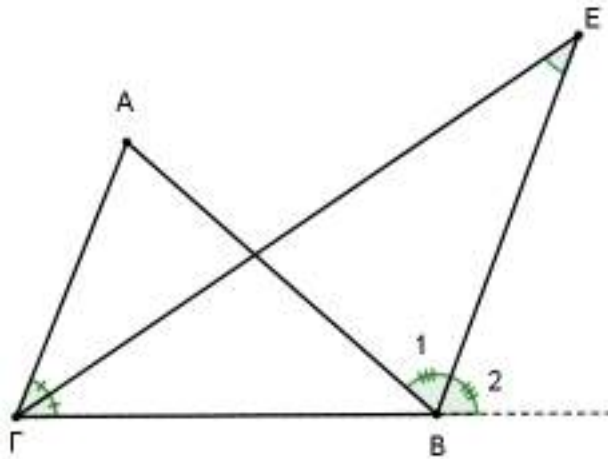


ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ η προέκταση της διχοτόμου της $\hat{\Gamma}$ και της εξωτερικής γωνίας του $\hat{B}$, τέμνονται στο E . Δίνεται ότι $\hat{ABE} = 70^\circ = 2\hat{GEB}$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓBE είναι ισοσκελές (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

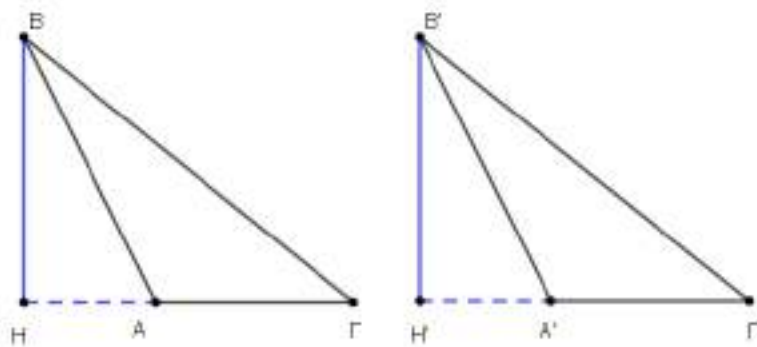
Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A} > 90^\circ$) και $A'B'\Gamma'$ ($\hat{A}' > 90^\circ$) με $\gamma = \gamma'$ και $\beta = \beta'$. Αν τα ύψη BH και $B'H'$ των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

α) $B\hat{A}H = B'\hat{A}'H'$.

(Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 2

Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r) , με $R=3$, $r=2$ και $K\Lambda=4$. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω A και B .

(Μονάδες 15)

β) $\widehat{K\Lambda} > \widehat{A\Lambda K}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

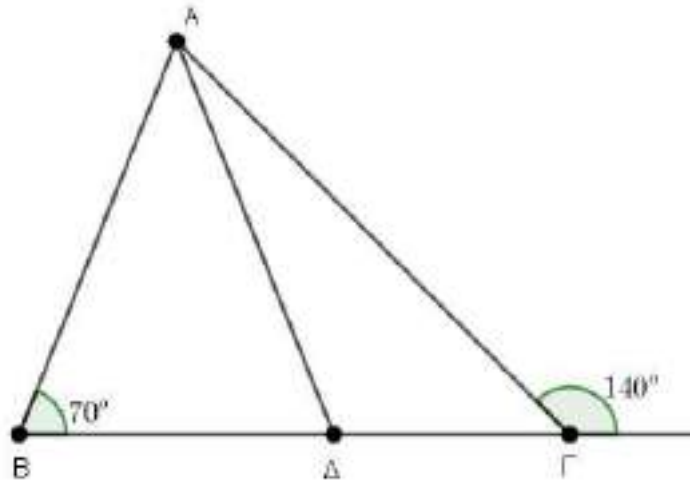
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B}=70^\circ$ και $\widehat{\Gamma}_{\text{εξωτ}}=140^\circ$.

Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε εσωτερικό σημείο Δ , ώστε $AD = AB$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{BA\Delta}=40^\circ$. (Μονάδες 9)

β) $\widehat{A\Delta\Gamma} = 110^\circ$. (Μονάδες 7)

γ) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

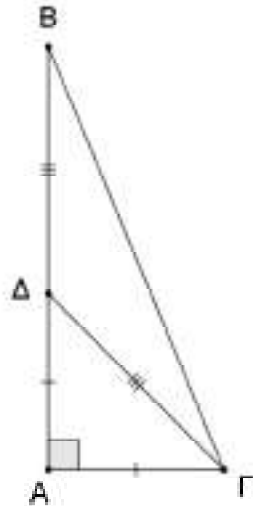
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Στην πλευρά του AB θεωρούμε σημείο Δ ώστε $B\Delta = \Delta\Gamma$ και $A\Delta = A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A\Delta\Gamma} = 45^\circ$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

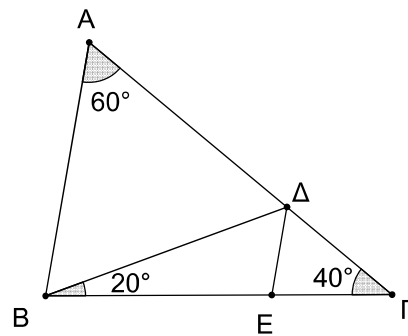
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ , ώστε $\hat{\Gamma}\Delta = 20^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B}\Delta E = 60^\circ$. (Μονάδες 8)

ii. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}\Delta\Gamma$. (Μονάδες 7)



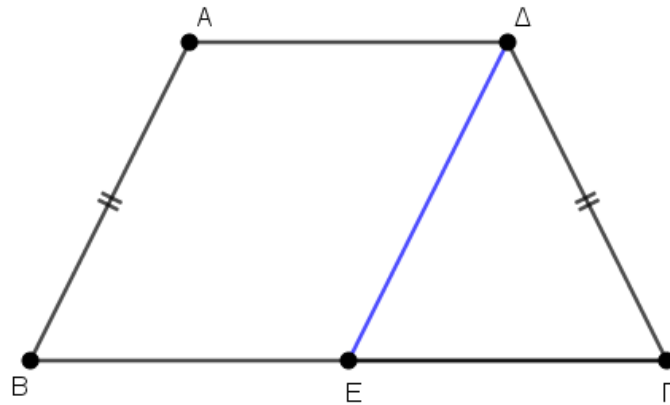
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($A\Delta \parallel B\Gamma$) με $B\Gamma > \Delta\Gamma$.

Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι η ΔE είναι διχοτόμος της $\widehat{A\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $\widehat{A} = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

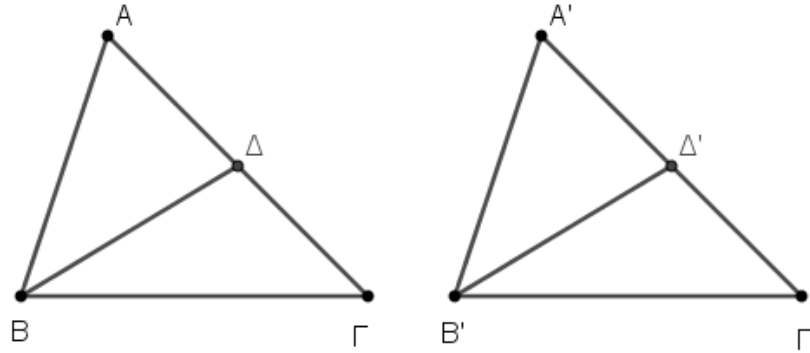


ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος με $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι $B\Delta$ και $B'\Delta'$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{A} = \widehat{A'}$ (Μονάδες 15)

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

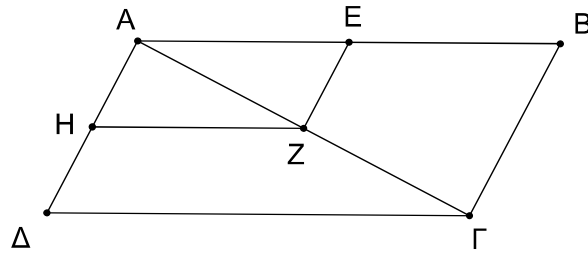
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα E , Z και H των AB , $A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ZH = \frac{AB}{2}$.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $AEZH$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Η κάθετη στην AB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ και η κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

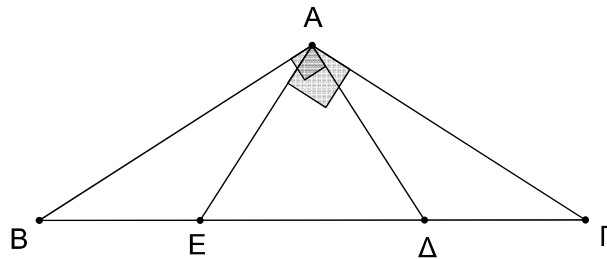
(Μονάδες 10)

β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)

γ) $BE = \Gamma\Delta$.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2

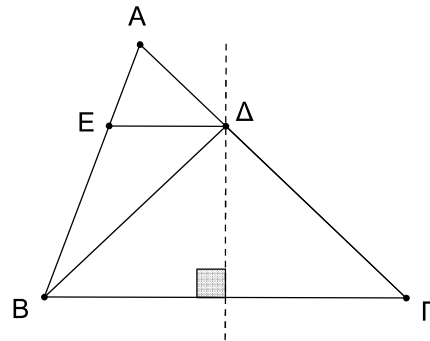
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ και η παράλληλη από το Δ προς τη $B\Gamma$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}B$.

