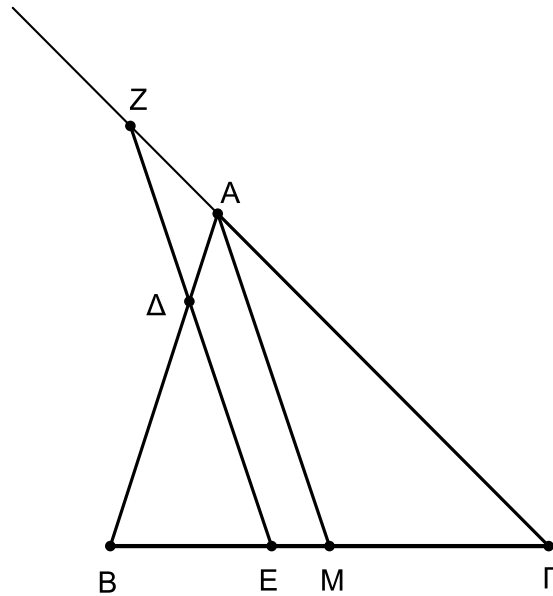


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.



α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\frac{DE}{\dots} = \frac{\dots}{BM} = \frac{BD}{\dots}$

ii. $\frac{\dots}{AM} = \frac{GE}{\dots} = \frac{\dots}{GA}$

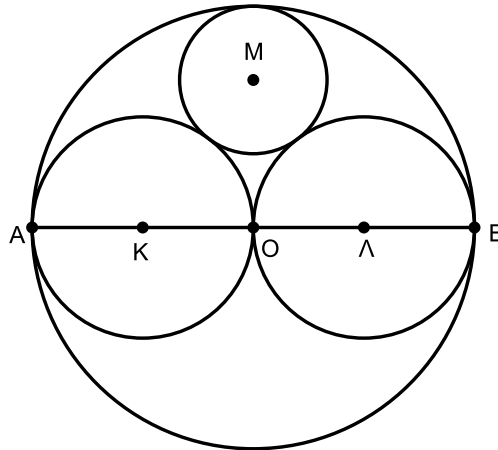
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $DE + EZ = 2AM$ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4

Δύο ίσοι κύκλοι (K, R) και (Λ, R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο O . Ένας τρίτος κύκλος (M, ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων K και Λ . Με κέντρο το σημείο O και ακτίνα $2R$ γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη A είναι οι διάκεντροι $K\Lambda$, ΛM και OM των κύκλων με κέντρα K , Λ , M και O και στη στήλη B τα μήκη των διακέντρων αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης A με τα αντίστοιχα της στήλης B, γράφοντας στην κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίες. (Μονάδες 06)

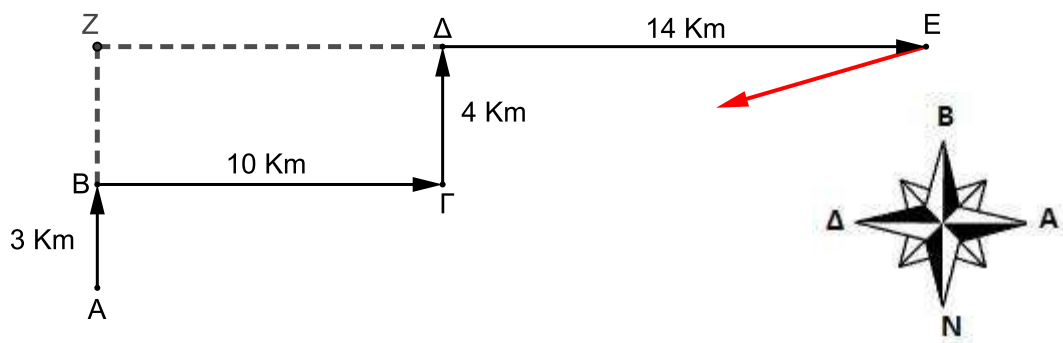
Στήλη A	Στήλη B
Διάκεντρος	Μήκος
1. $K\Lambda$	i. R
2. ΛM	ii. $2R$
3. OM	iii. $R+\rho$
	iv. $2R-\rho$

β)

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $M\Lambda K$ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα MO είναι το ύψος προς τη βάση του. (Μονάδες 06)
- Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου M ως συνάρτηση του R , όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων K και Λ . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4

Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



α)

- i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε; (Μονάδες 05)
- ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. (Μονάδες 12)

β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $GE = \frac{1}{4}GA$.

α) Αν Δ σημείο της AB τέτοιο ώστε $A\Delta = \frac{1}{3}AB$:

i. Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma) = 4(A\Delta E)$ (Μονάδες 10)

ii. Αν από τα E και Γ φέρουμε τις κάθετες EZ και ΓH προς την AB , να υπολογίσετε τον

λόγο $\frac{EZ}{\Gamma H}$ (Μονάδες 09)

β) Θεωρώντας ότι το E παραμένει ακίνητο, ενώ το Δ κινείται στο εσωτερικό της AB , να βρείτε σε ποιο σημείο πρέπει να βρεθεί το Δ ώστε $(AB\Gamma) = 2(A\Delta E)$ (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, BG, ΓΔ$ και $ΔE$ έχουν μήκη αντίστοιχα 12, 16, 8 και 10, οι γωνίες $ΑΒΓ$ και $ΔΓΕ$ είναι ορθές και τα σημεία $A, Γ$ και E ανήκουν στην ίδια ευθεία.

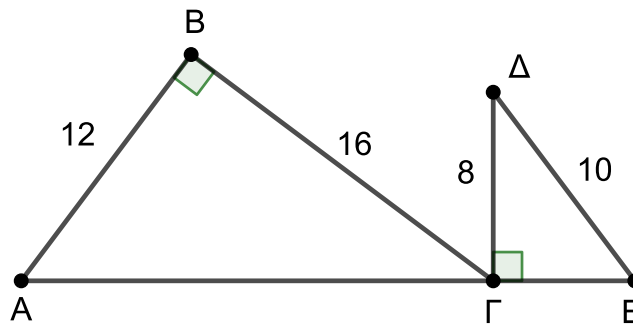
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE . (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ABΓ$ και $ΕΓΔ$ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών AB και $ΕΔ$ είναι το Z και ZH είναι το ύψος του τριγώνου $ΖΑΕ$ από την κορυφή του Z . Να αποδείξετε ότι:

i. $EH = 13$, (Μονάδες 6)

ii. $ZH = \frac{52}{3}$. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma = 10$ και έστω ότι Δ είναι η προβολή της κορυφής A στην $B\Gamma$.

α) Αν $\Delta B = 2$ να υπολογίσετε:

- i. το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$, (Μονάδες 7)
- ii. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)

β) Υποθέστε ότι το σημείο A κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$.

- i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(AB\Gamma) = 5A\Delta$.

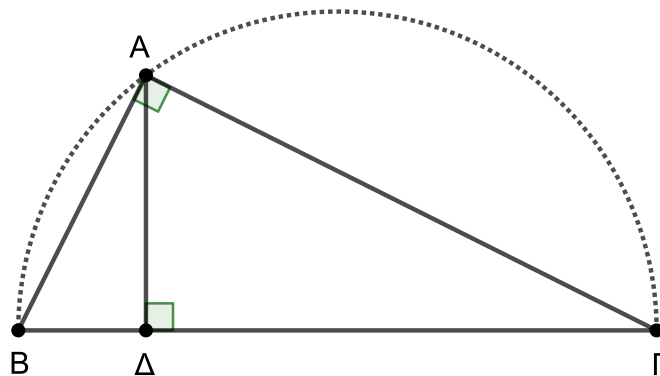
(Μονάδες 7)

- ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του A πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$, το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

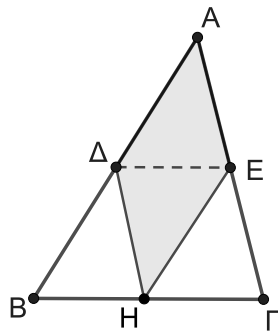
α) Έστω ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{1}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του

τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)

ii. Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζετε ότι $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG} = \lambda$, τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ και του τριγώνου ΑΒΓ; (Μονάδες 06)



ΘΕΜΑ 4

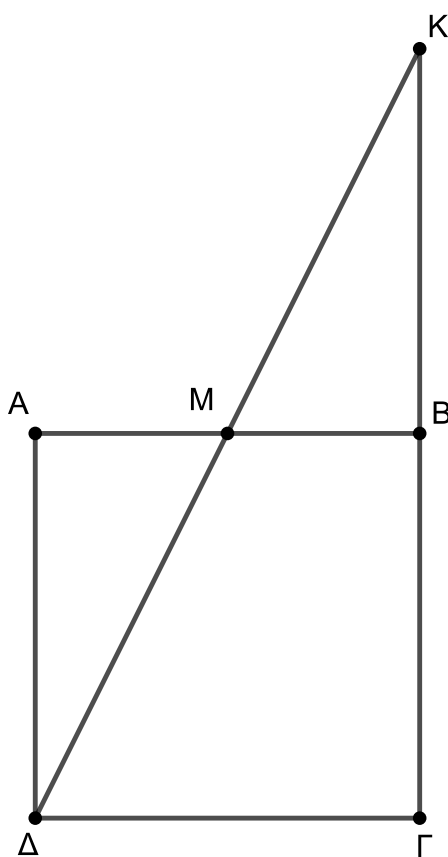
Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Οι ευθείες ΔΜ και ΓΒ τέμνονται στο Κ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι όμοια. (5 μονάδες)

β) $(ΜΚΒ) = \frac{1}{4} (ΔΚΓ)$ (5 μονάδες)

γ) $(ΜΒΓΔ) = \frac{3}{4} (ΑΒΓΔ)$. (10 μονάδες)

δ) Αν $(ΜΒΓΔ) = 75 \text{ m}^2$ να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου. (5 μονάδες)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις $AB = 24$, $ΒΓ = 12$ και σημείο Ε στην ευθεία ΑΒ.

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ όταν :

- i. Το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ.
- ii. Το σημείο Ε ταυτίζεται με την κορυφή Α του ορθογωνίου.

(Μονάδες 16)

β) Αφήνουμε το σημείο Ε να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος ΑΒ προς το Β, απομακρυνόμενο από το σημείο Β.

- i. Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου ΓΕΔ αυξάνεται ή μειώνεται.

(Μονάδες 05)

- ii. Για το εμβαδό του τριγώνου ΓΕΔ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ στο ερώτημα β)i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 04)

ΘΕΜΑ 4

Έστω τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $B\Gamma \parallel A\Delta$. Από το μέσο Z της $\Gamma\Delta$ φέρνουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Delta$ στο K και την προέκταση της $B\Gamma$ στο Θ . Επίσης φέρνουμε $ZH \perp AB$.

