

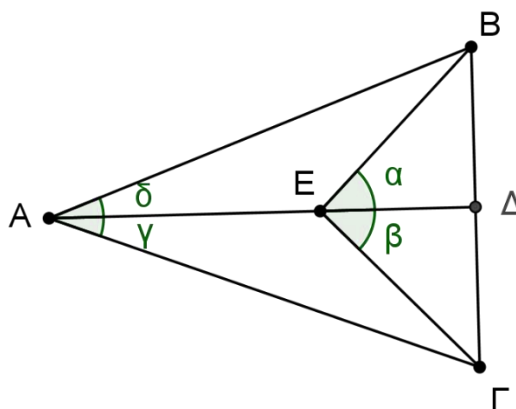
ΘΕΜΑ 2

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα AEB και AEG είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $ΓΕΒ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$. (Μονάδες 9)



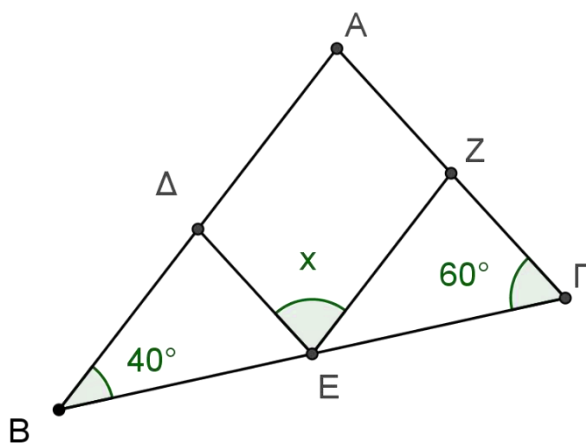
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} = 40^\circ$ και $\widehat{\Gamma} = 60^\circ$. Επιπλέον, τα σημεία Δ , E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel A\Gamma$ και $ZE \parallel AB$. (Μονάδες 8)

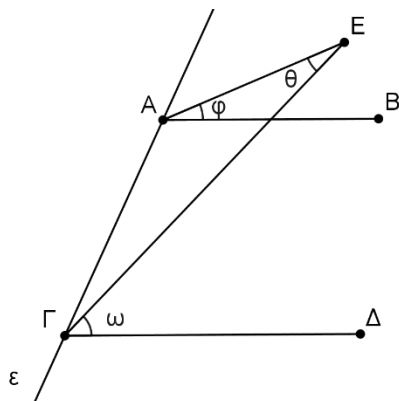
γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2

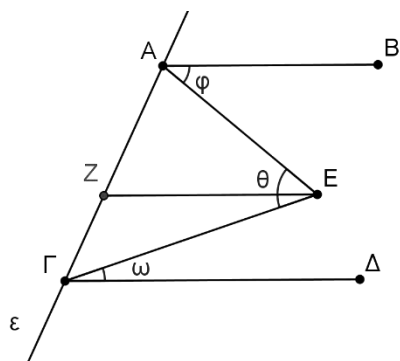
Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ καθώς και ένα τυχαίο σημείο E βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε .

α) Αν το E είναι εκτός των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$.



(Μονάδες 10)

β) Αν το E είναι ανάμεσα στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ και $EZ \parallel AB$, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$.



(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

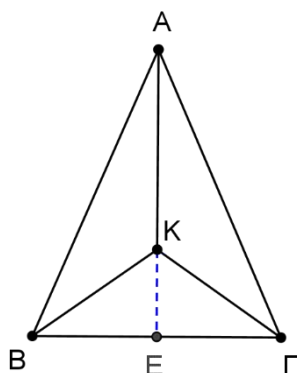
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

ii. η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$. (Μονάδες 6)

β) Αν η προέκταση της AK τέμνει την $B\Gamma$ στο E , τότε να δείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του τριγώνου $BK\Gamma$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2

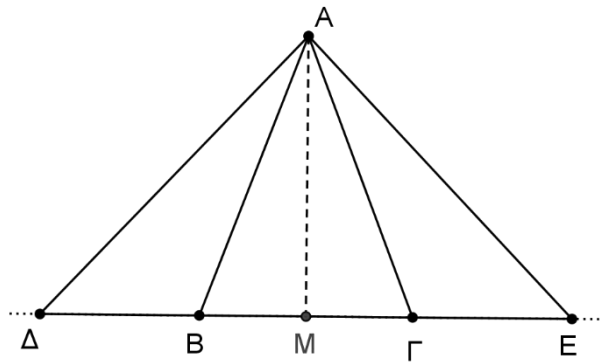
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και η διάμεσος του AM . Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Gamma E}$, (Μονάδες 6)