(Μονάδες 13)

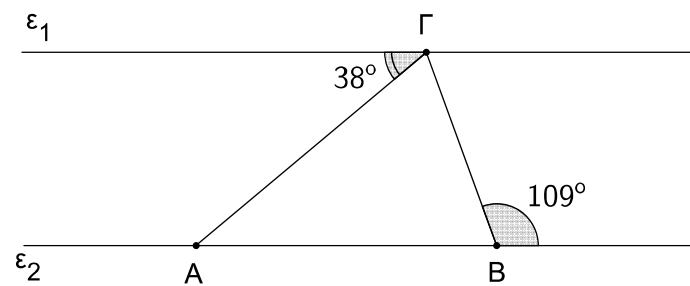


ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε_1 διέρχεται από την κορυφή Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε_2 που ορίζεται από τις κορυφές του A και B . Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 15)

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 10)

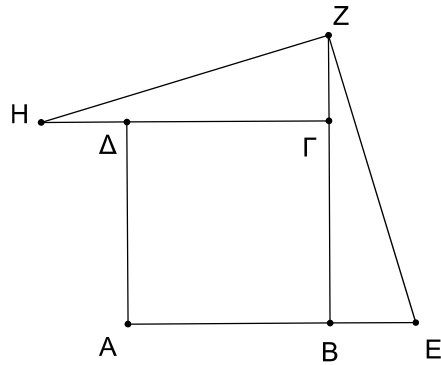


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB προς το B , $B\Gamma$ προς το Γ και $\Gamma\Delta$ προς το Δ θεωρούμε σημεία E , Z και H αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z = \Delta H$.

α) Να αποδείξετε ότι $ZE = ZH$. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{EZH} = 90^\circ$. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος με $\widehat{A}_{εξ} = 100^\circ$ και $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 220^\circ$.

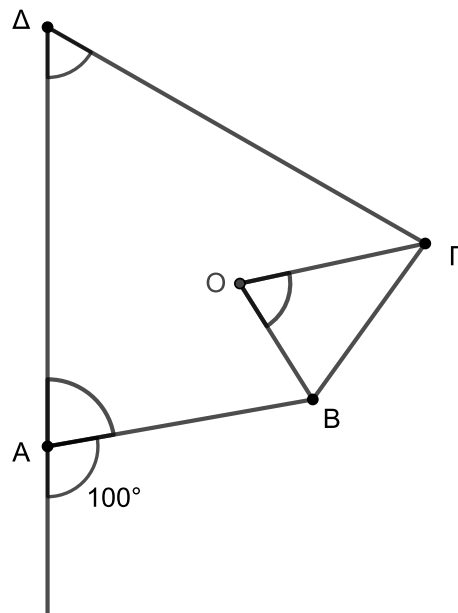
Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται στο Ο, τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Delta}$ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{BO\Gamma} = 70^\circ$.

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2

Σχεδιάζουμε γωνία $\widehat{xOy} = 60^\circ$ και παίρνουμε σημείο A επί της πλευράς Ox , τέτοιο ώστε $AO = 2$. Φέρουμε τη διχοτόμο $O\delta$ της γωνίας $\widehat{xOy}$ και θεωρούμε σημείο M στην $O\delta$, τέτοιο ώστε $AM = AO$. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $\delta\widehat{Oy}$.

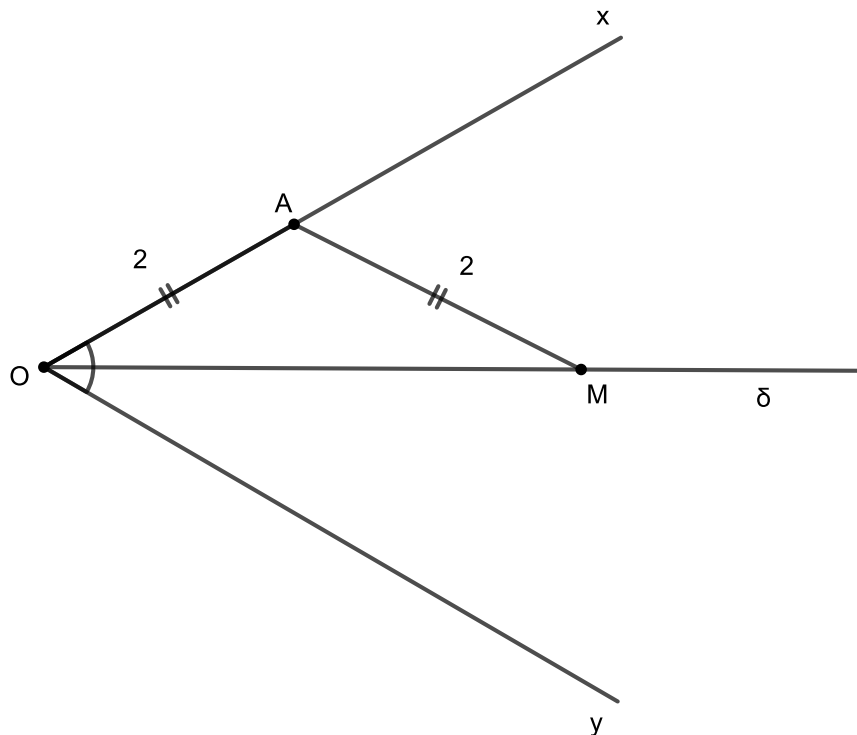
(Μονάδες 6)

β) Τις γωνίες του τριγώνου AOM .

(Μονάδες 9)

γ) Το μήκος του ύψους AB που αντιστοιχεί στη βάση OM του ισοσκελούς τριγώνου AOM .

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

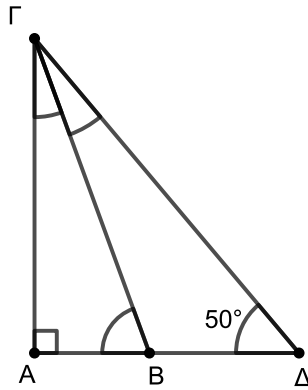
Στο ακόλουθο σχήμα είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{AB\Gamma} - \hat{A\Gamma B} = 50^\circ$ και $\hat{A\Delta\Gamma} = 50^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες $\hat{AB\Gamma}$ και $\hat{A\Gamma B}$ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η ΓB είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R θεωρούμε επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB} = 40^\circ$.

Προεκτείνουμε τις ακτίνες OA και OB κατά τμήματα AG και BD αντίστοιχα, έτσι ώστε $AG = OA$ και $BD = OB$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 70^\circ$.

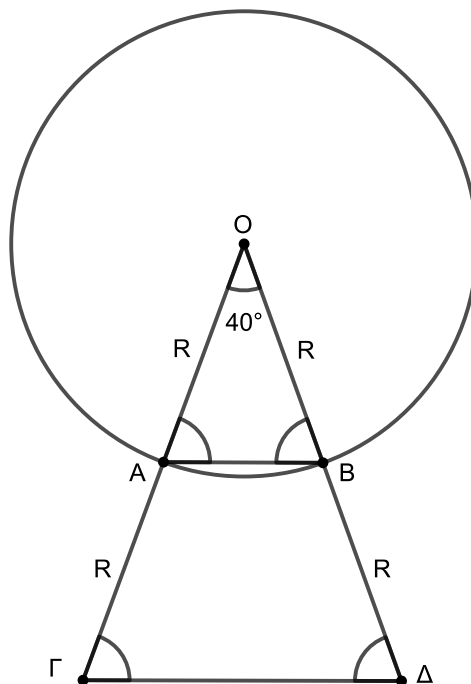
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{O\Gamma\Delta}$ και $\widehat{O\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma\Delta$.

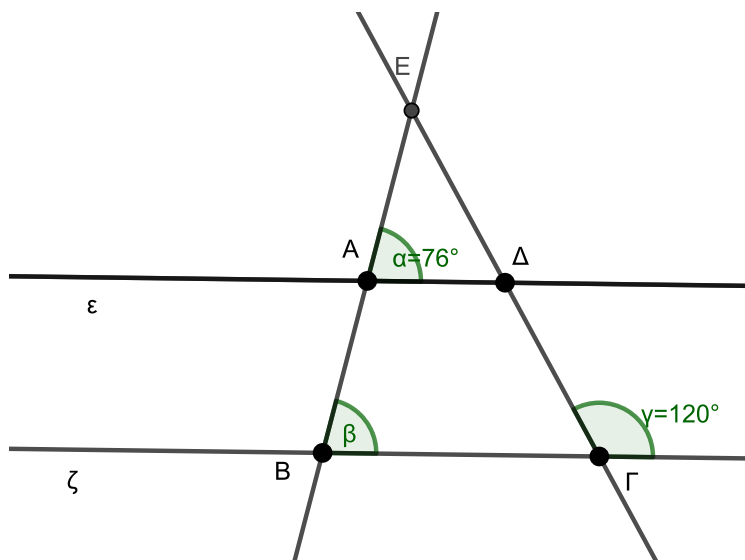
(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ϵ και ζ είναι παράλληλες. Αν είναι $\hat{\alpha} = 76^\circ$ και $\hat{\gamma} = 120^\circ$, να υπολογίσετε :

- α) Τη γωνία $\hat{\beta}$. (Μονάδες 5)
- β) Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)
- γ) Τη γωνία $\hat{E}$ του τριγώνου ΕΑΔ. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2

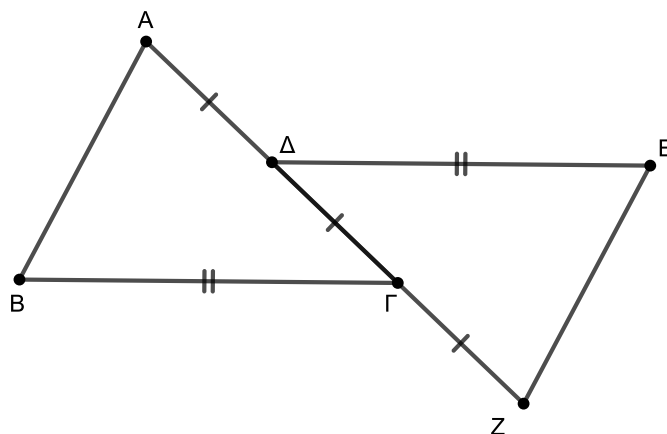
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε το μέσο Δ της πλευράς AG . Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την AG προς το μέρος του Γ και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ZE\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β) $AB \parallel EZ$.

