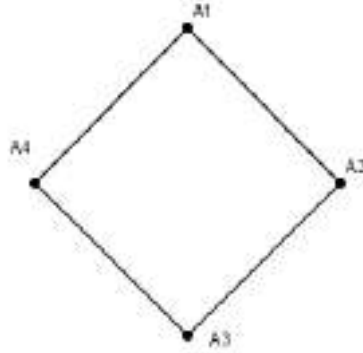
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4 . Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.



α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου. Ποιά σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο παράλληλων πλευρών;

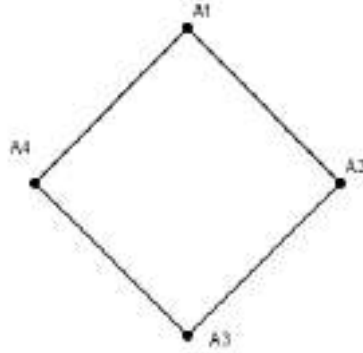
(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = 2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4 . Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ οι κλίσεις των ευθειών $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ αντίστοιχα.



α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποιά σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο κάθετων πλευρών;

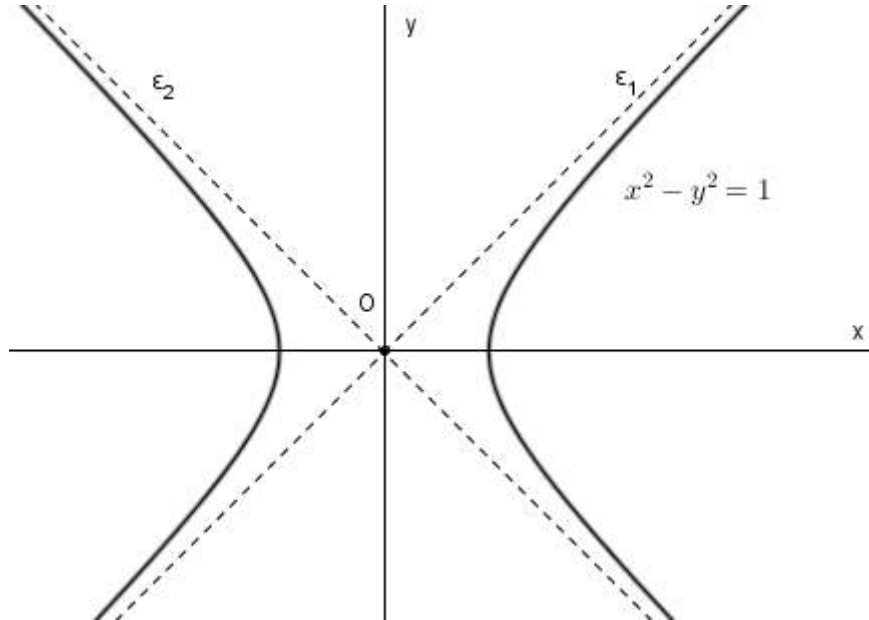
(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1 = -4$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Να αποδείξετε για τις ασύμπτωτες ευθείες ε_1 και ε_2 της υπερβολής ότι:



α) Συμπίπτουν με την διχοτόμο του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου και την διχοτόμο του 2^{ου} και 4^{ου} τεταρτημορίου, αντίστοιχα.

(Μονάδες 13)

β) Είναι ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 5)$ και $\vec{\beta} = (1, -3)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (8, -21)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$.



α) Να εξηγήσετε γιατί:

(i) το μήκος της πλευράς BA είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'A'$ και

(Μονάδες 3)

(ii) το μήκος της πλευράς AG είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $A'\Gamma'$.

(Μονάδες 3)

β) i. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B'\Gamma'}$.

(Μονάδες 10)

ii. Να εξηγήσετε γιατί το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $B'\Gamma'$.

(Μονάδες 3)

γ) Θα μπορούσε η ακόλουθη πρόταση να ήταν κριτήριο ισότητας τριγώνων;

«Αν για δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ισχύει $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$ και $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$, τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2

Έστω Ω το σύνολο όλων των σημείων (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $x^2 + y^2 \leq 9$.

α) Να σχεδιάσετε το σύνολο Ω σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy .

(Μονάδες 13)

β) Υπάρχει σημείο A στο σύνολο Ω τέτοιο ώστε $|\overrightarrow{OA}| = 4$, όπου O η αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $A(1, -3)$ και η ευθεία $\varepsilon: 4x + 6y = 1$.

α) Να εξηγήσετε γιατί το A δεν είναι σημείο της ευθείας ε .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία ε .