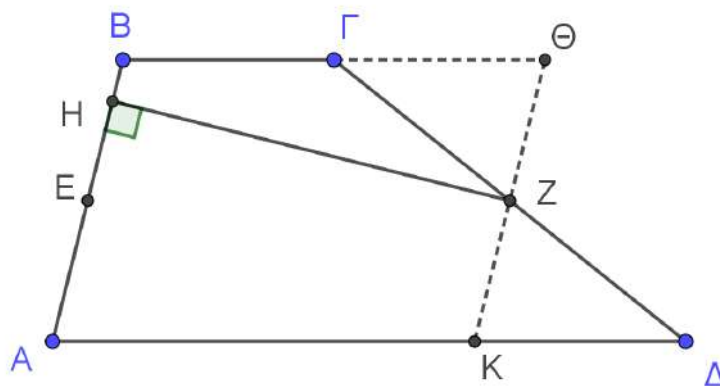
α) Να δείξετε ότι $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Theta K)$ (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot HZ$ (Μονάδες 5)

γ) Αν $υ$ είναι το ύψος του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$, να δείξετε ότι: $υ = \frac{2 \cdot AB \cdot HZ}{A\Delta + B\Gamma}$

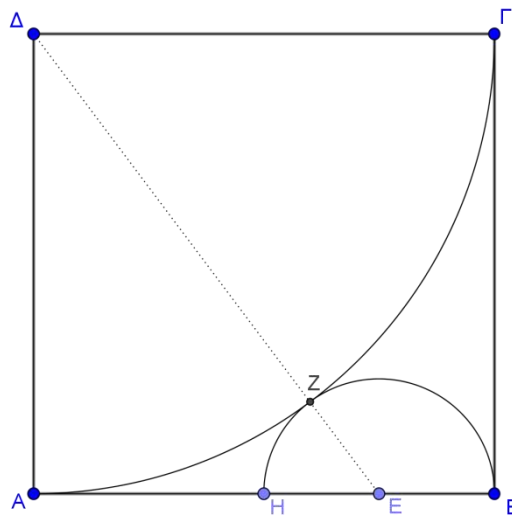
(Μονάδες 5)

δ) Αν E είναι το μέσο του AB να δείξετε ότι $(AEK) = \frac{1}{4} (AB\Gamma\Delta)$ (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς 8. Με κέντρο το Δ κατασκευάζουμε το τόξο $A\Gamma$. Το ημικύκλιο με διάμετρο BH εφάπτεται στο τόξο $A\Gamma$ στο Z και το E είναι το κέντρο του ημικυκλίου.



α) Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του ημικυκλίου.

(Μονάδες 9)

β) Αν $\rho=2$, να υπολογίσετε:

i. Τα εμβαδά του τετραγώνου, του τεταρτοκυκλίου και του ημικυκλίου.

(Μονάδες 7)

ii. Την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου σχήματος $AZ\Gamma BZHA$ που βρίσκεται εντός του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ και εκτός του ημικυκλίου και του τεταρτοκυκλίου.

(Μονάδες 9)

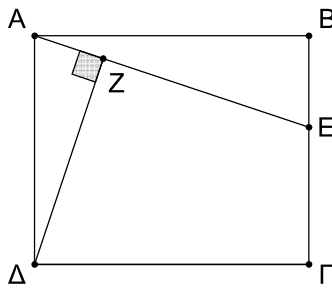
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AB = 6$ και το E σημείο της πλευράς $B\Gamma$, ώστε $BE = 2$. Έστω ΔZ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την AE .

α) Να αποδείξετε ότι $AE = 2\sqrt{10}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και ΔZA είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 9)

γ) Αν $\Delta Z = ZE$, να υπολογίσετε το μήκος του $A\Delta$. (Μονάδες 8)



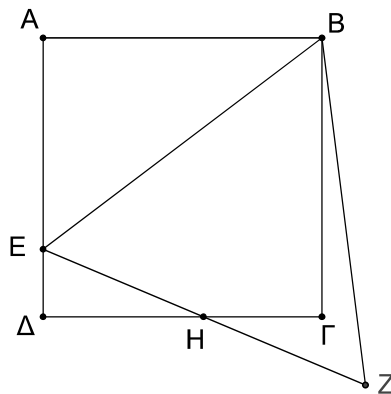
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 3 και σημείο E της πλευράς AD , ώστε $AE = 4 - \sqrt{3}$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία BE και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο BEZ . Οι $\Gamma\Delta$ και EZ τέμνονται στο σημείο H και $\Delta H = \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε το H είναι το μέσο της EZ . (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου BEZ και εξωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α του παρακάτω σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο Α και ακτίνα α.

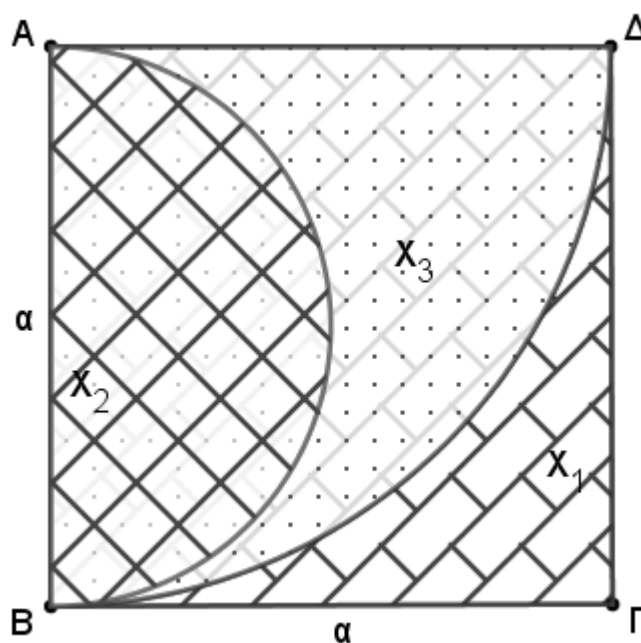
α) Αν X_1 είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου,

να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με: $(X_1) = \frac{\alpha^2}{4} \cdot (4-\pi)$ (Μονάδες 5)

β) Με διάμετρο ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν X_2 είναι το χωρίο του ημικυκλίου και X_3 το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων X_2 και X_3 .

(Μονάδες 11)

γ) Ποιο από τα χωρία X_1 κι X_2 έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Με πλευρές τις AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$, τα τετράγωνα $ABHZ$, $A\Gamma\Theta I$, $B\Gamma P\Delta$. Έστω E , E_1 , E_2 , τα εμβαδά των τετραγώνων $A\Gamma\Theta I$, $ABHZ$, $B\Gamma P\Delta$ αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες $E_1 = 4E$, $E_2 = 5E$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία A .

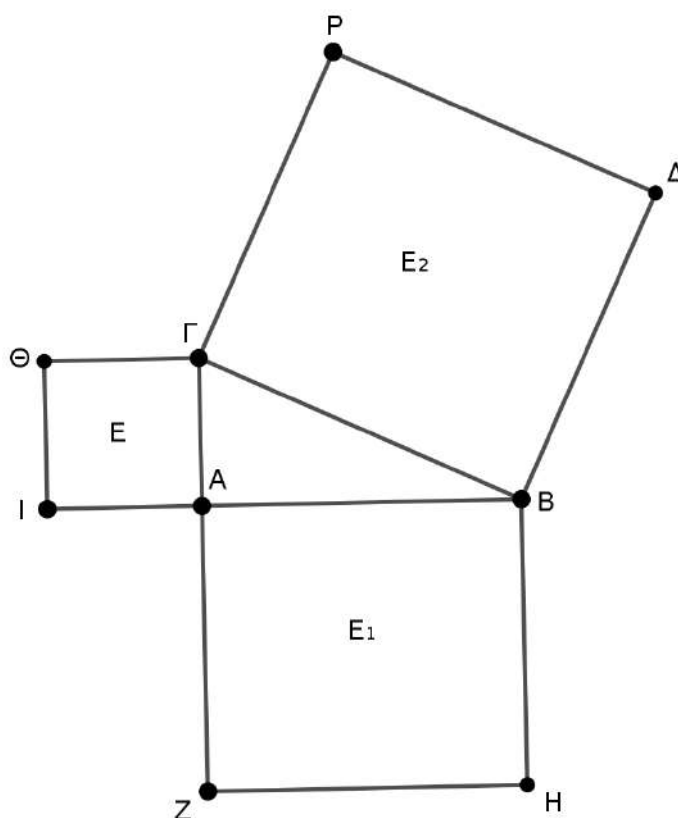
(Μονάδες 9)

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Gamma$, AIZ , $BH\Delta$, $\Gamma P\Theta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) αν η $A\Gamma=1$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου $ZH\Delta P\Theta I$.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε παράλληλες στις πλευρές AB και $A\Gamma$. Η παράλληλη στην AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και η παράλληλη στην $A\Gamma$ τέμνει την AB στο E . Θεωρούμε K και Λ τα μέσα των $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (EK\Delta) = \frac{(BE\Delta)}{2} \quad (\text{Μονάδες } 09)$$

$$\beta) (EZ\Delta) = \frac{(AE\Delta Z)}{2} \quad (\text{Μονάδες } 09)$$

$$\gamma) \text{ Το εμβαδόν του } KEZ\Lambda \text{ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου } \Delta. \quad (\text{Μονάδες } 07)$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = 2AB$. Δίνεται επίσης ότι το σημείο K είναι μέσο της $\Gamma\Delta$ και M τυχαίο σημείο στην $A\Delta$.

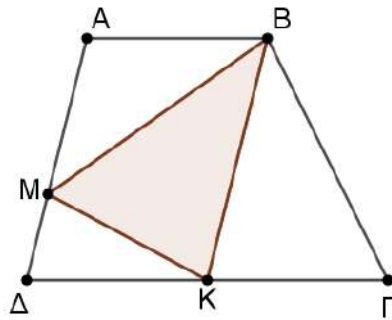
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(BK\Gamma) = \frac{1}{2} (ABK\Delta)$ (Μονάδες 09)

ii. $(BMK) = (BK\Gamma)$ (Μονάδες 09)

β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο M κινείται πάνω στο εσωτερικό της $A\Delta$, τότε ο λόγος των εμβαδών $(AB\Gamma\Delta)$ και (MBK) παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)



ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα $A\Delta$ και AE αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $A\Delta = \frac{1}{2}AB$ και $AE = \frac{2}{5}A\Gamma$, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$.

(Μονάδες 10)

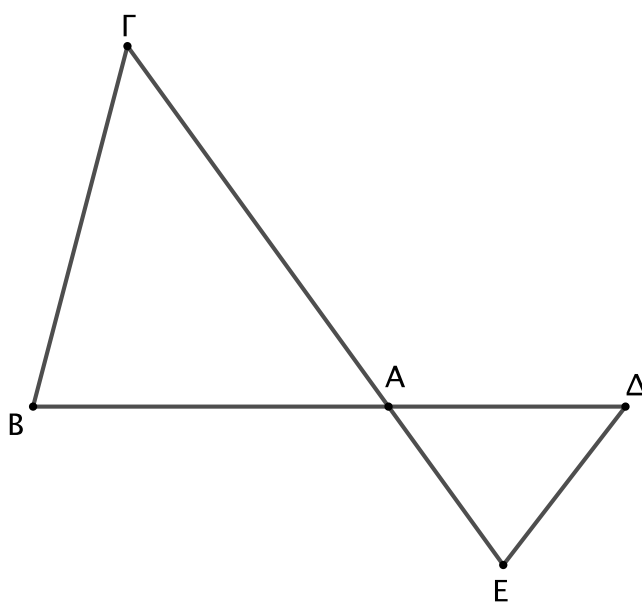
β) Αν είναι $A\Delta = \frac{1}{\lambda}AB$ και $AE = \frac{\lambda}{\mu}A\Gamma$, όπου λ, μ είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε

ότι ο λόγος $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$ είναι ανεξάρτητος από την τιμή του λ .

(Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων λ και μ για τα οποία είναι $(A\Delta E) = (AB\Gamma)$ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα $A\Delta$ και AE αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι $A\Delta = 2AB$ και $AE = \frac{1}{2}A\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα.