(Μονάδες 15)



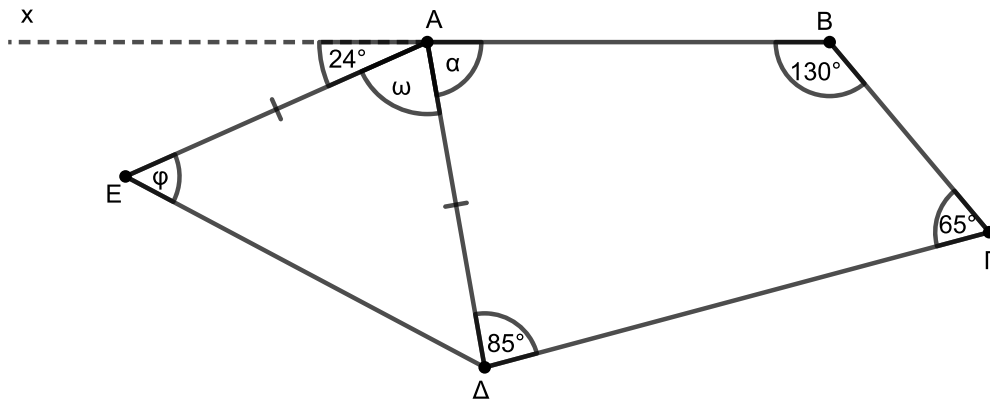
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta E$ είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος AD είναι ίση με την πλευρά AE και η ημιευθεία Ax είναι προέκταση της BA προς το A . Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) Τη γωνία $\hat{\alpha}$. (Μονάδες 08)

β) Τη γωνία $\hat{\omega}$. (Μονάδες 08)

γ) Τη γωνία $\hat{\varphi}$. (Μονάδες 09)



ΘΕΜΑ 2

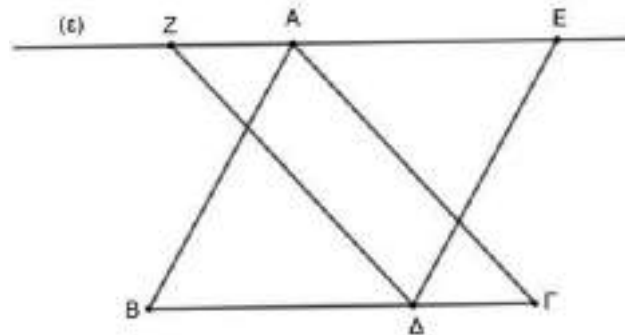
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη $B\Gamma$.

Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τις παράλληλες προς την AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τετράπλευρα $ZA\Gamma\Delta$ και $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο κύκλοι $(K,2)$ και $(\Lambda,5)$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται

εσωτερικά.

(Μονάδες 6)

γ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν ο κύκλος $(K,2)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $(\Lambda,5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι

τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο κύκλοι $(K,3)$ και $(\Lambda,8)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α) $K\Lambda = 13$. (Μονάδες 5)

β) $K\Lambda = 2$. (Μονάδες 5)

γ) $K\Lambda = 5$. (Μονάδες 5)

δ) $K\Lambda = 11$. (Μονάδες 5)

ε) $K\Lambda = 9$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μια ευθεία (ε) . Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:

α) $d = 3$. (Μονάδες 9)

β) $d = 6$. (Μονάδες 8)

γ) $d = 9$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A , B και Γ έτσι ώστε $AB = B\Gamma$. Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{B}E$.

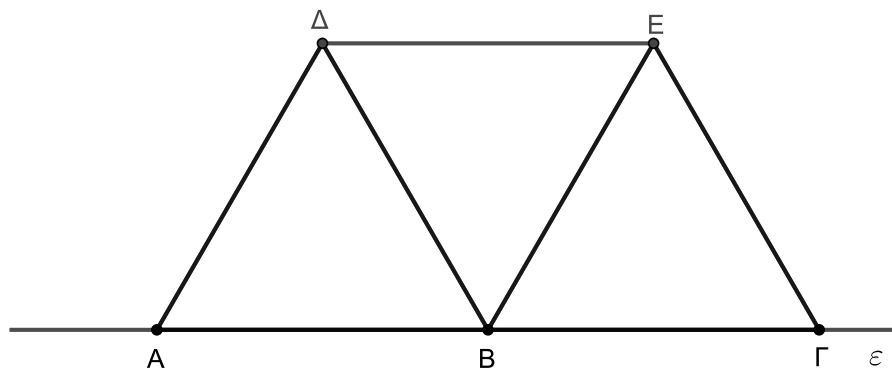
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta E B$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2

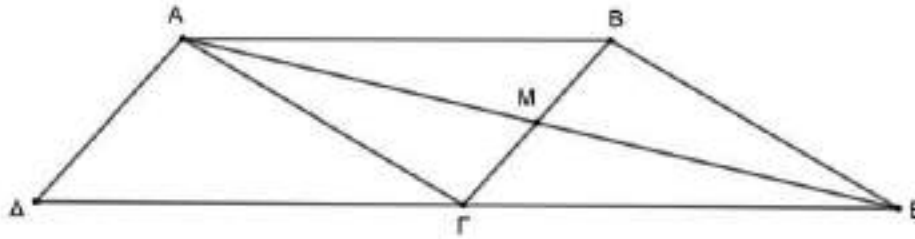
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $AD < AB$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

Προεκτείνουμε την AM προς το M κατά τμήμα $ME = AM$.

Να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) τα σημεία Δ , Γ και E είναι συνευθειακά. (Μονάδες 15)

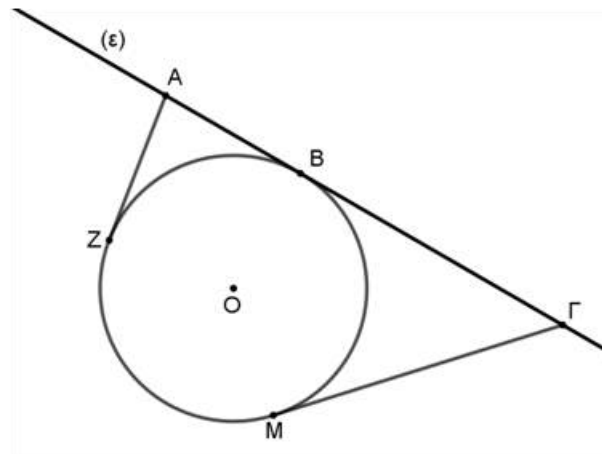


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο B του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε) . Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία A και Γ εκατέρωθεν του B έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AZ και ΓM στον κύκλο.

α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

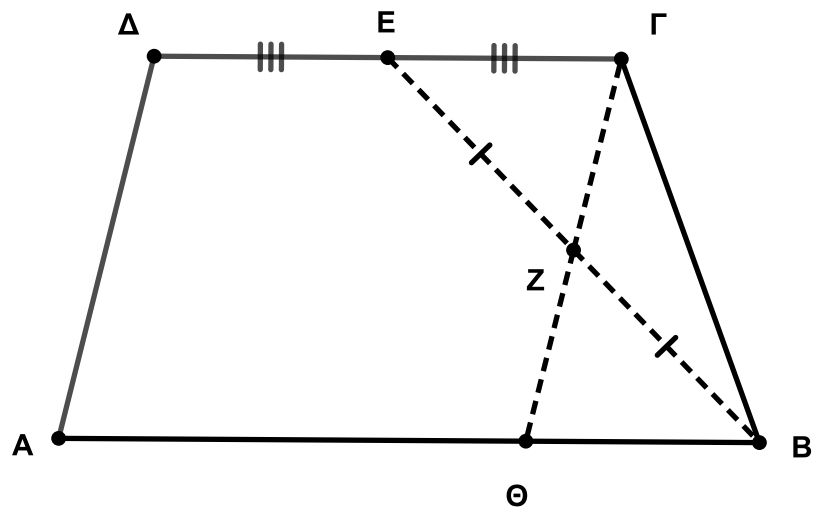
β) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = AZ + M\Gamma$. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Αν E και Z τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και BE αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της AB και της προέκτασης της ΓZ , να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ΓEZ , ΘBZ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
β) $E\Gamma = \Theta B$. (Μονάδες 5)
γ) Το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την BA και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την ΓA (τα σημεία Δ και E βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα $A\Delta MB$ και $A\Gamma ME$ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 12)

β) $\Delta A = A E$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ του σχήματος έχουν $AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$ και $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ίσα και ότι έχουν $BK = \Delta\Lambda$.