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(0, 2)$, $B(3, 0)$, $\Gamma(6, 2)$ και $\Delta(3, 4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Delta}$ και να επιβεβαιώσετε ότι:
 $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $|\overrightarrow{B\Delta}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$. Ποιο είναι το σχήμα του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$;

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Οι πλευρές AB και AD ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ έχουν εξισώσεις $x+2y+1=0$ και $2x+y+5=0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $K(1,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η κορυφή A του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $A(-3, 1)$. (Μονάδες 08)

ii. Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες $\Gamma(5, 3)$. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι εξισώσεις (1): $\lambda x + (\lambda - 1)y - 4 = 0$ και (2): $(3\lambda + 1)x - 2\lambda y - 7 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες με εξισώσεις τις (1) και (2) να είναι μεταξύ τους κάθετες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφή $A(1,4)$. Η πλευρά $A\Delta$ έχει εξίσωση $3x - 2y + 5 = 0$ και η διαγώνιος $B\Delta$ έχει εξίσωση $y = x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες $\Delta(-1,1)$. (Μονάδες 12)

β) Αν οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $A\Gamma$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 2$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K,R) .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K,R) στο A .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

α) Αν η παραβολή διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$, να βρείτε:

i. Την εξίσωση της παραβολής. (Μονάδες 10)

ii. Την εστία E της παραβολής. (Μονάδες 05)

β) Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με κέντρο το O , αν η μια εστία της είναι το σημείο $E(1,0)$ και ο μεγάλος άξονας της έχει μήκος ίσο με 4.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με ασύμπτωτη την $y = \frac{3}{4}x$. Η απόσταση των κορυφών της A και A' είναι 8.

α)

i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής. (Μονάδες 10)

ii. Ποιες είναι οι εστίες της υπερβολής; (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ στο σημείο της $(5, \frac{9}{4})$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = (-2, -\frac{1}{2})$ και $\vec{\gamma} = (x^2, x - 1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{u} = (3, 4)$ και $\vec{\gamma}$ είναι κάθετα.
(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε τους αριθμούς x για τους οποίους τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά;
(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x - y = 5$ και $\varepsilon_2: x - y + 1 = 0$.

- α) Να βρεθεί το σημείο τομής τους M . (Μονάδες 10)
- β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(3,4)$ και είναι κάθετη στην (ε_2) . (Μονάδες 10)
- γ) Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην (ε_1) . (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 0$ και το σημείο $A(-2,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου A από την ευθεία είναι 2. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ε) που διέρχεται από το σημείο A .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην ευθεία (ε).

(Μονάδες 07)

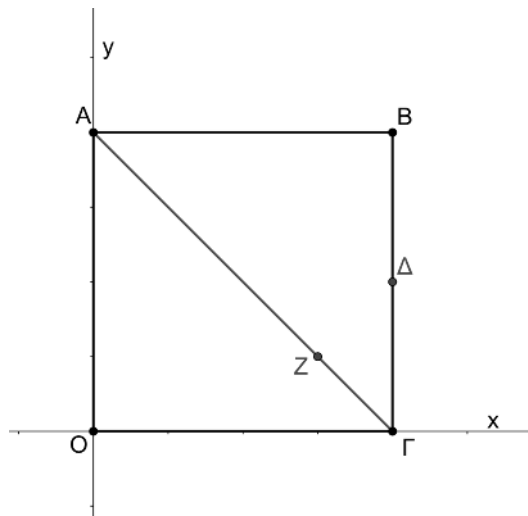
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΟ με κορυφές τα σημεία Α(0,4), Β(4,4), Γ(4,0), Ο(0,0). Στην διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AG}$. Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της ΒΓ.

α) Να βρείτε:

- i. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ. (Μονάδες 07)
- ii. Τις συντεταγμένες του σημείου Ζ. (Μονάδες 09)

β) Αν το σημείο Δ είναι το (4,2) και το σημείο Ζ το (3,1), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ. (Μονάδες 09)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παραβολή (C) με εξίσωση

$$y^2 = x \quad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ).

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο A(1,-1) είναι σημείο της παραβολής.

(Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης παραβολής στο σημείο της A(1,-1).

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η έλλειψη (C) με εξίσωση

$$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{81} = 1 \quad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E'.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B(0,9) είναι σημείο της έλλειψης.

(Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης έλλειψης στο σημείο της B(0,9).

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση

$$x^2 - y^2 = 25 \quad (1)$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών E και E'.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (ϵ_1) , (ϵ_2) της υπερβολής.