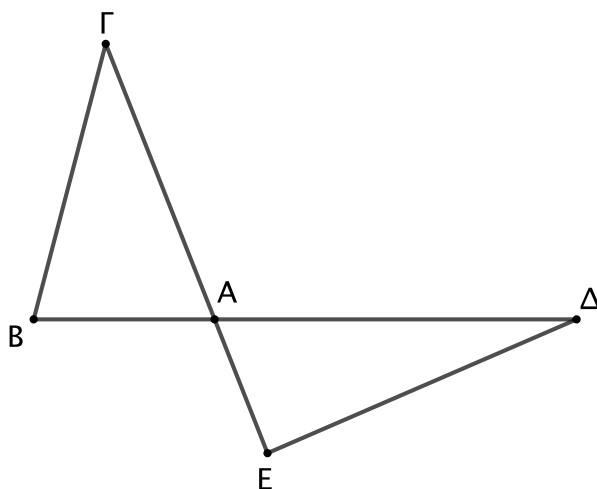
(Μονάδες 09)

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά τμήματα είναι $A\Delta = \mu \cdot AB$ και $AE = \nu \cdot A\Gamma$ αντίστοιχα, όπου μ, ν είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών μ και ν ώστε τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ να είναι ισοδύναμα;

(Μονάδες 10)

γ) Αν είναι $A\Gamma = \frac{3}{2}AB$ και $A\Delta = 2AB$, να βρείτε τις δυνατές θέσεις του E ώστε τα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ να είναι όμοια.

(Μονάδες 06)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, $\hat{A} = 36^\circ$.

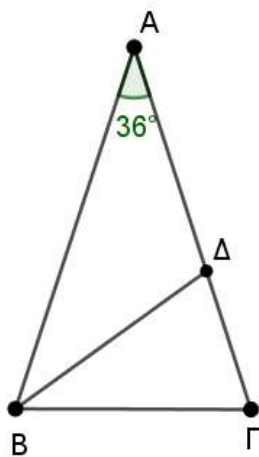
α) Αν η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B , να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών. (Μονάδες 06)

β) Μετακινούμε το σημείο Δ στο εσωτερικό της $A\Gamma$. Για ποια θέση του σημείου Δ θα ισχύει

$$\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = 3. \quad (\text{Μονάδες 09})$$



ΘΕΜΑ 4

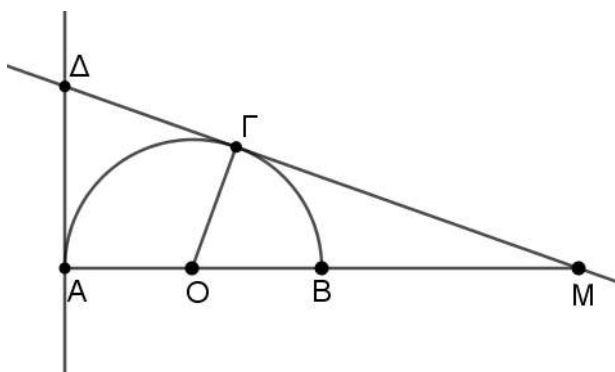
Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB = 2\rho$. Στην προέκταση του AB προς το B , θεωρούμε σημείο M . Από το M φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $M\Gamma$ στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο A τέμνει την προέκταση της $M\Gamma$ στο Δ τότε:

α) Αν $BM = 2\rho$ να αποδείξετε ότι $M\Gamma = 2\sqrt{2}\rho$. (Μονάδες 09)

β)

i. Να αποδείξετε ότι $\frac{MO}{M\Gamma} = \frac{M\Delta}{MA}$. (Μονάδες 09)

ii. Αν για το M ισχύει ότι $BM = \lambda \cdot \rho$, όπου λ θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ , τέτοια ώστε $(A\Delta M) = 9(M\Omega\Gamma)$. (Μονάδες 07)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ μέσο της $A\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ΔE παράλληλη στην $B\Gamma$ και ίση με το μισό της AB όπως στο σχήμα.

α)

i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma}$. (Μονάδες 10)

ii. Αν το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι $(\Delta E\Gamma) = (AB\Delta)$.

(Μονάδες 10)

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}$ ένας μαθητής

έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ έχουν $\hat{A} = \hat{E}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $A\Gamma$ και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού

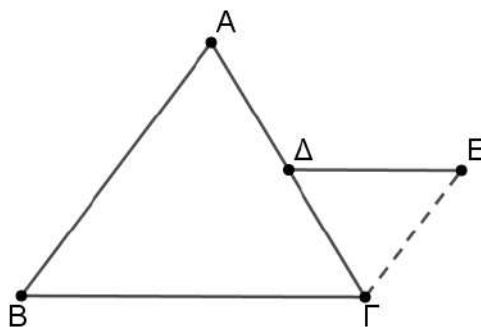
$\frac{A\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{AB} = \frac{1}{2}$. Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους $\hat{A}, \hat{E}$

ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το

τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους. $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{\Delta E}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ». Ο καθηγητής του

του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

(Μονάδες 05)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο με πλευρά a και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του a :

- i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.
- ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ' στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma' > B\Sigma$. Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ με το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.
- ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma'\Gamma$ με το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ των τριγώνων $\Sigma'\Delta\Gamma$ και $\Sigma\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.
- iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες $\Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Gamma$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4

Σε τετράγωνο πλευράς α παίρνουμε σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α :

- Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.
- Την περίμετρο του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Στην τάξη του Βρασίδα η καθηγήτρια των Μαθηματικών απέδειξε ότι αν το σημείο Σ' βρίσκεται στην προέκταση του AB προς το B και κινείται απομακρυνόμενο από το σημείο B , τότε οι πλευρές $\Sigma'\Gamma$ και $\Sigma'\Delta$ μεγαλώνουν. Οπότε, αν το Σ' είναι δεξιότερα από το Σ , θα ισχύει ότι $\Sigma'\Gamma > \Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Delta > \Sigma\Delta$.

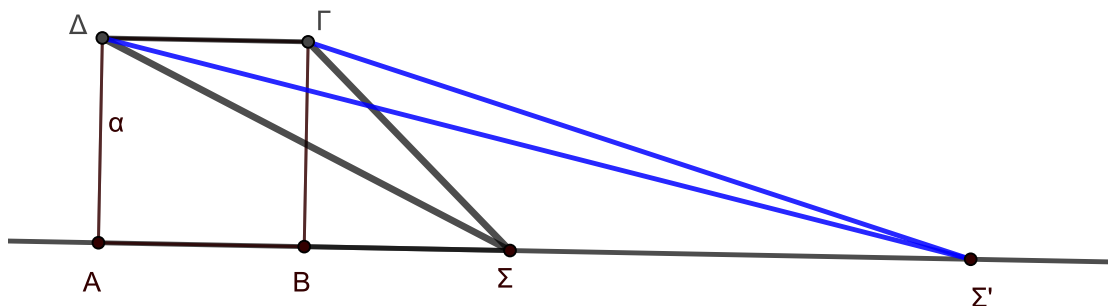
Ο Βρασίδας ζήτησε το λόγο και διατύπωσε τον ισχυρισμό :

«Η περίμετρος και το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ είναι μεγαλύτερα από την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$ ».

Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Βρασίδα:

- σχετικά με τα εμβαδά των δύο τριγώνων; (Μονάδες 8)
- σχετικά με την περίμετρο των δύο τριγώνων; (Μονάδες 7)

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$, ώστε $AB > \Gamma\Delta$. Από τις κορυφές Γ και Δ φέρουμε $\Gamma E // A\Delta$ και $\Delta Z // \Gamma B$, με E και Z σημεία στην πλευρά AB του τραpezίου.

α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$. (Μονάδες 9)

β) Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ ως συνάρτηση των πλευρών του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 8)

γ) Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε τα τετράπλευρα $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου ΒΔ ισούται με $a\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του. (Μονάδες 05)

β)

i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο ΒΔΖΗ έτσι ώστε το σημείο Α να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το κέντρο του τετραγώνου ΒΔΖΗ.

(Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΒΔΖΗ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)

γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου.

Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔΗ του τετραγώνου ΒΔΖΗ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το ΔΗΘΚ. Με πλευρά τη διαγώνιο ΗΚ του ΔΗΘΚ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του θα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, πόσες φορές ακόμη πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

α) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

(Μονάδες 10)

β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που θα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

- i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου.

(Μονάδες 08)

- ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

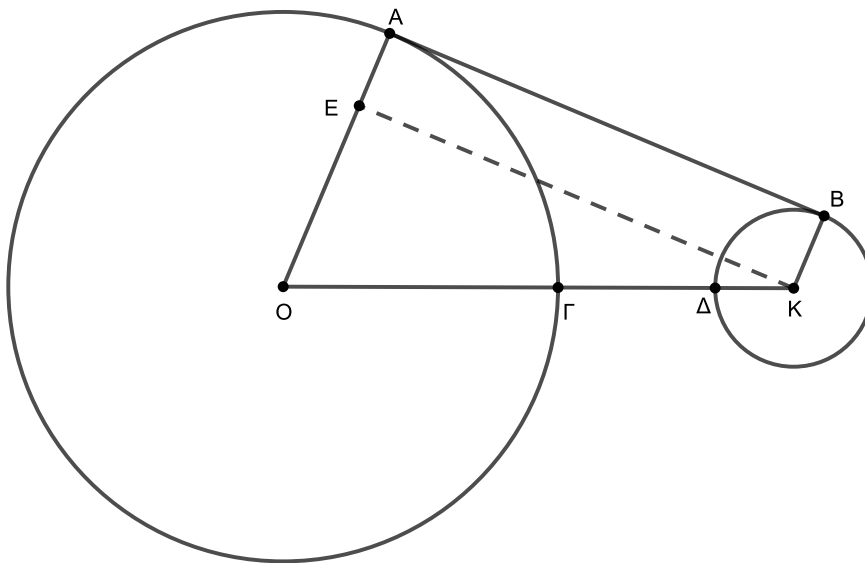
ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα O και K . Ο κύκλος με κέντρο O έχει ακτίνα $R=7$ ενώ ο κύκλος με κέντρο K έχει ακτίνα $\rho=2$. Το τμήμα AB είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα KE είναι παράλληλο στο τμήμα AB με E σημείο του τμήματος OA . Η διάκεντρος OK τέμνει τον κύκλο (O,R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (K,ρ) στο σημείο Δ .

α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι $\Gamma\Delta=4$, τότε:

- i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AB . (Μονάδες 10)
- ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABKO$. (Μονάδες 07)

β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του $ABKE$ να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ.; (Μονάδες 08)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$.

Με πλευρά την υποτείνουσα $B\Gamma$ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το A και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$. Από τα σημεία Γ και Z φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο H .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $B\Gamma HZ$ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου. (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά».

Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4

Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο O . Το ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$ έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$.

α) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ προς το ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι όμοια.