(Μονάδες 12)

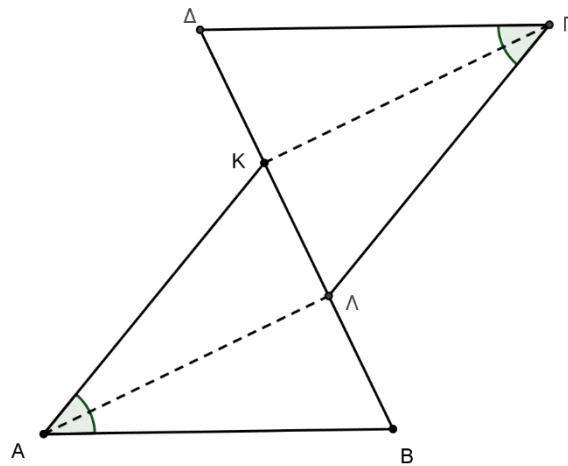
β) Έστω ότι Λ και K είναι τα μέσα των BK και $\Delta\Lambda$ αντίστοιχα:

i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα $B\Lambda$, ΛK και $K\Delta$ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι οι $A\Lambda$ και ΓK είναι κάθετες στην ευθεία $K\Lambda$.

(Μονάδες 8)

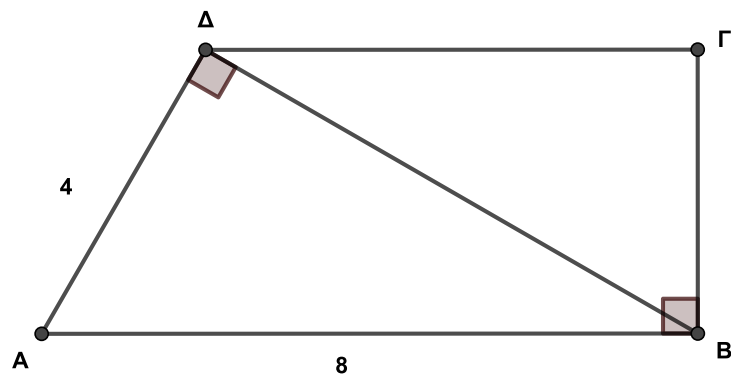


ΘΕΜΑ 2

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η διαγώνιος $B\Delta$ είναι κάθετη στην πλευρά $A\Delta$ και η πλευρά ΓB κάθετη στη βάση AB . Αν $A\Delta=4$ και $AB=8$ τότε:

α) Να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{\Delta\hat{A}B}$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος $B\Delta$ του τραapeζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι διπλάσια της πλευράς του $B\Gamma$. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία E και Z των τμημάτων AO και ΓO αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AE = \Gamma Z$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AED και ΓZB είναι ίσα. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $\hat{A} = 90^\circ$.

α) Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $AB > A\Gamma$. Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί; (Μονάδες 10)

β) Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α) ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με 30° , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:

i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία $\hat{B}$ και πόσες η γωνία $\hat{\Gamma}$; (Μονάδες 8)

ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας; (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα το M είναι μέσο των τμημάτων ΑΓ και ΒΔ. Επίσης $\widehat{AMB} = \widehat{ΓMB}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες.

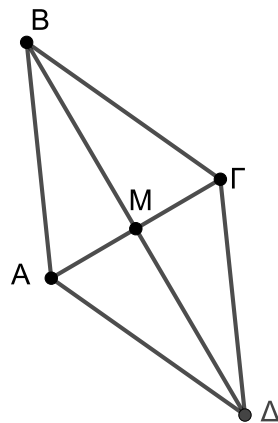
(Μονάδες 10)

ii. Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

β) Το ΑΒΓΔ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;

(Μονάδες 7)



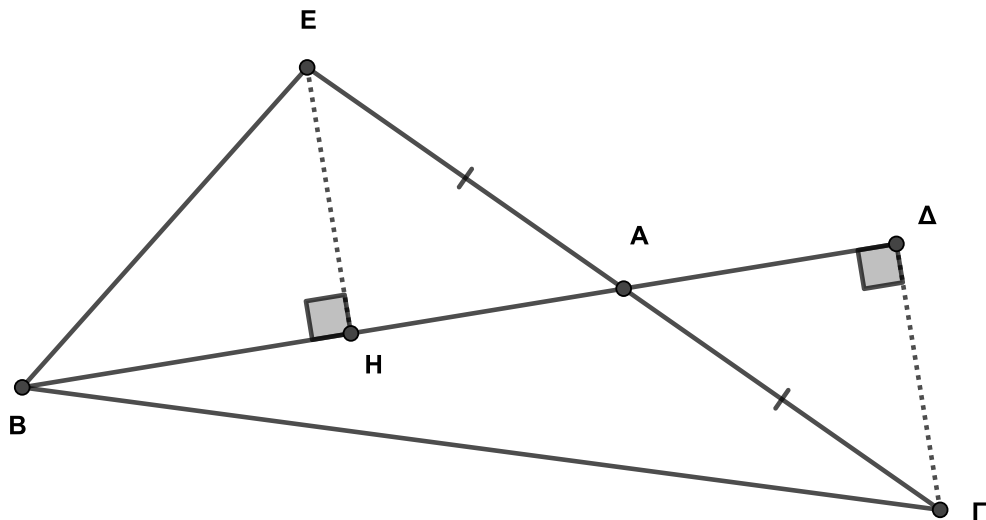
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, το EH είναι ύψος του τριγώνου ABE και η BA είναι διάμεσος του τριγώνου $BE\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και AEH είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $AH=AD$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Gamma\Delta EH$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσό του AM . Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ=B\Gamma$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma H=B\Gamma$, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $ME=AM$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AMZ και EMH είναι ίσα. (Μονάδες 12)

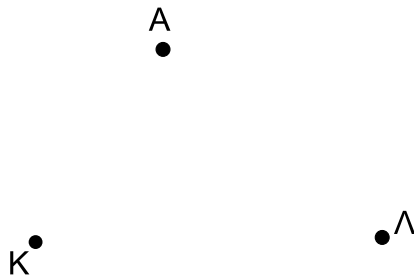
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Τα σημεία A , K και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο A απέχει 4 από το K και 5 από το Λ .

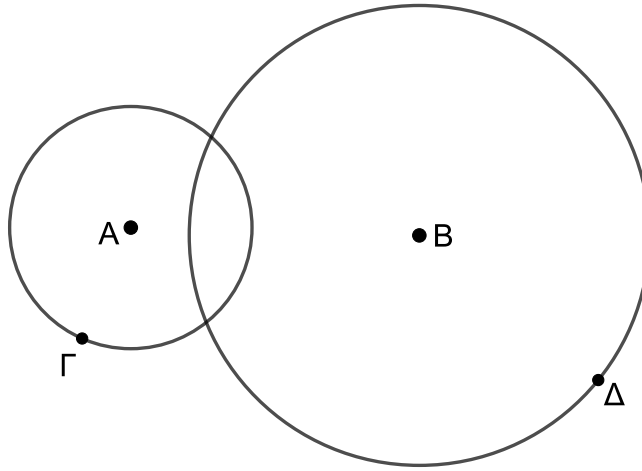
α) Να αποδείξετε ότι $1 < K\Lambda < 9$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα σημείο B του επιπέδου διαφορετικό από το A , που να απέχει 4 από το K και 5 από το Λ . (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$.



Να αποδείξετε ότι $BD - AG < AB < AG + BD$.

(Μονάδες 10)

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 5 από το B του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

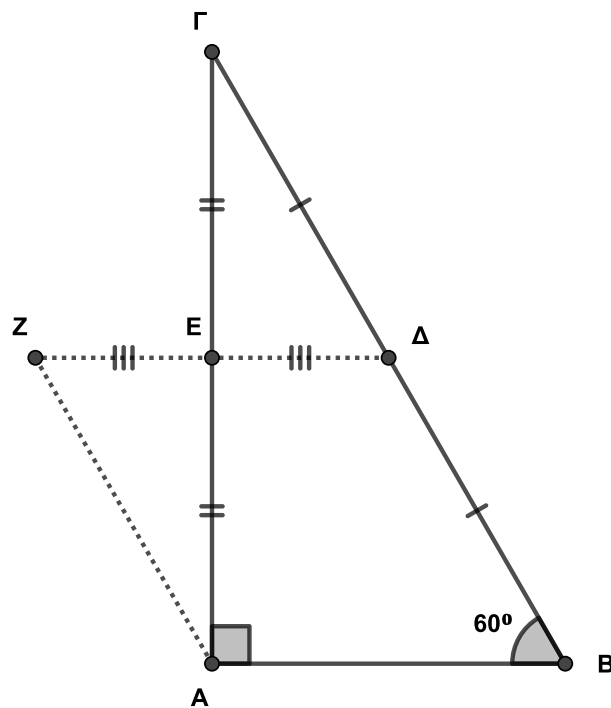
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{B}=60^\circ$. Θεωρούμε τα σημεία Δ και E που είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔE κατά τμήμα $EZ=DE$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta=AZ$.

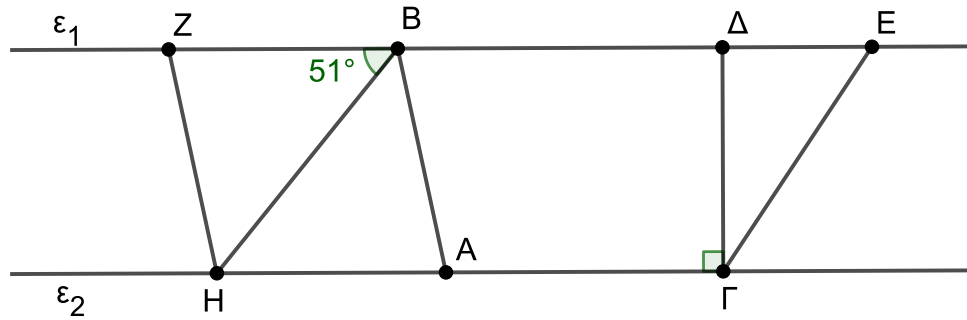
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ZAB είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2



Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο ABZH είναι ρόμβος.