(Μονάδες 10)

γ) Τι γωνία σχηματίζουν οι ασύμπτωτες (ϵ_1) , (ϵ_2) ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $y^2 = 4x$ (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Η εστία της Ε, έχει συντεταγμένες $E(.....,)$ και η διευθετούσα έχει εξίσωση».

(Μονάδες 09)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην παραπάνω καμπύλη στο σημείο $A(1, -2)$.

(Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι σημείο της διευθετούσας της παραβολής.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (1).

α) Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένη την παρακάτω πρόταση :

«Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μια καμπύλη που ονομάζεται Οι εστίες της Ε και Ε', έχουν συντεταγμένες Ε(.....,) και Ε'(.....,) . Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι ίσο με και η εκκεντρότητα της είναι ίση με».

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία εφάπτεται στην καμπύλη που περιγράφει η εξίσωση (1), στο σημείο της Β(0,-2).

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση : $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (1).

α) Να προσδιορίσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας :

- i. Τις συντεταγμένες των εστιών της.
- ii. Την εκκεντρότητά της.
- iii. Τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που εφάπτεται στην υπερβολή στο σημείο της,

$A(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση

$$(y - 1)^2 = (3 + x)(1 - x) \quad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R = 2$.

(Μονάδες 9)

β) Η αρχή $O(0,0)$ των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K,R) .

(Μονάδες 7)

γ) Η ευθεία $(\varepsilon): x + y = 2$ είναι τέμνουσα του κύκλου (K,R) .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy , με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$, $y'y$ τα $\vec{i}, \vec{j}$ αντίστοιχα, τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\vec{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$.

Έστω M ένα σημείο τέτοιο ώστε $\vec{OM} = \frac{1}{5}(\vec{OA} - \vec{OB})$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$, (Μονάδες 8)

ii. $\vec{OM} = \vec{j}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{OM}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

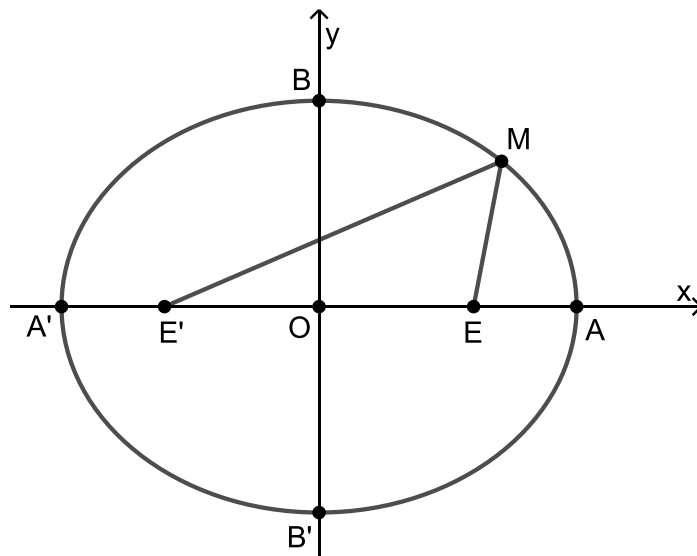
Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει κορυφές τα σημεία $A'(-5, 0)$, $A(5, 0)$, $B'(0, -4)$ και $B(0, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα μήκη των αξόνων της έλλειψης είναι $(A'A) = 10$ και $(B'B) = 8$. (Μονάδες 10)

ii. Οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$. (Μονάδες 10)

β) Έστω M ένα σημείο της έλλειψης. Να αποδείξετε ότι $(ME') + (ME) = 10$. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 2

Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει βάση $B\Gamma$ και ύψος AO . Η κορυφή A είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές B και Γ είναι σημεία του άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω $(B\Gamma) = 12$, $(AO) = 8$ και M το μέσο της πλευράς $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A(0, 8)$, $B(-6, 0)$ και $\Gamma(6, 0)$.

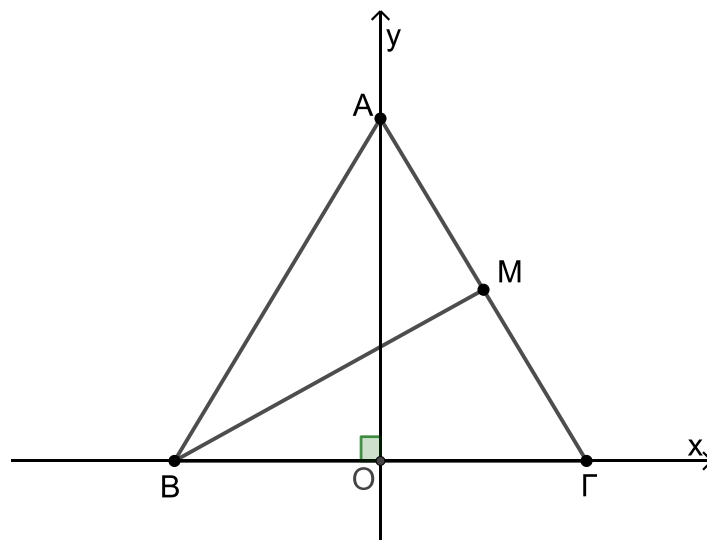
(Μονάδες 9)

ii. $M(3, 4)$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου BM .