β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

γ) η AM είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2

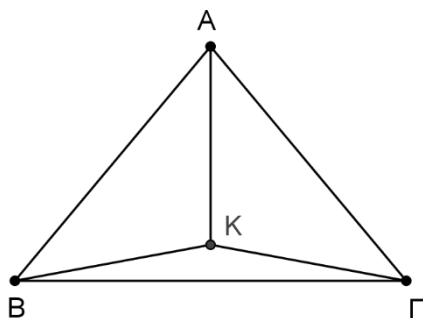
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$ και $\hat{A} = 80^\circ$. Έστω K σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τέτοιο ώστε $KB=KA=K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BKA και ΓKA είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε:

i. τις γωνίες $\hat{ABK}$ και $\hat{A\Gamma K}$, (Μονάδες 8)

ii. τη γωνία $\hat{BK\Gamma}$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$). Έστω Δ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος DE της γωνίας $\widehat{A\Delta B}$ να είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{E\Delta B} = \widehat{\Delta B\Gamma}$ και $\widehat{E\Delta A} = \widehat{\Gamma}$,

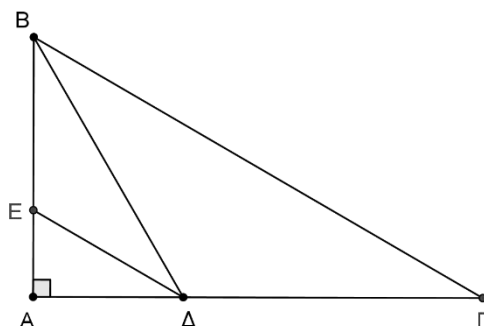
(Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

β) Αν είναι $\widehat{A\Delta B} = 60^\circ$, τότε να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\Gamma}$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του AM . Φέρουμε ημιευθεία Γx κάθετη στη $B\Gamma$, προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A , και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\hat{\Delta}A$,

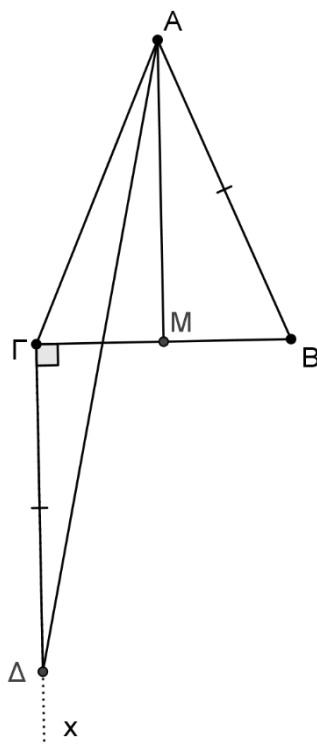
(Μονάδες 12)

β) $\Gamma\Delta \parallel AM$,

(Μονάδες 6)

γ) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2

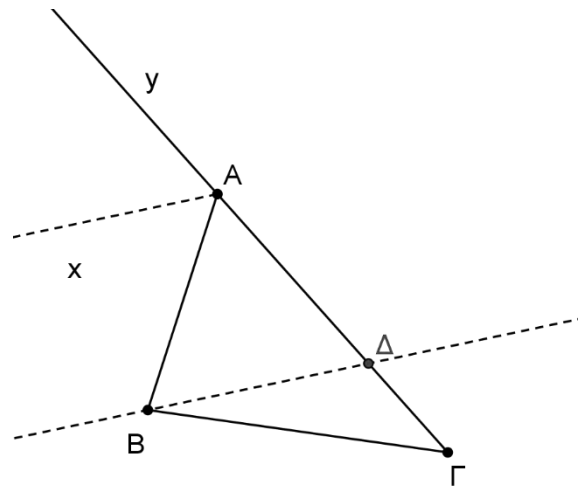
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Έστω Ax η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\widehat{A}_{\varepsilon\varepsilon}$, όπου $\widehat{A}_{\varepsilon\varepsilon} = 120^\circ$. Από την κορυφή B φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Ax , η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{\Delta BA} = 60^\circ$, (Μονάδες 9)

ii. το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο, (Μονάδες 9)