Επίσης δίνεται ότι $\widehat{ZBH} = 51^\circ$ και ότι η $A\Gamma$ είναι ορθή.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{ABH}$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{AHB}$. (Μονάδες 6)

γ) Αν η γωνία $\widehat{E}$ του τριγώνου ΓΔΕ είναι ίση με 56° , να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

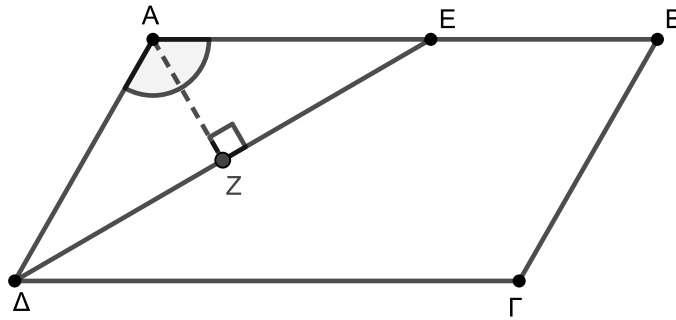
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB=2A\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E , και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα AZ στη DE . Να αποδείξετε ότι:

α) γωνία $\hat{A\Delta E} = 30^\circ$

(Μονάδες 10)

β) $AZ = \frac{AB}{4}$

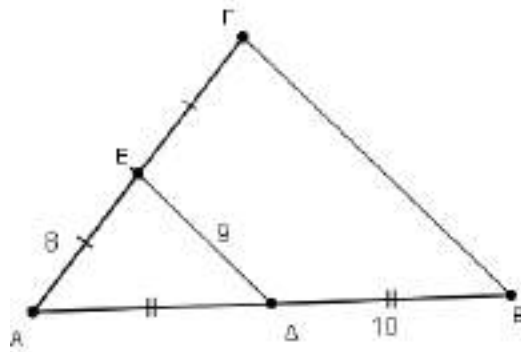
(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $AE=8$, $ED=9$ και $\Delta B=10$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)
- β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 8)
- γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου $AB\Gamma$ και του τετραπλεύρου $\Delta E\Gamma B$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου O φέρουμε τις διαμέτρους του $A\Gamma$ και $B\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Τί είδους γωνία σχηματίζουν οι διάμετροι $A\Gamma$ και $B\Delta$ αν το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο $AB\Delta$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα AEB και $AZ\Delta$.

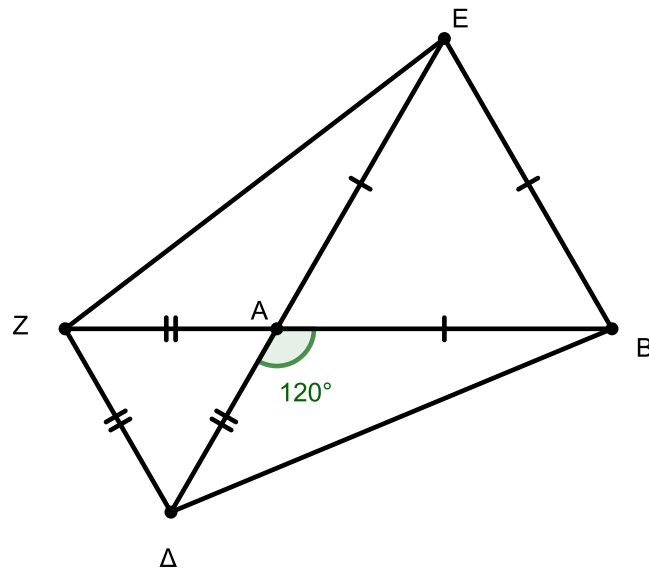
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEZ και $AB\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Το τμήμα ΔZ είναι παράλληλο στο BE .

(Μονάδες 12)



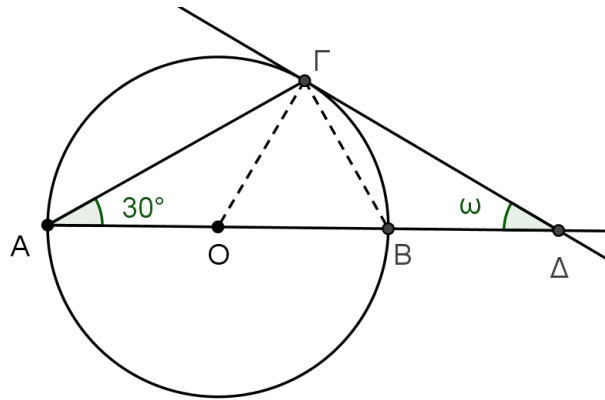
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB , και χορδή του $A\Gamma$ τέτοια ώστε $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου AB (προς το B) σε σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma O \Delta$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας του $\widehat{\Gamma O \Delta}$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\omega}$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $O\Delta = 2R$. (Μονάδες 8)



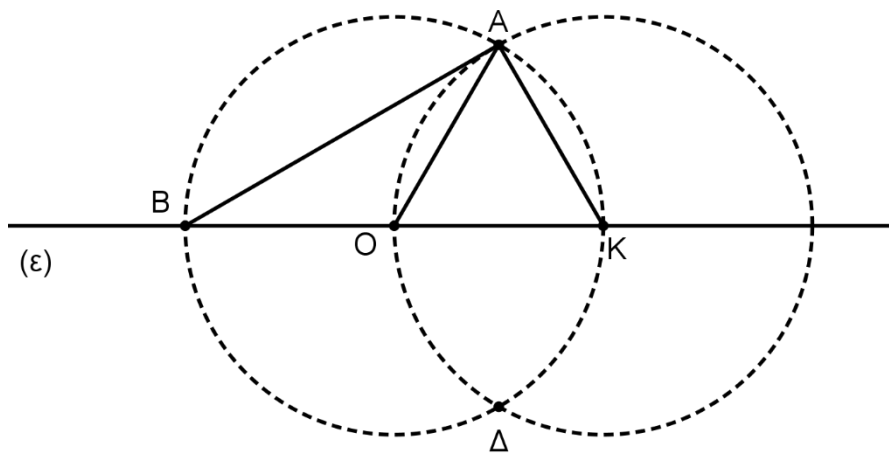
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε δυο ίσους κύκλους (O, ρ) και (K, ρ) τεμνόμενους στα σημεία A και Δ , με τα κέντρα τους O και K να βρίσκονται σε ευθεία (ε) που τέμνει τον κύκλο (O, ρ) σε σημείο B , και τη διάκεντρό τους OK να είναι ίση με ρ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο, (Μονάδες 7)
- ii. το τρίγωνο ABK είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ABK . (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

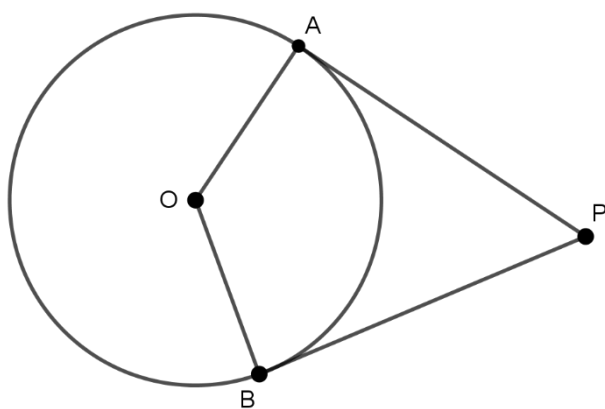
Δίνεται κύκλος κέντρου O και ακτίνας 4 cm και εξωτερικό του σημείο P . Έστω PA , PB τα εφαπτόμενα τμήματα που φέρονται από το P , τα σημεία επαφής τους A , B με τον κύκλο αντίστοιχα και τέτοια ώστε η γωνία $\widehat{APB}$ να ισούται με 60° .

α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο της γωνίας $\widehat{AOB}$ είναι ίσο με 120° . (Μονάδες 7)

β) Αν PO η διακεντρική ευθεία του σημείου P , τότε να υπολογίσετε:

i. το μέτρο της γωνίας $\widehat{APO}$, (Μονάδες 9)

ii. το μήκος του τμήματος OP . (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $E\Gamma\Delta$ με $AB = A\Gamma = E\Gamma = E\Delta$, όπου Δ είναι το μέσο της $A\Gamma$ και $B\Gamma = \frac{AB}{2}$. Έστω Z το σημείο στο οποίο η προέκταση της $E\Delta$ προς το Δ τέμνει την AB .

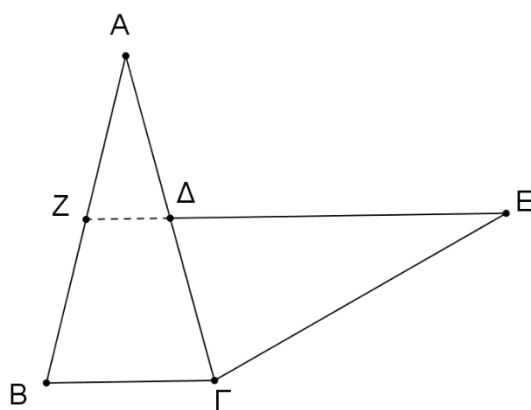
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) το σημείο Z είναι το μέσο της AB .