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2

Η έλλειψη του παρακάτω σχήματος έχει εστίες τα σημεία $E'(-2, 0)$ και $E(2, 0)$ και μήκος μεγάλου άξονα $(A'A) = 8$.

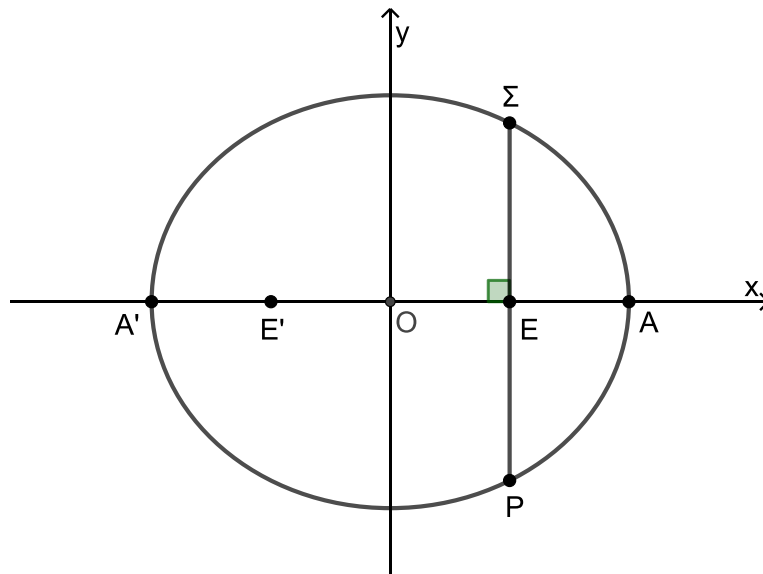
α) Να αποδείξετε ότι η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. (Μονάδες 12)

β) Έστω Σ και P τα σημεία της έλλειψης που έχουν την ίδια τετμημένη με την εστία $E(2, 0)$.

Επίσης το Σ έχει θετική τεταγμένη και το P αρνητική τεταγμένη.

i. Να αποδείξετε ότι $\Sigma(2, 3)$ και $P(2, -3)$. (Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΣP . (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 2

Η υπερβολή στο παρακάτω σχήμα έχει εστίες τα σημεία $E'(-10, 0)$ και $E(10, 0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-8, 0)$ και $A(8, 0)$.

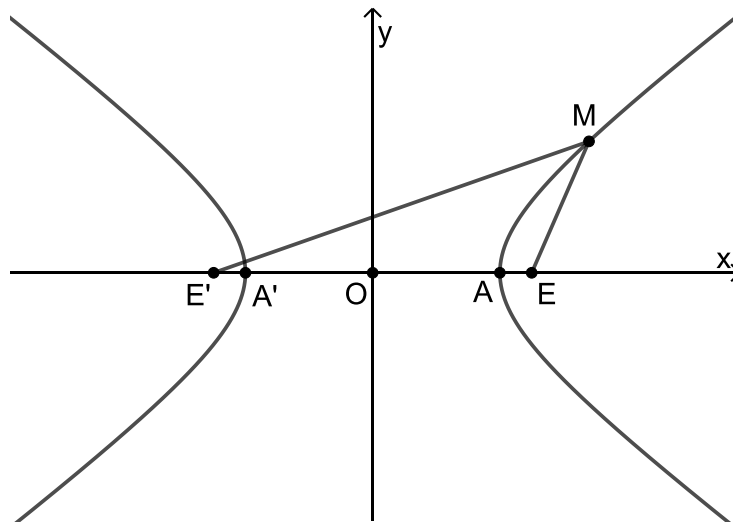
α) Να αποδείξετε ότι η υπερβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. (Μονάδες 12)

β) Έστω M ένα σημείο της υπερβολής.

i. Να αποδείξετε ότι $|(ME') - (ME)| = 16$. (Μονάδες 8)

ii. Αν $(ME) = 9$, να βρείτε την απόσταση του σημείου M από την εστία E' .