(Μονάδες 6)

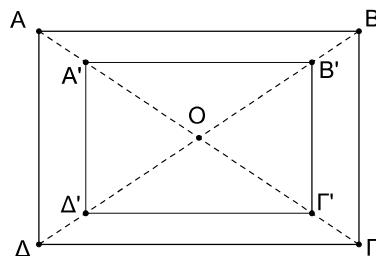
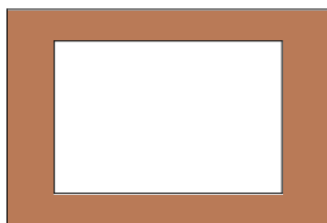
γ) Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται κανένα μέρος της. Η διαγώνιος $A\Gamma$ της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

i. Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας;

(Μονάδες 6)

ii. Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας;

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 2α και με διαμέτρους τις $B\Gamma$ και BA φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με $\pi \cdot \alpha$. (Μονάδες 07)

β)

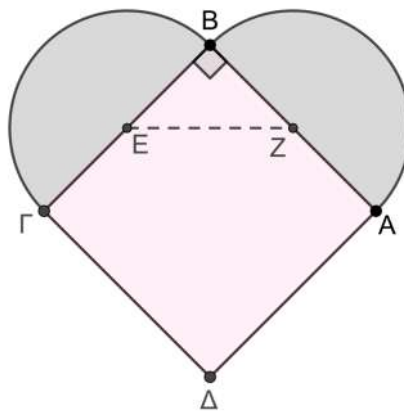
i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι $2\pi+4$, να υπολογίσετε το α . (Μονάδες 06)

ii. Αν $\alpha = 1$ να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

(Μονάδες 06)

γ) Αν (τ) είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο

$\frac{(\tau)}{(AB\Gamma\Delta)}$ με την μονάδα. Να αιτιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 06)



ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha = 40$, $\beta = 25$, $\gamma = 25$ και αντίστοιχα ύψη u_α , u_β , u_γ . Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = 300$ και τα ύψη του είναι $u_\alpha = 15$ και $u_\beta = u_\gamma = 24$. (Μονάδες 7)

iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη u_α , u_β , u_γ είναι οξυγώνιο. (Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο AB και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $B\Gamma = 2$, τότε:

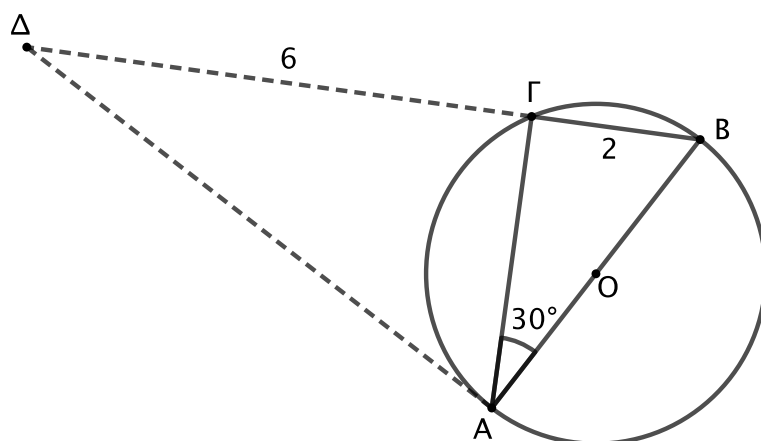
α) Να υπολογίσετε:

- i. Την ακτίνα R .
- ii. Το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.

(Μονάδες 16)

β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = 6$. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔA εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔEZH έχει πλευρά 1.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 2$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

i. $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$.

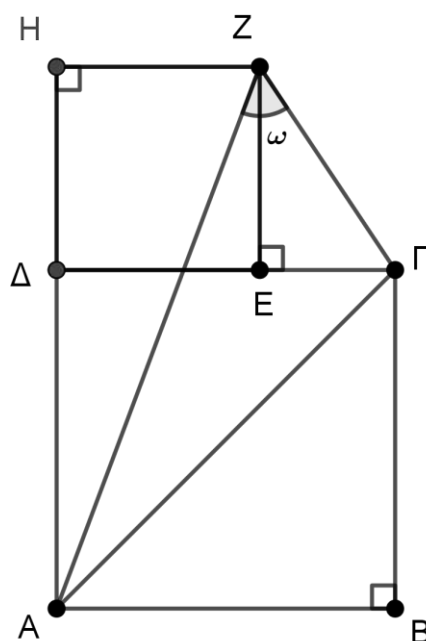
(Μονάδες 7)

ii. $\Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $\hat{AZ\Gamma} = \hat{\omega}$.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Τρία ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α , β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση $\lambda\%$, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο. (Μονάδες 10)

γ) Να εξετάστε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α , 8β και 6γ . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα τρεις κυκλικοί τροχοί με ίσες ακτίνες μήκους R , έχουν τα κέντρα τους στις κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$ με πλευρές α , β και γ . Ένας τεντωμένος ιμάντας μήκους L συνδέει τους τρεις ίσους τροχούς όπως στο σχήμα και εφάπτεται σε αυτούς στα σημεία K , Λ , M , N , P , Σ .

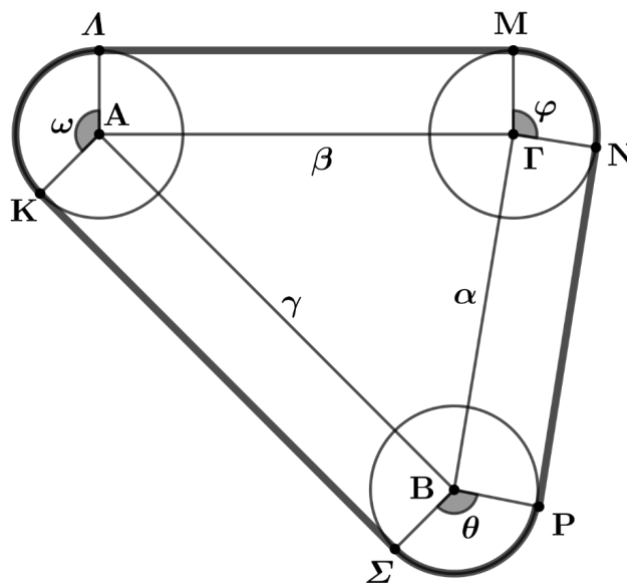
α) Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $\Lambda M \Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 4)
- Η κυρτή γωνία $\widehat{K\Lambda}$ και η γωνία $\widehat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 4)

β) Αν $\widehat{K\Lambda} = \widehat{\omega}$, $\widehat{\Sigma P} = \widehat{\theta}$, $\widehat{M\Gamma N} = \widehat{\varphi}$, να αποδείξετε ότι $\widehat{\omega} + \widehat{\theta} + \widehat{\varphi} = 360^\circ$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το μήκος του ιμάντα L είναι $L = 2(\tau + \pi R)$ όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, η AM είναι διάμεσός του και το σημείο E είναι το μέσο της AM . Από το E φέρουμε παράλληλες στις AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνουν τη $B\Gamma$ στα σημεία Δ και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (\Delta MB) = (\Delta M\Gamma) \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

$$\beta) (\Delta ME) = \frac{1}{8} \cdot (\Delta B\Gamma) \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

$$\gamma) (\Delta BDE) = (\Delta GZE) \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 2α και Λ το μέσο της πλευράς του ΓΔ. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του ΑΒ, έχει εμβαδόν 10. Τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

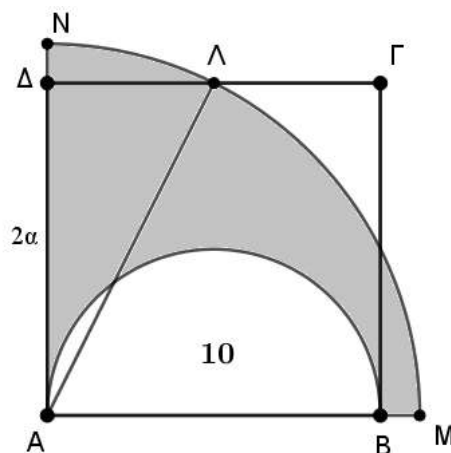
i. Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $(ΑΒΓΔ) = \frac{80}{\pi}$, (Μονάδες 6)

ii. $ΑΛ^2 = \frac{100}{\pi}$ (Μονάδες 6)

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΛ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο $\widehat{ΑΜΝ}$, και έστω Μ, Ν είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου ΑΒΜΝΑ. (Μονάδες 8)

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου $\widehat{ΑΜΝ}$ προς το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 5)



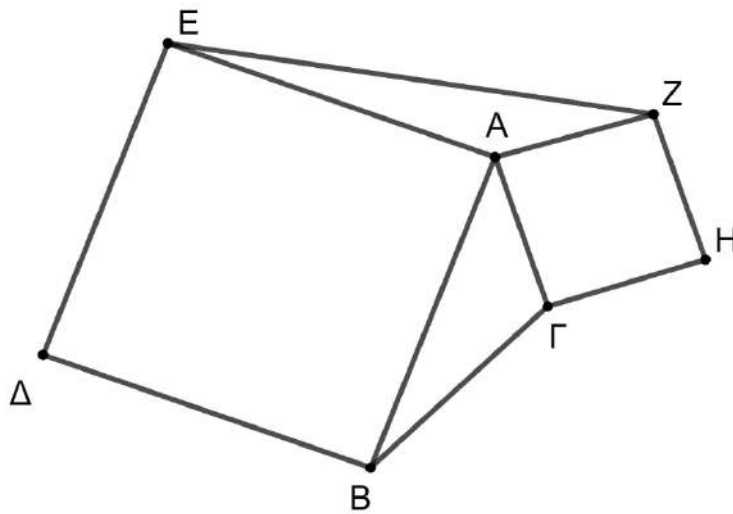
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6\text{ cm}$ και $A\Gamma = 3\text{ cm}$ και $\hat{A}$ οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα του τριγώνου $AB\Gamma$ σχηματίζουμε τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma H Z$ και φέρνουμε την EZ , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AEZ και $AB\Gamma$ είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου $EZH\Gamma B\Delta$ είναι $(EZH\Gamma B\Delta) = 54\text{ cm}^2$:

- i. Να αποδείξετε ότι η γωνία A του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 30^\circ$. (Μονάδες 10)
- ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

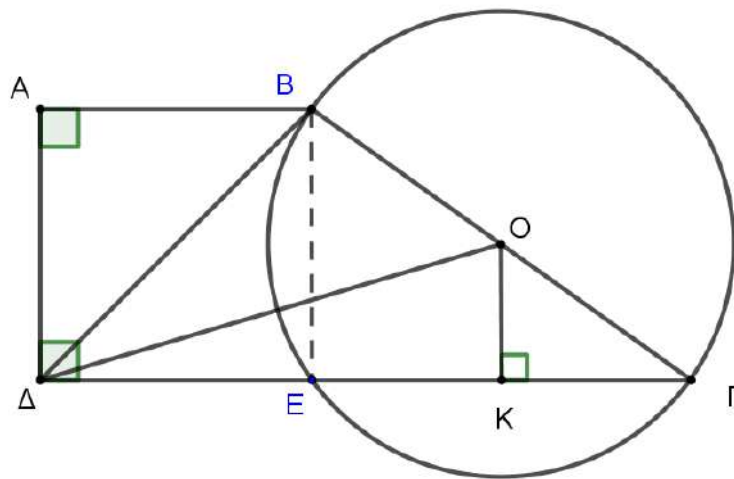
Έστω $AB\Gamma\Delta$ τραπέζιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB=5$, $\Gamma\Delta=13$ και εμβαδόν $(AB\Gamma\Delta)=54$. Ο κύκλος με διάμετρο τη $B\Gamma$ τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = 6$. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος των BE και $B\Gamma$. (Μονάδες 6)

γ) Αν OK είναι η κάθετη από το σημείο O στην $E\Gamma$, να αποδείξετε ότι $OK=3$, και να υπολογίσετε το μήκος της OD . (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου BDO . (Μονάδες 7)