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

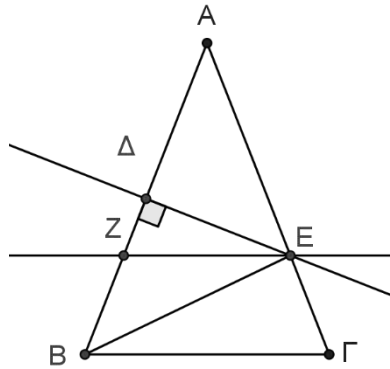
Να αποδείξετε ότι:

α) $AE=BE$,

(Μονάδες 15)

β) το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα $\Delta E=A\Delta$ και φέρουμε την BE που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο H .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές, (Μονάδες 7)

β) το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 9)

γ) η AH είναι διάμεσος του BAE τριγώνου. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE των γωνιών B και Γ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και $\Gamma B E$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Έστω $E\text{H}$ και ΔZ οι κάθετες από τα σημεία E και Δ αντίστοιχα στη $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $E\text{H} = \Delta Z$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και ΓN . Προεκτείνουμε την BM (προς το M) κατά τμήμα $M\Delta=BM$ και την ΓN (προς το N) κατά τμήμα $NE=\Gamma N$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $AE \parallel B\Gamma$. (Μονάδες 13)

β) Είναι τα σημεία E , A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνιός του $B\Delta$. Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε τις κάθετες AE και ΓZ στη $B\Delta$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $\Gamma B Z$ είναι ίσα, (Μονάδες 10)

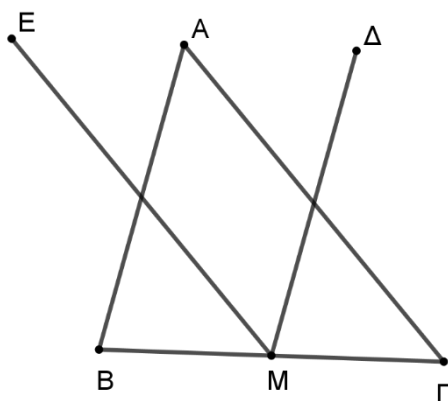
β) το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά GA .

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta A = AE$, (Μονάδες 8)
- β) τα σημεία Δ , A και E βρίσκονται στην ίδια ευθεία, (Μονάδες 9)
- γ) $\Delta E = B\Gamma$. (Μονάδες 8)

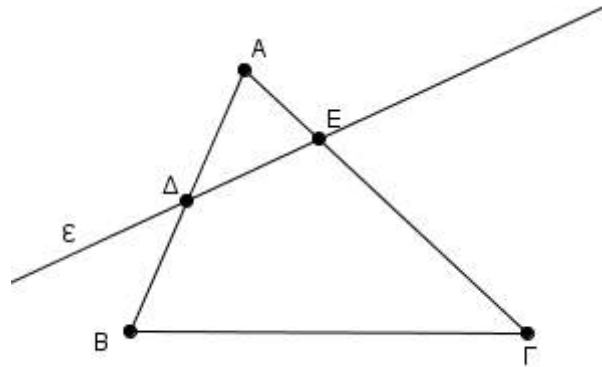


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της πλευράς AB . Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο E . Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $A\Delta E$ και σε ένα τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$.

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του $AB\Gamma$ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, προεκτείνουμε την πλευρά ΔA (προς το A) κατά τμήμα $AH=\Delta A$.

Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, η οποία τέμνει την AB στο σημείο Z .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο ΔZH είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται $ABΓΔ$ παραλληλόγραμμο με $AB=2AD$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΔΕ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Είναι το σημείο E μέσο της πλευράς AB ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο E του τμήματος AO και σημείο Z του τμήματος $O\Gamma$, ώστε $OE=OZ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $DE=BZ$, (Μονάδες 12)

β) το ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB σε σημείο Δ . Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά $B\Gamma$ μια κάθετη ευθεία, η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ σε σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \Delta E$, (Μονάδες 13)

β) $A\Delta < \Delta B$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BA=BE$, (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $\hat{B\Delta A} = 55^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Gamma\Delta E$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος AD της γωνίας του $\widehat{A}$.

Από το σημείο D φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) $DE = \frac{A\Gamma}{2}$, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο $DE\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, (Μονάδες 8)

γ) $DE = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) φέρουμε τη διχοτόμο $A\Delta$ και μια ευθεία (ϵ) παράλληλη προς την $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

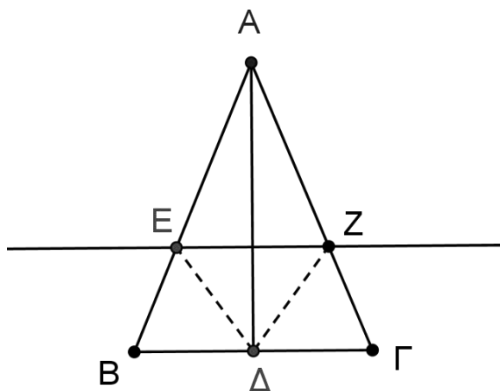
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 12)

β) τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $AZ\Delta$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE .

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ είναι ίσα,

(Μονάδες 15)

β) $A\Delta=AE$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και το μέσο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε τις αποστάσεις MK και ML του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $MK=ML$, (Μονάδες 13)

β) η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $K\hat{M}L$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $M\Delta = ME$ (Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

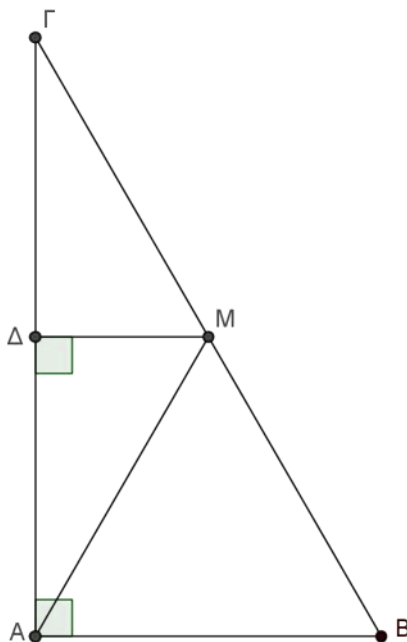
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 8 \text{ cm}$. Έστω AM είναι διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$. Αν η γωνία $\hat{AM}\Gamma$ είναι ίση με 120° , τότε:

α) Να δείξετε ότι $AB = 4 \text{ cm}$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μήκος της $M\Delta$.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$, $AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4 \Delta\Gamma$ και $\widehat{B} = 60^\circ$ και $\Gamma H \perp AB$.

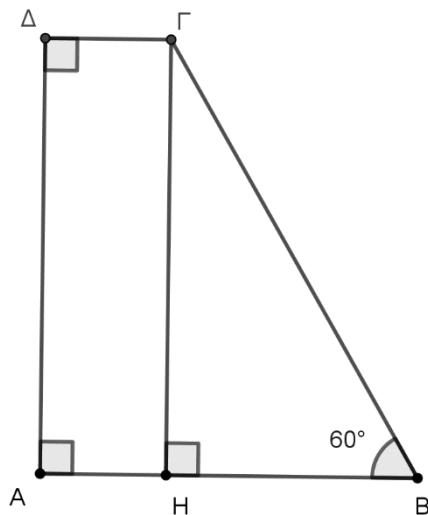
Να αποδείξετε ότι:

α) $HB = 2\Delta\Gamma$,

(Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο ΑΗΓΔ είναι ορθογώνιο με $AH = \frac{1}{2} HB$.

(Μονάδες 13)



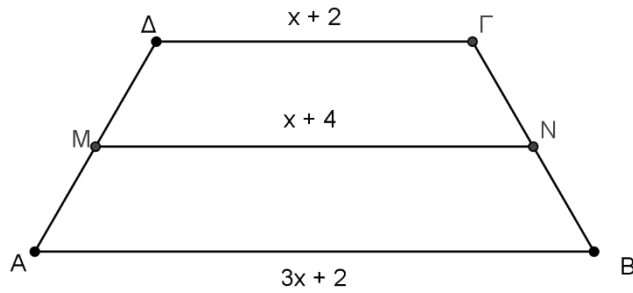
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$), με $AB > \Gamma\Delta$ και MN η διάμεσός του.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$. (Μονάδες 10)

β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της BA (προς το μέρος της κορυφής A) παίρνουμε σημείο Δ ώστε $AB = A\Delta$ και στην προέκταση της $\Delta\Gamma$ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta\Gamma = \Gamma E$.

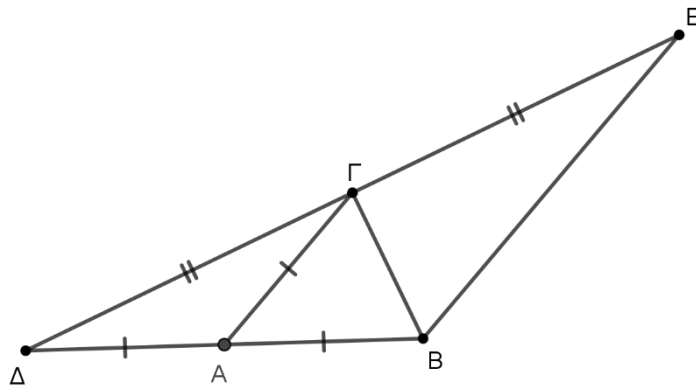
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο,

(Μονάδες 12)

β) $A\Gamma \parallel BE$ και $A\Gamma = \frac{BE}{2}$.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία $\widehat{xOy}$. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή O της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Ox και Oy της γωνίας στα σημεία A και B αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

(Μονάδες 25)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο M και τα σημεία K και Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$.