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 2

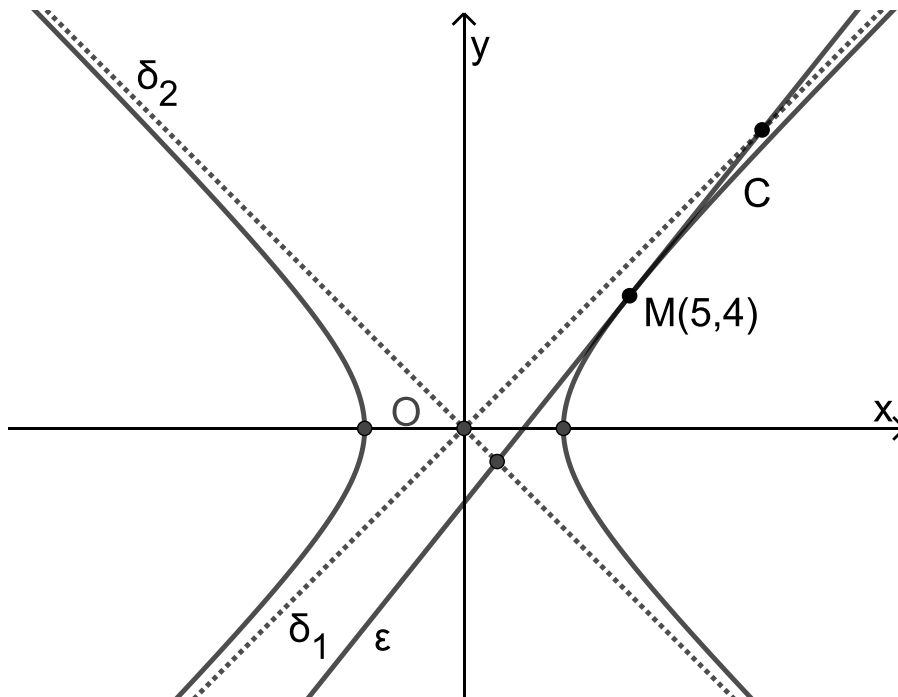
Στο παρακάτω σχήμα η υπερβολή C έχει εξίσωση $x^2 - y^2 = 9$, οι ευθείες δ_1 και δ_2 είναι οι ασύμπτωτες της C και η ε είναι η εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(5, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι εξισώσεις των ασυμπτώτων είναι $\delta_1: y = x$ και $\delta_2: y = -x$. (Μονάδες 8)

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι $\varepsilon: 5x - 4y = 9$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_1 καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε και δ_2 . (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1$ και $C_2: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(2,2)$ και $B(-2,2)$ ανήκουν και στις δύο ελλείψεις.

(Μονάδες 10)

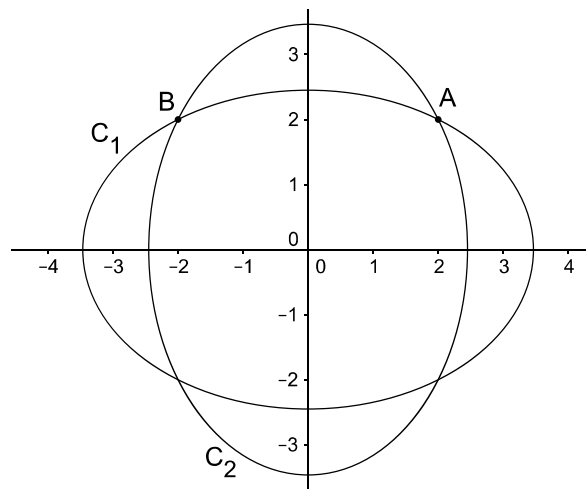
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο A και η εξίσωση της εφαπτομένης ε_2 της έλλειψης C_2 στο σημείο B είναι αντίστοιχα

$$x + 2y - 6 = 0 \text{ και } -2x + y - 6 = 0 .$$

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση $4x^2 - y^2 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής της υπερβολής είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι $y = 2x$ και $y = -2x$.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A και είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = -2x$ έχει εξίσωση $y = -2x + 2$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα x' στα σημεία

$A'(-4, 0)$ και $A(4, 0)$ και έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{3}{4}x$ και $y = -\frac{3}{4}x$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha = 4$ και $\beta = 3$, (Μονάδες 10)

ii. οι εστίες της C είναι τα σημεία $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$. (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε το παρακάτω σχήμα, συμπληρώνοντάς το με την παραπάνω υπερβολή C .

(Μονάδες 5)