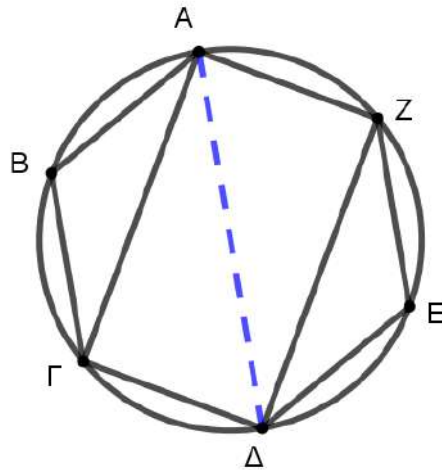
ΘΕΜΑ 4

Έστω $ΑΒΓΔΕΖ$ κανονικό εξαγώνο εγγεγραμμένο σε κύκλο $(Ο, R)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Η διαγώνιος $ΑΔ$ του εξαγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 6)
- ii. Οι γωνίες $\widehat{ΓΑΔ}$ και $\widehat{ΑΔΖ}$ είναι ίσες. (Μονάδες 3)
- iii. Οι διαγώνιοι $ΑΓ$ και $ΖΔ$ του εξαγώνου είναι παράλληλες. (Μονάδες 3)
- iv. Το τετράπλευρο $ΑΓΔΖ$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας R του κύκλου. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι σε κάθε κανονικό πολύγωνο με περισσότερες από πέντε πλευρές υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαγώνιοι που να είναι παράλληλες. Συμφωνείτε με την άποψη αυτού του μαθητή; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

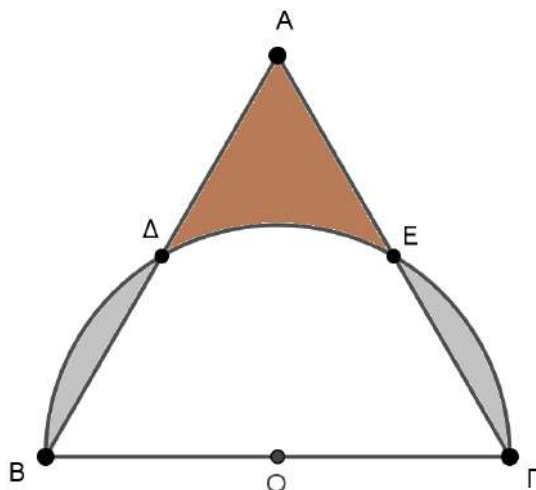
Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, πλευράς 2α . Με διάμετρο τη $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές AB , $A\Gamma$ στα σημεία Δ , E αντίστοιχα.

Αν O είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma = \alpha\sqrt{3}$. (Μονάδες 8)

β) το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου ισούται με $E = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{6}$. (Μονάδες 9)

γ) το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$, $A\Gamma$ και το τόξο ΔE είναι: $E' = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)\alpha^2}{6}$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 2\rho$. Με διάμετρο $B\Gamma$ γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου. Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα $AB\widehat{\Gamma}$ με κέντρο το A και ακτίνα AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $AB = \rho\sqrt{2}$.

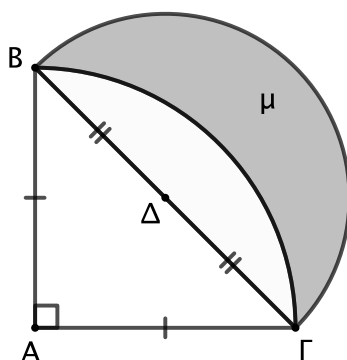
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου μ ως συνάρτηση του ρ .

(Μονάδες 10)

γ) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου μ με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. Τι συμπέρασμα προκύπτει;

(Μονάδες 05)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

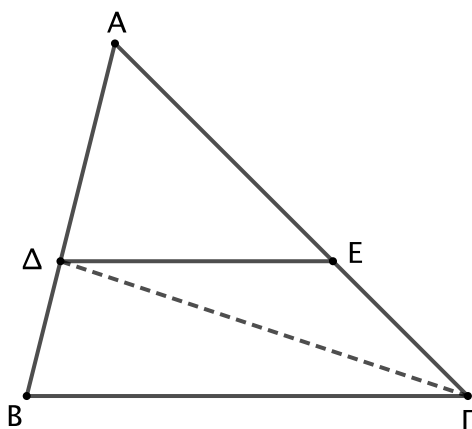
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$ όταν το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2}{9}$.

(Μονάδες 05)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και τυχαίο σημείο του M , τέτοιο ώστε $AM = 2\alpha$ και $MB = 2\beta$. Με διαμέτρους AM , MB και AB γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του AB , όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω Γ το σημείο τομής του ημικυκλίου AB και της κάθετης από το M στο AB .

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια $Z\widehat{AM}$, $E\widehat{MB}$ και $\Delta\widehat{AB}$, όπου Z , E , Δ είναι τα μέσα των AM , MB και AB αντίστοιχα.

(Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

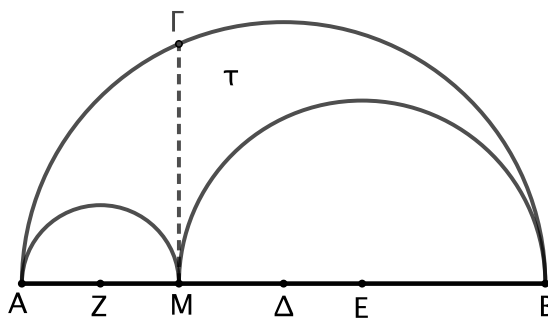
(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα τ που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου $M\Gamma$.

(Μονάδες 05)

δ) Για ποια θέση του M μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος τ ;

(Μονάδες 05)



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα R . Έστω AB διάμετρος του κύκλου και Δ, E σημεία της τέτοια ώστε $A\Delta = \Delta E = EB$. Σχεδιάζουμε τα ημικύκλια $A\Delta$ και AE πάνω από τη διάμετρο AB και τα ημικύκλια BE και BD κάτω από τη διάμετρο AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ε_1 και ε_3 των καμπυλόγραμμων σχημάτων $A\Delta BZ$ και $BEAH$ αντίστοιχα.

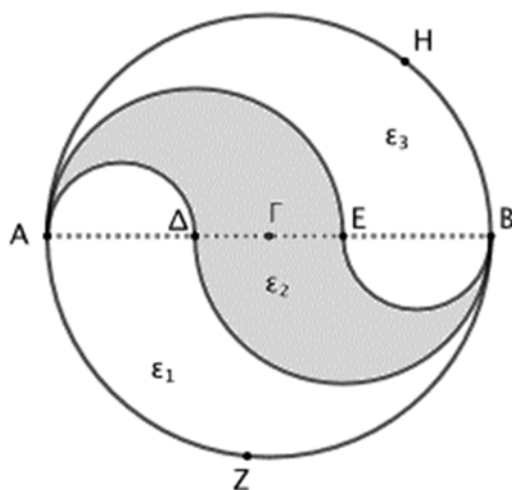
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ε_2 του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος $A\Delta BE$.

(Μονάδες 08)

γ) Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

(Μονάδες 05)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AB = 4\alpha$ και $A\Delta = \pi\alpha$. Στο εσωτερικό του ορθογωνίου σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου AB .

α) Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

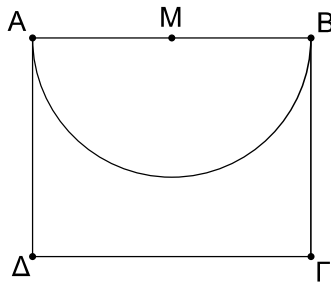
(Μονάδες 8)

β) Αν η διαγώνιος $B\Delta$ τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο E και M είναι το μέσο της AB ,

i. να αποδείξετε ότι $AB^2 = B\Delta \cdot BE$ και $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta E$. (Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $BE = \frac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$ και $\Delta E = \frac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$, (Μονάδες 6)

iii. να υπολογίσετε το $\widehat{BME}$. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και σημείο Μ στο εσωτερικό του. Έστω M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot MM_1$, όπου λ_5 είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου.

(Μονάδες 6)

ii. $(ABΓΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5)$.

(Μονάδες 7)

iii. $MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5 = 5\alpha_5$, όπου α_5 είναι το απόστημα του κανονικού πενταγώνου.

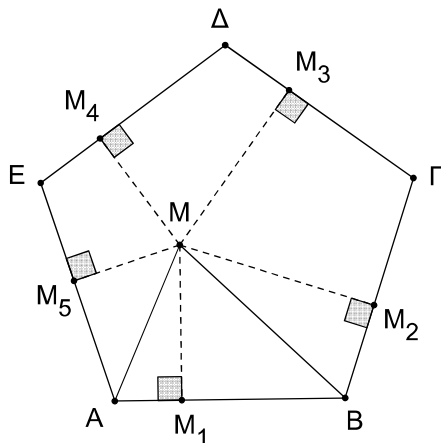
(Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής διατύπωσε τον ισχυρισμό: «Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός κανονικού ν-γώνου $A_1A_2\dots A_n$ και $M_1, M_2, \dots, M_n$ είναι οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ αντίστοιχα, τότε

$$MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n = n\alpha_n,$$

όπου α_n είναι το απόστημα του κανονικού ν-γώνου». Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες $\hat{A} = 20^\circ$, $\hat{B} = 100^\circ$, και η διχοτόμος AE της γωνίας του $\hat{A}$. Από το B φέρνουμε την κάθετη προς την AE και έστω Z , Δ τα σημεία τομής της καθέτου με τις AE , $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

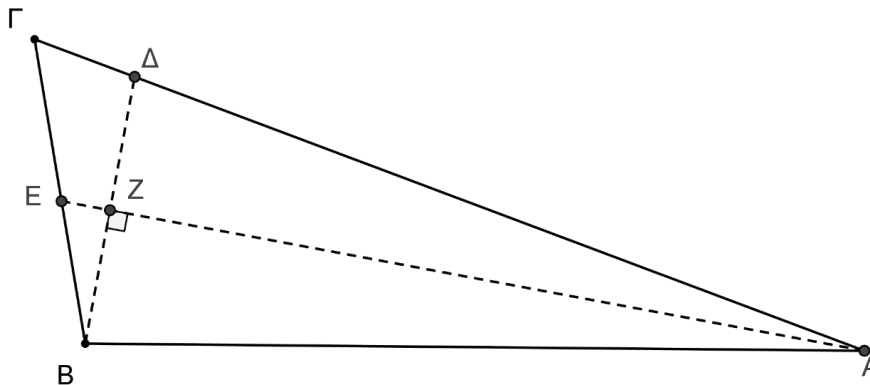
i. $\Gamma\hat{B}\Delta = \hat{A} = 20^\circ$ (Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$, να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες .

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά την $B\Gamma$ και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$. Να εξετάσετε αν τα δυο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου οι πλευρές AB και $A\Gamma$ έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.

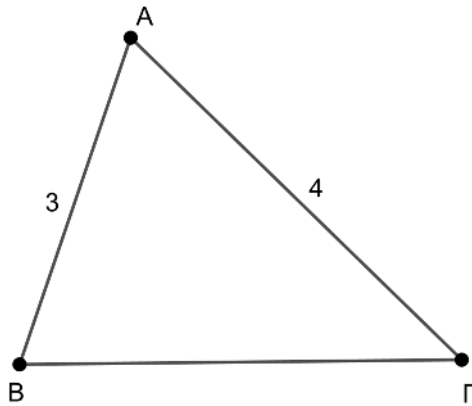
α) Αν η γωνία A έχει μέτρο 60° , τότε να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 08)

ii. Το μήκος της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 09)

β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας A ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ να γίνεται μέγιστο; Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)



ΘΕΜΑ 4

Για να βρει το ύψος ενός δέντρου, ένας μαθητής ύψους 1,60 m σκέφτηκε να μετρήσει το μήκος της σκιάς του δέντρου και το μήκος της δικιάς του σκιάς πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο κάποια χρονική στιγμή μιας ηλιόλουστης ημέρας. Στέκεται σε θέση έτσι ώστε, η άκρη της σκιάς του να συμπίπτει με την άκρη της σκιάς του δέντρου. Ο μαθητής μετράει και βρίσκει ότι η σκιά του έχει μήκος 2m και η σκιά του δέντρου ότι έχει μήκος 5m.

Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα τμήματα ΟΑ και ΟΓ, με κοινό άκρο Ο, αναπαριστούν τα μήκη των σκιών του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ, τα δε τμήματα ΑΒ και ΓΔ αναπαριστούν τα αντίστοιχα ύψη μαθητή και δέντρου και θεωρούνται κάθετα στην ΟΓ.

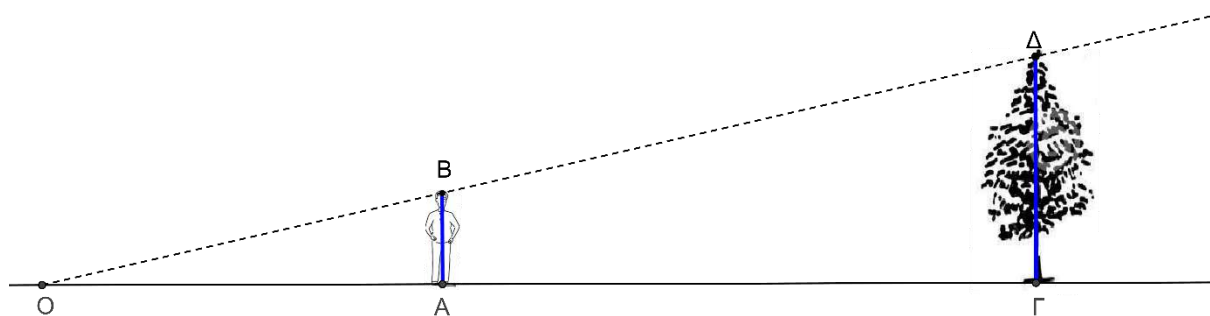
α)

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου. (Μονάδες 8)

β) Μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του ίδιου δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας; Ποια από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος θα άλλαζαν στην περίπτωση αυτή; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 5)



(σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ εσωτερικό της πλευράς του $B\Gamma$. Έστω M το μέσο M του τμήματος $A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2} (AB\Delta)$ (Μονάδες 8)

ii. $(ABM) + (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} (AB\Gamma)$ (Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Δ τέτοια ώστε τα τρίγωνα ABM και $M\Delta\Gamma$ να έχουν ίσα εμβαδά. Στην περίπτωση που υπάρχει θέση του σημείου Δ για την οποία τα εμβαδά των τριγώνων ABM και $M\Delta\Gamma$ είναι ίσα, να βρείτε τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το εμβαδόν του κάθε τριγώνου ABM και $M\Delta\Gamma$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

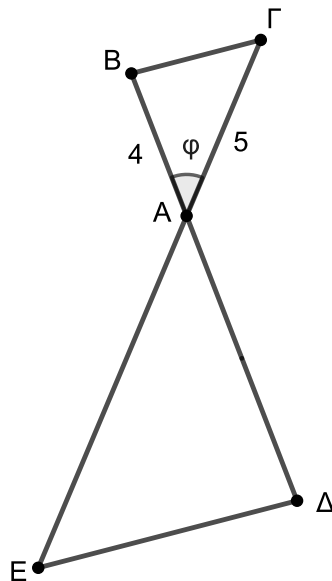
ΘΕΜΑ 4

Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ έχει τα άκρα του Β και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΔΕ, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔΕ. Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, $AB = 4$ και $AG = 5$. Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι $\frac{(AB\Gamma)}{(ADE)} = \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο $\frac{1}{2}$. (Μονάδες 10)

β) Αν $B\hat{A}G = \varphi$, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΑΔΕ) του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με $40\eta\mu\varphi$. (Μονάδες 07)

γ) Να βρείτε σημείο Ζ εσωτερικό της πλευράς ΑΔ, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΖ που σχηματίζεται να είναι ίσο με $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 08)



ΘΕΜΑ 4

Έστω E σημείο στην πλευρά $ΓΑ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$. Από το E φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά $ΒΓ$ του $ΑΒΓ$ η οποία τέμνει την πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$ και παίρνουμε σημείο Z στην προέκταση $A\chi$ της πλευράς $ΓΑ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ ώστε να είναι $AZ = AE$, όπως στο σχήμα.

α) Έστω $ΑΓ = 3ΑΕ$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΔΕ$ είναι ίσο με το $\frac{1}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(Μονάδες 07)

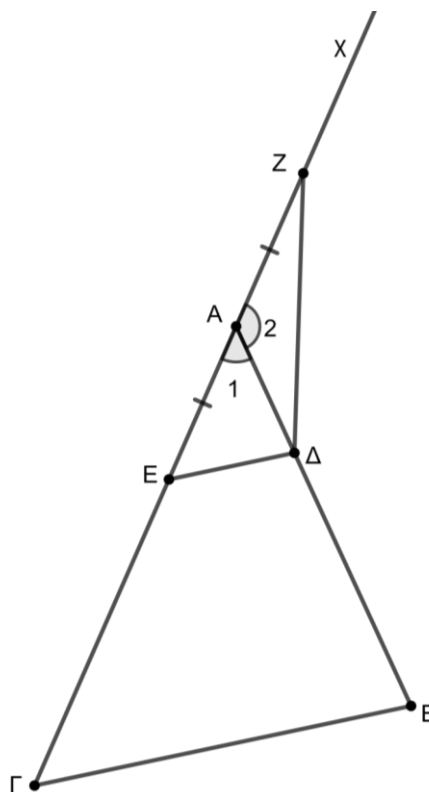
ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΔΕΖ$ είναι ίσο με τα $\frac{2}{9}$ του εμβαδού του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του $ΔΕΖ$ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του $ΑΒΓ$, να υπολογίσετε το λόγο

$$\frac{AE}{AG}.$$

(Μονάδες 08)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με E και Z τα μέσα των πλευρών του $A\Gamma$ και AB , αντίστοιχα.

α) Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα $A\Delta$ ενώνει την κορυφή A του τριγώνου $AB\Gamma$ και το μέσο Δ της απέναντι πλευράς $B\Gamma$, όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $E\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

ii. Για το εμβαδόν $(AE\Delta Z)$ του τετραπλεύρου $AE\Delta Z$ ισχύει ότι $(AE\Delta Z) = (AB\Gamma) - 2(E\Delta\Gamma)$.

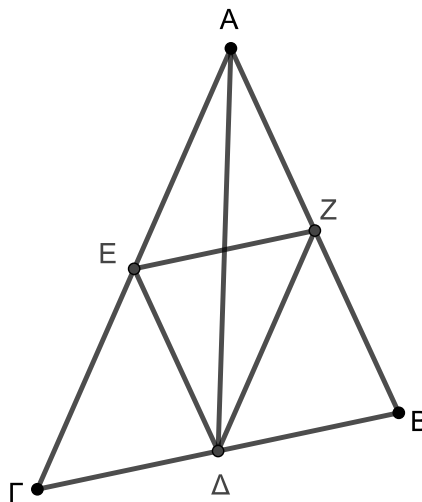
iii. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AE\Delta Z$ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 18)

β) Αν το σημείο Δ είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AE\Delta Z$ είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του εμβαδού του τριγώνου

$AB\Gamma$;

(Μονάδες 07)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην πλευρά AB παίρνουμε σημείο Δ και στην πλευρά $A\Gamma$ σημείο E ώστε $AE = AB$. Με κέντρο το σημείο A και ακτίνες $\rho = A\Delta$, $r = AB = AE$ και $R = A\Gamma$ γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους (A, ρ) , (A, r) και (A, R) όπως στο σχήμα. Έστω $E_{E\Gamma}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, r) και (A, R) , $E_{\Delta B}$ το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ) και (A, r) , E_{AE} το εμβαδόν του κύκλου (A, r) και $E_{A\Delta}$ το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ) .

α) Να αποδείξετε ότι:

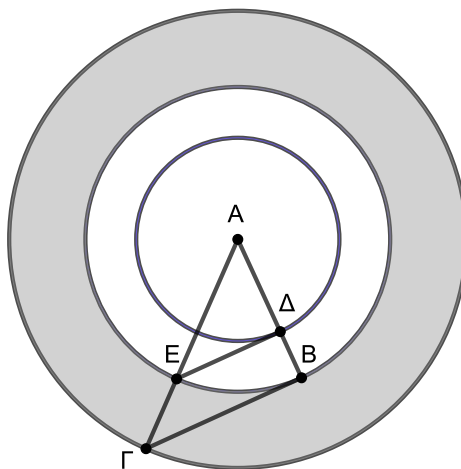
$$\text{i. } \frac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2} \quad (\text{Μονάδες 10})$$

$$\text{ii. } \frac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2} \quad (\text{Μονάδες 07})$$

β) Αν επιπλέον οι ΔE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \frac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}}$$

(Μονάδες 08)



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$, που η κοινή κορυφή τους A βρίσκεται στο κέντρο τριών ομόκεντρων κύκλων (A, ρ_1) , (A, ρ_2) και (A, ρ_3) , η κορυφή Γ βρίσκεται στον κύκλο (A, ρ_3) , οι κορυφές B και E στον κύκλο (A, ρ_2) και η κορυφή Δ στον κύκλο (A, ρ_1) , όπως στο σχήμα, με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Ονομάζουμε $E_{E\Gamma}$ το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ_2) και (A, ρ_3) , E_1 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_1) , E_2 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_2) και E_3 το εμβαδόν του κύκλου (A, ρ_3) .

α) Αν $\frac{E_{E\Gamma}}{E_2} = \frac{7}{9}$, να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}$. (Μονάδες 07)

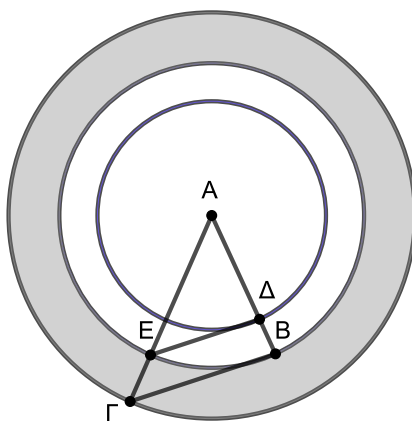
ii. $\frac{E_2}{E_3} = \frac{9}{16}$. (Μονάδες 05)

iii. Αν επιπλέον οι ΔE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες να αποδείξετε ότι $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $E_{E\Gamma} = E_2$ και επιπλέον οι ΔE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι $E_{\Delta B} = E_1$, όπου $E_{\Delta B}$ είναι το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων (A, ρ_1) και (A, ρ_2) .

(Μονάδες 05)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε $AZ = \frac{3}{4}AB$.

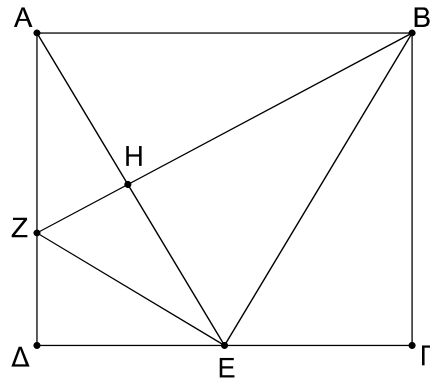
α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \frac{5}{4}AB$. (Μονάδες 6)

β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i. $BE^2 = \frac{5}{4}AB^2$ και $ZE^2 = \frac{5}{16}AB^2$, (Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

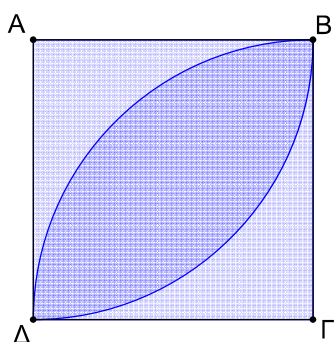
Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.

α) Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές Α, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Να αποδείξετε ότι:

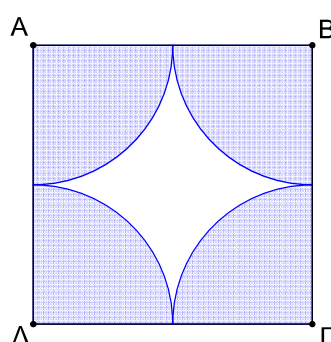
- το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι $25\pi \text{ m}^2$. (Μονάδες 4)
- το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι $50(\pi - 2) \text{ m}^2$. (Μονάδες 5)

β) Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

- Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται. (Μονάδες 8)
- Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) με ΑΒ= γ, ΑΓ= β και

$B\Gamma = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{A} > 90^\circ$. (Μονάδες 8)

β) η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με 120° . Δίνεται $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 5)

γ) η γωνία ΒΟΓ ισούται με 120° . (Μονάδες 5)

δ) το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος, που ορίζεται από τη χορδή ΒΓ και το

κυρτογώνιο τόξο ΒΓ, είναι: $E = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$. Δίνεται $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και το εσωτερικό σημείο K της πλευράς $B\Gamma$. Θεωρούμε σημείο O του ευθύγραμμου τμήματος AK , ώστε $AO = \frac{3}{4}AK$. Από το O φέρνουμε ευθεία ε η οποία τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

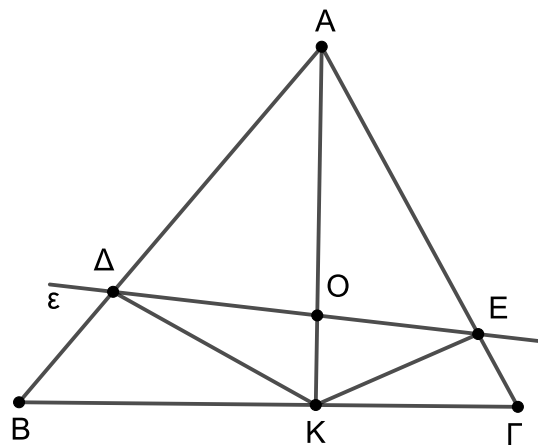
i. $(AO\Delta) = \frac{3}{4}(AK\Delta)$, (Μονάδες 7)

ii. $(AOE) = \frac{3}{4}(AKE)$, (Μονάδες 7)

iii. $(\Delta OE) = \frac{3}{4}(A\Delta KE)$. (Μονάδες 7)

β) Είναι δυνατόν να ισχύει $(\Delta OE) = \frac{3}{4}(AB\Gamma)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 8$, $B\Gamma = 7$ και $\hat{A} = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 3$ ή $A\Gamma = 5$. (Μονάδες 6)

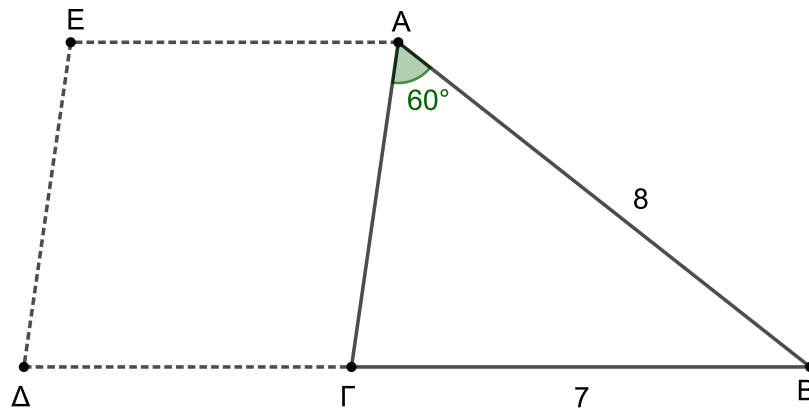
β) Έστω ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο όπως στο παρακάτω σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 5$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι $(AB\Gamma) = 10\sqrt{3}$. (Μονάδες 6)

iii. Προεκτείνουμε τη $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = A\Gamma$ και σχηματίζουμε τον ρόμβο $A\Gamma\Delta E$.

Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου $A\Gamma\Delta E$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο K ώστε $KB = 2K\Gamma$ και στο ευθύγραμμο τμήμα AK παίρνουμε σημείο Λ ώστε $\Lambda A = 2\Lambda K$. Έστω E_1 , E_2 , E_3 και E_4 τα εμβαδά των τριγώνων $A\Lambda\Gamma$, $\Gamma\Lambda K$, $B\Lambda K$ και $A\Lambda B$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{E_1}{E_2} = 2$ και $\frac{E_4}{E_3} = 2$.

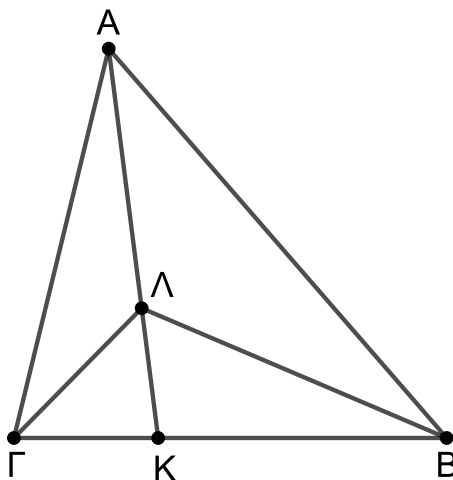
(Μονάδες 10)

ii. $E_1 = E_3$.

(Μονάδες 8)

β) Αν $E_1 = 10$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 16$, $\Gamma\Delta = 22$ και $A\Delta = 20$. Έστω K η προβολή του σημείου A πάνω στην ευθεία $\Gamma\Delta$ και Λ η προβολή του σημείου B πάνω στη ευθεία $A\Delta$.

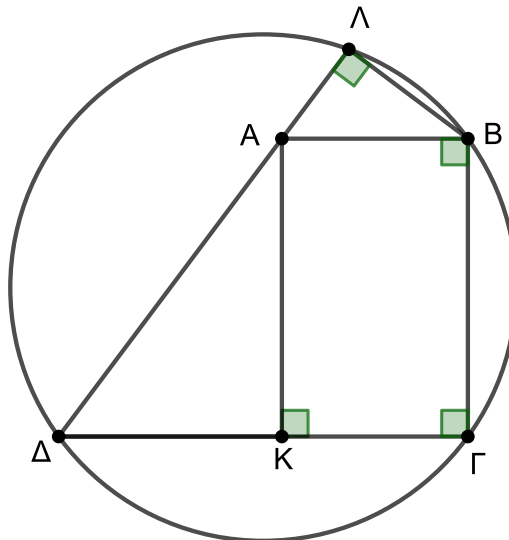
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $K\Delta = 12$, (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου $AK\Delta$ είναι 96 . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AK\Delta$ και $B\Lambda A$ είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $B\Lambda A$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου $B\Gamma\Delta\Lambda$. (Μονάδες 5)



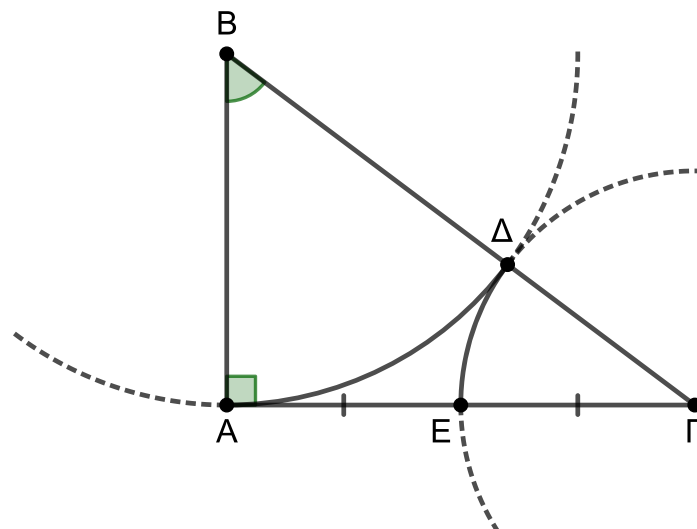
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Με κέντρο το σημείο B και ακτίνα $R = BA$ γράφουμε τον κύκλο (B, R) ο οποίος τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ . Με κέντρο το σημείο Γ και ακτίνα $\rho = \Gamma\Delta$ γράφουμε τον κύκλο (Γ, ρ) ο οποίος τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E . Έστω ότι το E είναι το μέσο της $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\rho = \frac{2}{3}R$. (Μονάδες 8)

β) Έστω E_1 το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ και E_2 το εμβαδόν του κύκλου (B, R) . Να αποδείξετε ότι $\frac{E_2}{E_1} = \frac{3\pi}{2}$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω $\hat{B} = \mu^\circ$ και E_3 και E_4 είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων $B\hat{A}\Delta$ και $\Gamma\hat{\Delta}E$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\frac{E_4}{E_3} = \frac{4(90-\mu)}{9\mu}$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και έστω Δ η προβολή του σημείου B πάνω στην ευθεία $A\Gamma$. Έστω $A\Delta = 3$ και $\Delta\Gamma = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Delta = 4$. (Μονάδες 6)

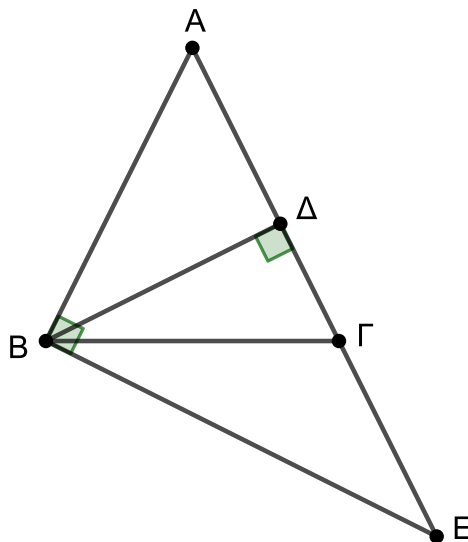
ii. $(AB\Gamma) = 10$. (Μονάδες 6)

β) Έστω ότι η κάθετη της AB στο σημείο B , τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E .

Να βρείτε:

i. Το μήκος του ΔE . (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $B\Gamma E$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

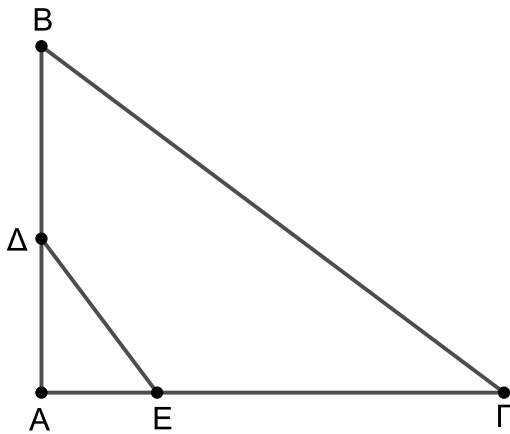
Τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Δίνεται ότι $AB = 9$, $AG = 12$, $AD = 4$ και $AE = 3$.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 15$, (Σχήμα 1). Να αποδείξετε ότι:

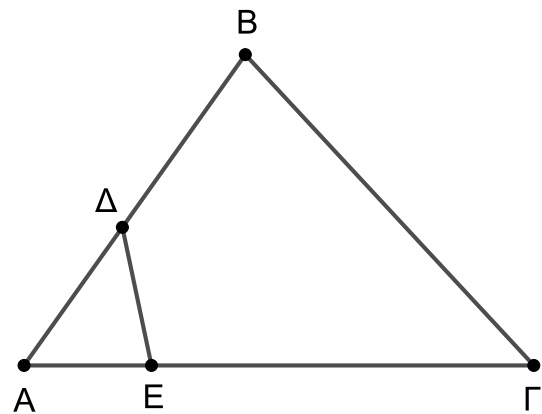
- i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)
- ii. $DE = 5$. (Μονάδες 6)

β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 10$, (Σχήμα 2). Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ δεν είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)
- ii. $DE = \frac{10}{3}$. (Μονάδες 6)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΘΕΜΑ 4

Το σημείο M διαιρεί εσωτερικά την πλευρά $B\Gamma$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ σε λόγο $\frac{MB}{M\Gamma}$ και το σημείο N διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα AM σε λόγο $\frac{NA}{NM}$.