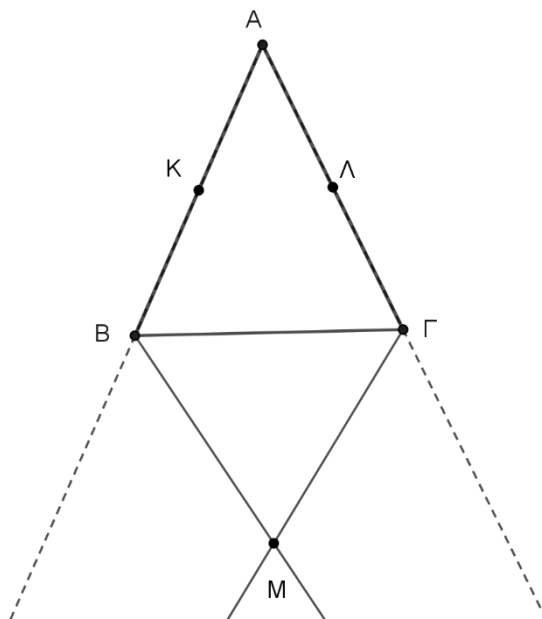
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές με $MB=M\Gamma$,

(Μονάδες 12)

β) $MK=M\Lambda$.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

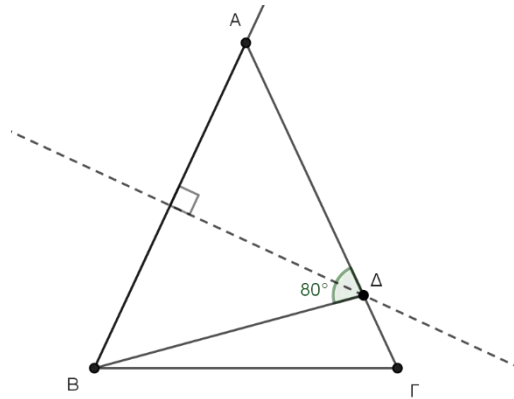
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο η εξωτερική γωνία A είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας $\widehat{A\Gamma B}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς AB τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο Δ .

Αν η γωνία $\widehat{A\Delta B}$ είναι ίση με 80° , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 15)

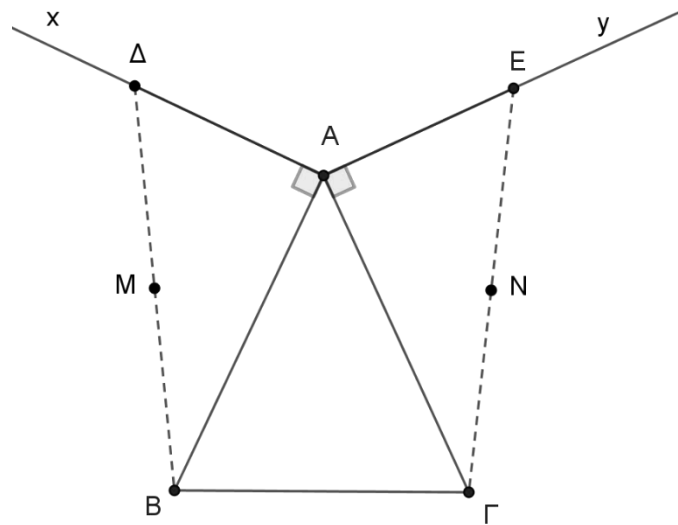


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp AG$, όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Στις Ax και Ay θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta=AE$.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta=\Gamma E$. (Μονάδες 12)

β) Αν M και N είναι τα μέσα των τμημάτων $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AMN είναι ισοσκελές (Μονάδες 13)

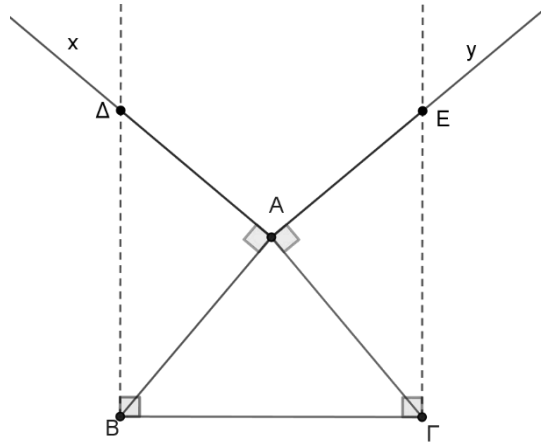


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp AG$, όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Οι κάθετες στην πλευρά $B\Gamma$ στα σημεία B και Γ τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$. (Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου που έχει για κορυφές τα σημεία A , E και Δ . (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς του AB .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές, (Μονάδες 10)

β) η DE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 8)

β) οι γωνίες $A\hat{I}\Gamma$ και $A\hat{I}B$ είναι ίσες, (Μονάδες 10)

γ) η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)

β) η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και η διάμεσός του AM . Στο τρίγωνο $AM\Gamma$ θεωρούμε τη διάμεσο $M\Delta$ την οποία προεκτείνουμε προς το Δ κατά τμήμα $\Delta E=\Delta M$. Φέρουμε από το σημείο Δ τμήμα ΔZ κάθετο στην AM .

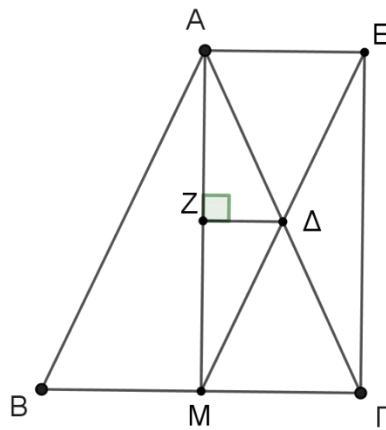
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι ορθογώνιο,

(Μονάδες 12)

β) $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$ και τα κάθετα τμήματα AE , BZ στη $\Delta\Gamma$.

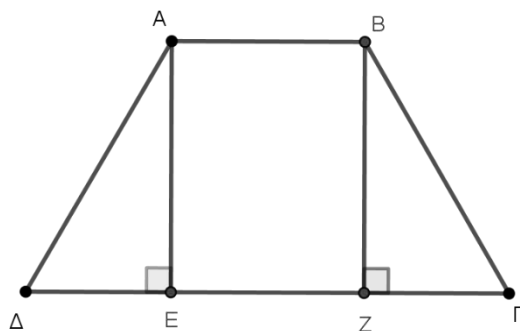
Να αποδείξετε ότι:

α) $DE = \Gamma Z$,

(Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Από τα σημεία A και B φέρνουμε τα κάθετα τμήματα AE και BZ αντίστοιχα στη $\Delta\Gamma$.

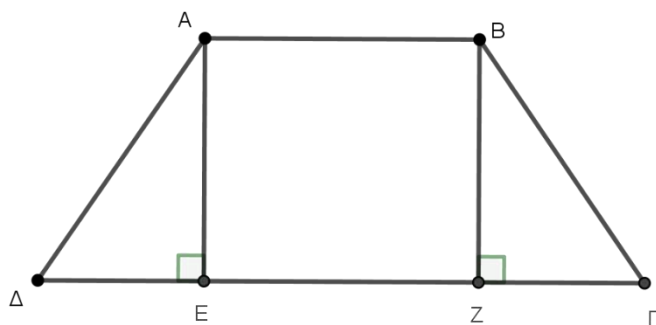
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E = \Gamma Z$,

(Μονάδες 12)

β) $AZ = BE$.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$), το ύψος του $A\Delta$ και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

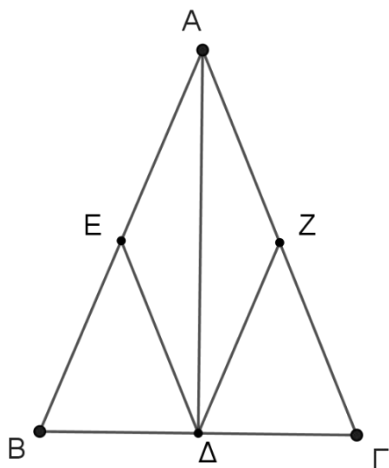
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα,

(Μονάδες 15)

β) το τετράπλευρο $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B'=A'\Gamma'$).

α) Αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 13)

β) η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE . (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και γωνία $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θεωρούμε το ύψος του $A\Delta$ και το μέσο Z της πλευράς $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔE . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BD και GE που αντιστοιχούν στις πλευρές του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$, τότε τα ύψη BD και GE είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Αν τα ύψη BD και GE είναι ίσα, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma=AB$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά ίσο τμήμα $M\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε το $A\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Έστω K σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $B\Delta = \Delta K$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ABK είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο $ABEK$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Από το Δ φέρουμε ευθεία κάθετη στη $B\Gamma$ που την τέμνει σε σημείο E και έστω Z το σημείο στο οποίο η $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της πλευράς BA προς το A .