β) Αν η γωνία $\widehat{B\Delta A}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA (προς το A) και GA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $AD=AB$ και $AE=AG$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ADE είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) $ED \parallel B\Gamma$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα $ΑΔ = ΑΒ$ και $ΑΕ = ΑΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = ΒΓ$. (Μονάδες 12)

β) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΕΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα, (Μονάδες 7)

ii. $ΖΔ = \frac{ΔΕ}{2}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε τα μέσα Μ και Ν των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΔ=ΜΓ$, (Μονάδες 12)

β) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Μ και Ν είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ.

(Μονάδες 13)

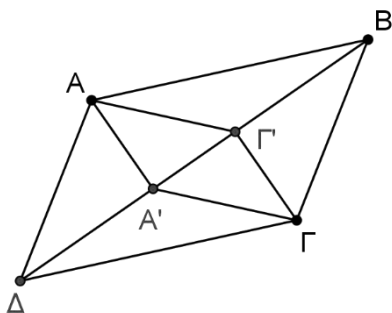
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τμήματα AA' , $\Gamma\Gamma'$ κάθετα στη διαγώνιο $B\Delta$ από τις κορυφές A, Γ αντίστοιχα. Αν τα σημεία A' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α) $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$, (Μονάδες 8)

β) $AA' = \Gamma\Gamma'$, (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο $A\Gamma'\Gamma A'$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο ώστε $MB = M\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα (Μονάδες 12)

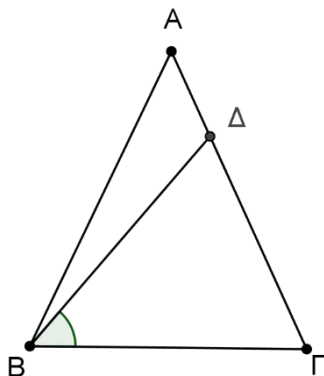
β) η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $B\hat{M}\Gamma$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) με γωνία $\hat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς $A\Gamma$, τέτοιο ώστε $B\Delta=B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Gamma$ και $\Delta E \perp B\Gamma$.

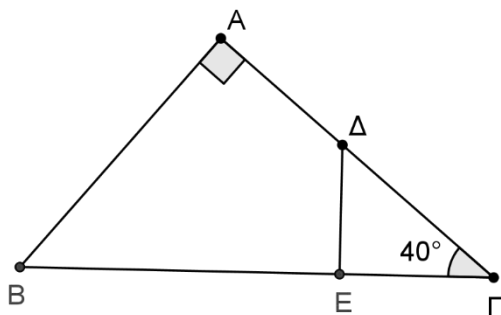
Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$,

(Μονάδες 10)

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Delta E B$.

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) με γωνία κορυφής $\hat{A} = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓB (προς το B) παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$.

Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$, (Μονάδες 10)

β) τη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με γωνία $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και το μέσο M της πλευράς του $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{AM\Gamma}$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν $\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$ και $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 40^\circ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{A\hat{B}\Delta} = \widehat{A\hat{\Gamma}E} = 110^\circ$,

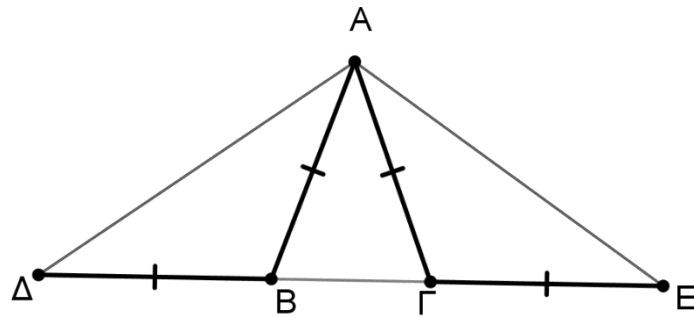
(Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα,

(Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ με $\Delta E = 9$ και $E\Gamma = 16$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του,