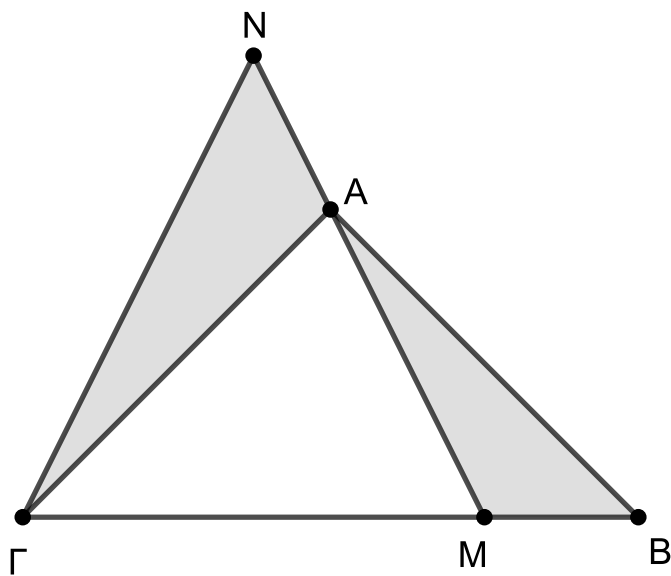
α) Έστω $\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{1}{3}$ και $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{(AMB)}{(AM\Gamma)} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 7)

ii. $\frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}$. (Μονάδες 6)

iii. $(AMB) = (AN\Gamma)$. (Μονάδες 6)

β) Έστω $\frac{MB}{M\Gamma} = 1$ και $(AMB) = (AN\Gamma)$. Να βρείτε τον λόγο $\frac{NA}{NM}$ στον οποίο το σημείο N διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα AM . (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα η BD είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ και επίσης είναι $B\Gamma = 2AB$.

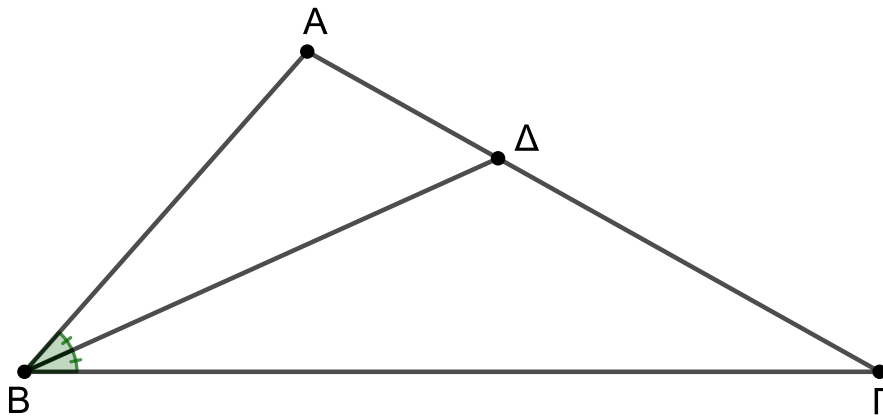
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $AB\Delta$. (Μονάδες 6)

β) Να χωρίσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι $AB = 12$ και $\eta\mu B = \frac{3}{4}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 108. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων $\Delta B\Gamma$ και $AB\Delta$. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

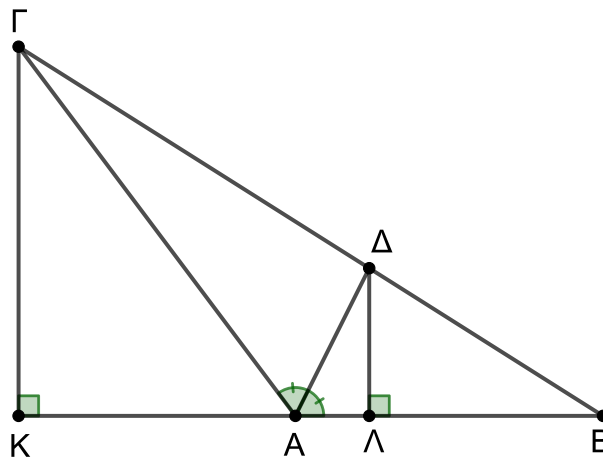
Στο παρακάτω σχήμα η AD είναι διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η AK είναι η προβολή της πλευράς AG πάνω στην ευθεία AB . Δίνονται $AB = 10$, $AG = 15$ και $AK = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $\Gamma K = 12$ και $(AB\Gamma) = 60$. (Μονάδες 8)
- ii. $(A\Delta B) = 24$ και $(A\Delta\Gamma) = 36$. (Μονάδες 10)

β) Έστω Λ η προβολή του σημείου Δ πάνω στην ευθεία AB .

- i. Να αποδείξετε ότι $\frac{\Delta\Lambda}{\Gamma K} = \frac{2}{5}$. (Μονάδες 3)
- ii. Να βρείτε τον λόγο $\frac{\Lambda B}{\Lambda K}$ στον οποίο το σημείο Λ διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα BK . (Μονάδες 4)



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2\alpha$ και $A\Delta = \alpha$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο M με $MB = x$ και στην προέκταση της $A\Delta$ σημείο N με $\Delta N = 2x$.

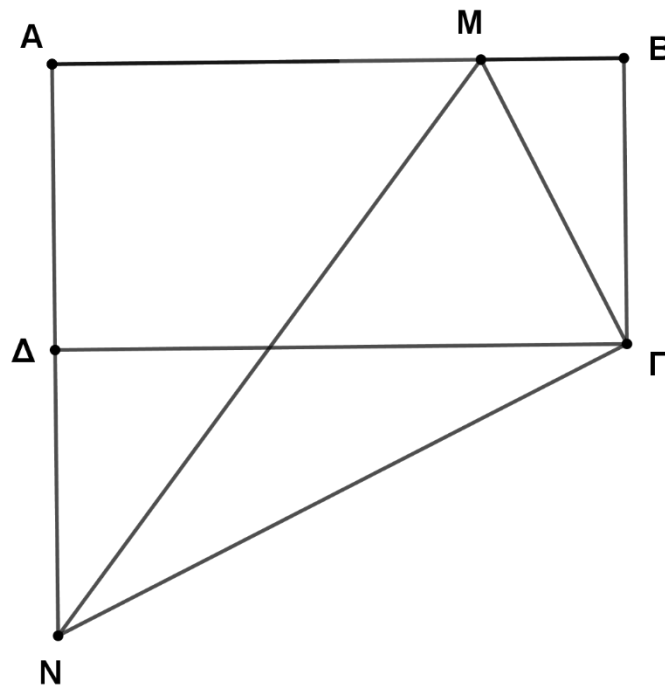
α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των α, x τα $M\Gamma^2$, $N\Gamma^2$ και MN^2 . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε συναρτήσει των α, x τα εμβαδά των τριγώνων AMN και ΓMN .

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M , πάνω στην AB ώστε τα τρίγωνα AMN και ΓMN να είναι ισοεμβαδικά. (Μονάδες 5)



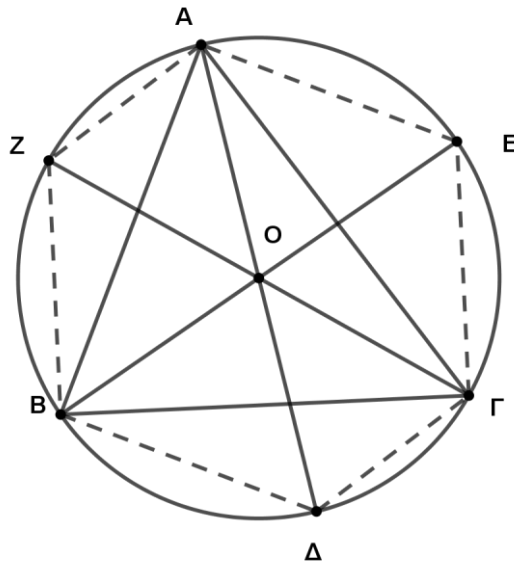
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O . Θεωρούμε τις διαμέτρους AD , BE και ΓZ . Να αποδείξετε ότι:

α) $(AOB) = (BO\Delta)$ και $(AO\Gamma) = (\Delta O\Gamma)$ (Μονάδες 8)

β) $(B\Delta\Gamma) = (AOB) + (AO\Gamma) - (BO\Gamma)$ (Μονάδες 8)

γ) $(AZB\Delta\Gamma E) = 2(AB\Gamma)$ (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων A και B στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους AB είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής. Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο O ώστε η μέτρηση των τμημάτων OA και OB να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μέτρησαν και βρήκαν $OA=20\text{m}$ και $OB=30\text{m}$. Στις OA και OB πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $OG=2\text{m}$ και $OD=3\text{m}$.

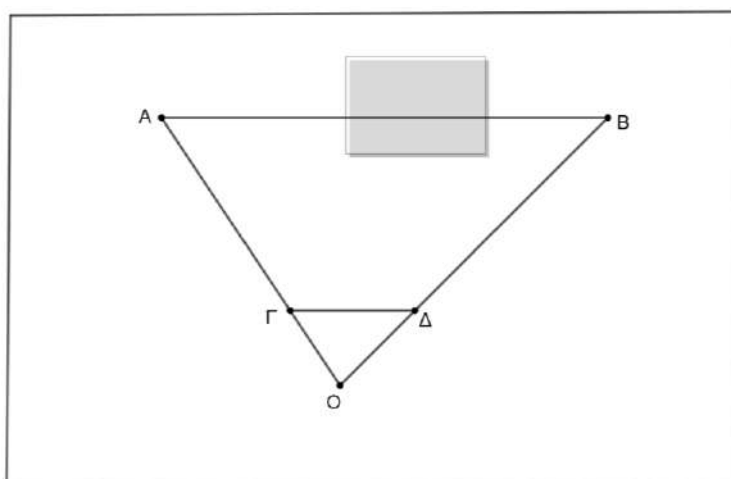
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η ΓΔ είναι παράλληλη με την AB, (Μονάδες 8)
- ii. τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

β) Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων A και B αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ.

Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα $R=10$, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο K και ακτίνα $\rho=6$. Η εφαπτομένη του κύκλου (K,ρ) στο σημείο του Γ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στα σημεία A και B . Η προέκταση της $K\Lambda$ προς το Λ τέμνει τον κύκλο (Λ,R) στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $K\Gamma B$ και $K\Lambda\Delta$ είναι όμοια.

(Μονάδες 8)

ii. $KA \cdot KB = 120$

(Μονάδες 9)

β) Αν είναι $KB=15$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΓΚ$.

(Μονάδες 8)