Να αποδείξετε ότι:

α) $AB=BE$, (Μονάδες 13)

β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ZEB είναι ίσα. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Θωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και σημεία Δ και E στην ευθεία $B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta=GE$. Έστω ότι $\Delta Z \perp AB$ και $E\text{H} \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $BZ=GH$,

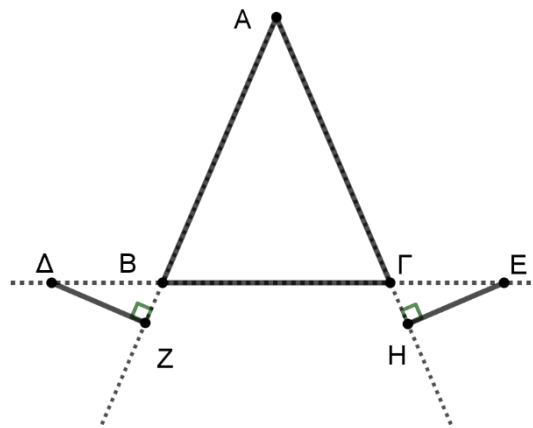
(Μονάδες 10)

ii. το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\hat{A} = 50^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AZH .

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2

Στο ακόλουθο σχήμα, η AD είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το E είναι σημείο στην προέκταση της AD , ώστε $DE=AD$.

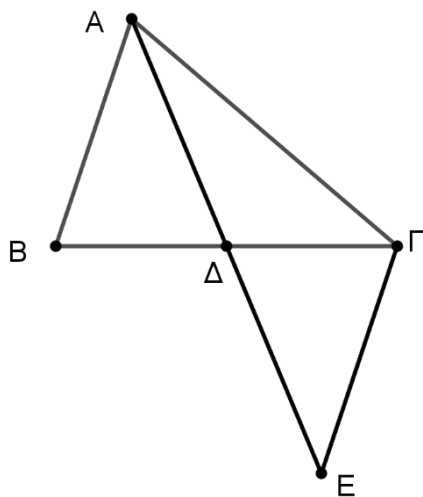
Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = \Gamma E$,

(Μονάδες 12)

β) $AE < AB + A\Gamma$.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\widehat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο Δ . Από το Δ φέρουμε τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα, (Μονάδες 13)

β) Το Γ ισαπέχει από τα σημεία A και E και η ευθεία $\Gamma\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος AE .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

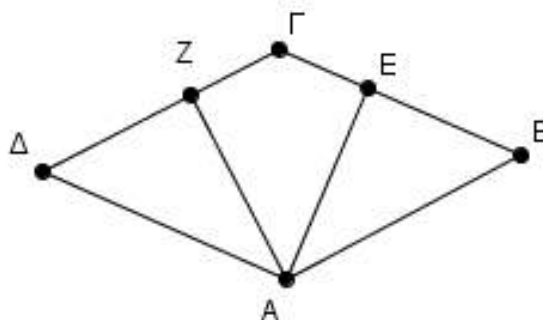
Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι τα τμήματα AZ και AE είναι κάθετα στις πλευρές $\Delta\Gamma$ και ΓB αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε $AZ=AE$. (Μονάδες 12)

β) Αν για το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ισχύει $AZ=AE$, τότε αυτό είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

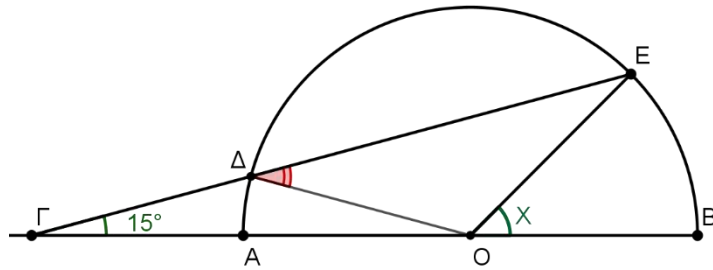
Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ . Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓE με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα $\Gamma \Delta$ είναι ίσο με το OB και η γωνία $\widehat{B\Gamma E}$ είναι 15° , τότε

α) να αποδείξετε ότι $\widehat{ODE} = 30^\circ$.

(Μονάδες 13)

β) να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{EOB} = x$.

(Μονάδες 12)

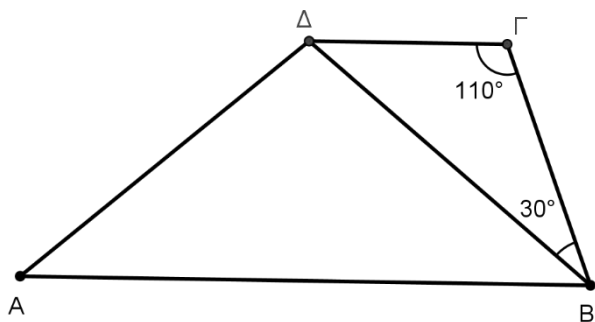


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Delta\Gamma$, στο οποίο η διαγώνιος $B\Delta$ είναι ίση με την πλευρά $A\Delta$.

Αν είναι η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^\circ$ και η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma = 30^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{\Delta}B$.

(Μονάδες 25)

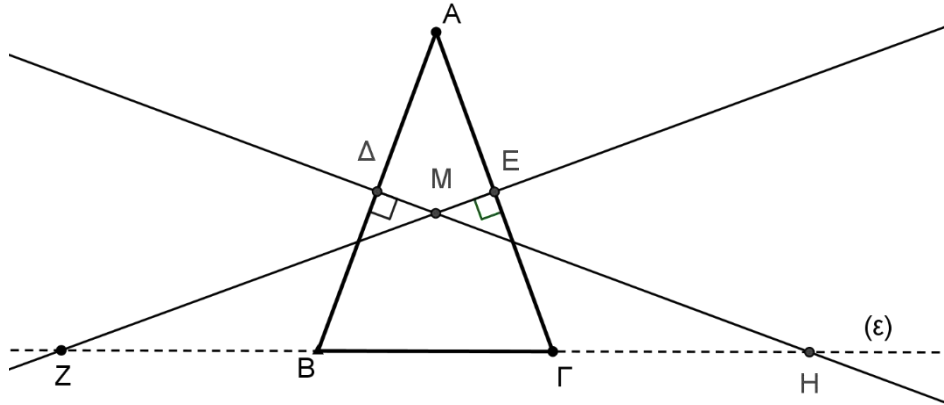


ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και τα μέσα Δ , E των πλευρών του AB , AG αντίστοιχα. Έστω ότι οι μεσοκάθετες ευθείες των πλευρών AB και AG τέμνονται στο M και οι οποίες τέμνουν τον φορέα (ε) της βάσης $B\Gamma$ στα σημεία H και Z .

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBH και $EZ\Gamma$. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB//\Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των ΔZ και ΓE .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta Z = \Gamma E$, (Μονάδες 13)

β) τα τρίγωνα EKZ και $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

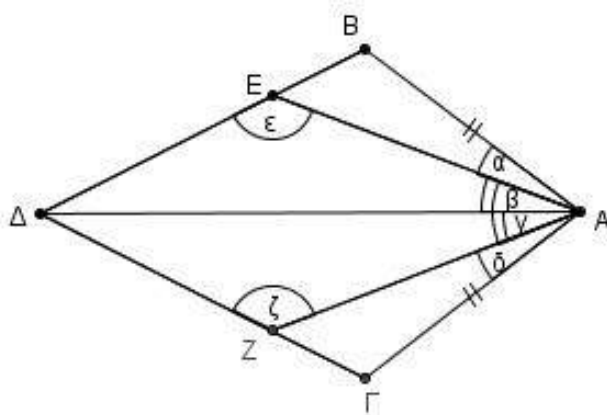
Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB = AG$, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $\hat{\epsilon}$ και $\hat{\zeta}$ είναι ίσες.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

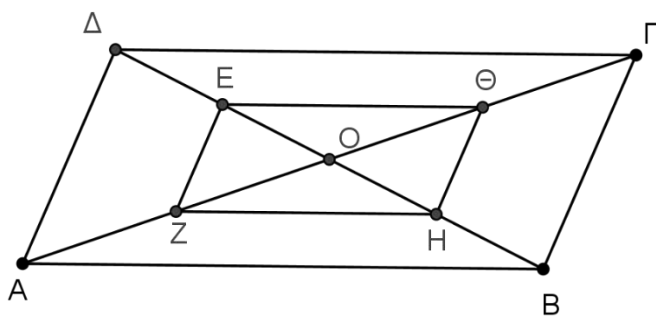
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, του οποίου οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και ΔB τέμνονται στο σημείο O .

Έστω E , Z , H και Θ είναι τα μέσα των OD , OA , OB και OG αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του $E\Theta HZ$.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου O , έστω OA μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της OA που τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο OBA είναι ισόπλευρο, (Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο $OBA\Gamma$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B\hat{A}\Gamma} = \hat{B\hat{\Gamma}A}$,

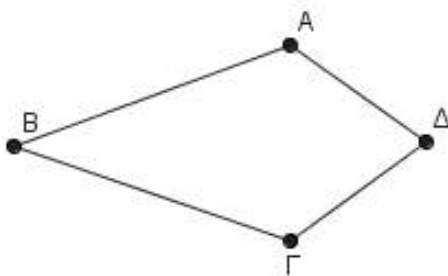
(Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 10)

γ) η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία $\hat{xOy}$ και σημείο A στο εσωτερικό της. Από το A φέρνουμε τις κάθετες AB , AG προς τις πλευρές Ox , Oy της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε M το μέσο του OA .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο BMA είναι ισοσκελές, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο $BMΓ$ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 8)

γ) $\hat{BMA} = 2 \cdot \hat{xOA}$. (Μονάδες 9)