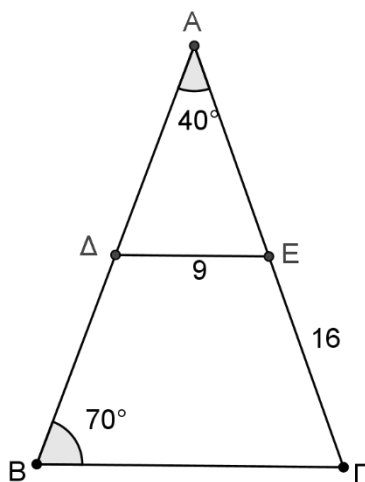
(Μονάδες 8)

ii. $B\Gamma = 18$.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

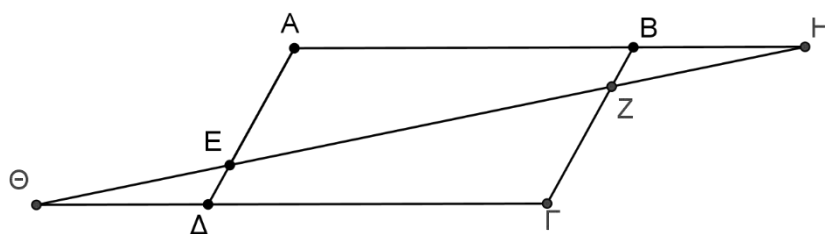
ΘΕΜΑ 2

Στις πλευρές AD και BC παραλληλογράμμου $ABCD$ θεωρούμε σημεία E και Z , τέτοια ώστε $AE = CZ$. Αν η ευθεία ZE τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών AB και CD στα σημεία H και Θ , να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{HBZ} = \widehat{E\Delta\Theta}$, (Μονάδες 8)

β) $\widehat{BZH} = \widehat{\Delta E\Theta}$, (Μονάδες 8)

γ) $BH = \Theta\Delta$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta\widehat{E}\Gamma = 70^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί $\Delta E \parallel AB$.

(Μονάδες 8)

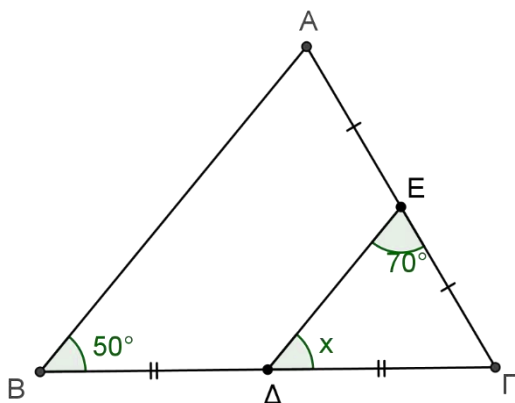
β) Να υπολογίσετε:

i. τη γωνία $\hat{x}$,

(Μονάδες 8)

ii. τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $A\Delta=9$, $E\Gamma=10$ και $B\Gamma=30$.

α) Να υπολογίσετε:

i. το μήκος x του τμήματος DE ,

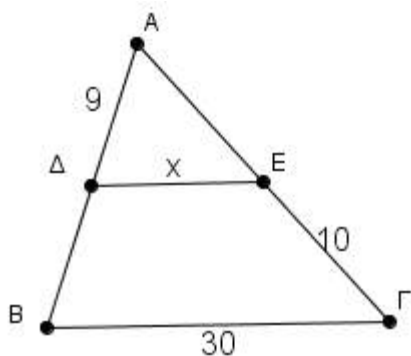
(Μονάδες 8)

ii. την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DE\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE=8$ και $\Delta B=10$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο,

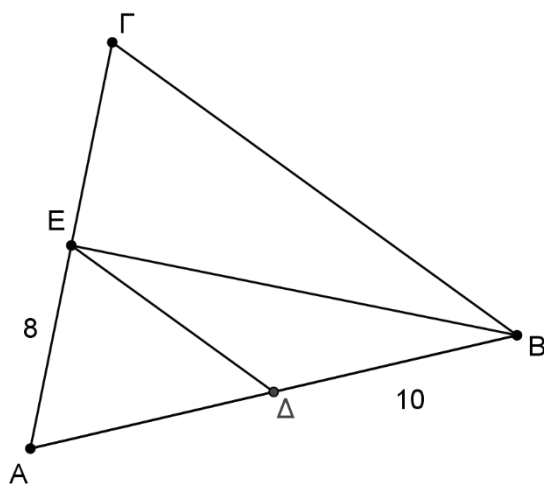
(Μονάδες 8)

ii. $B\Gamma=20$.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

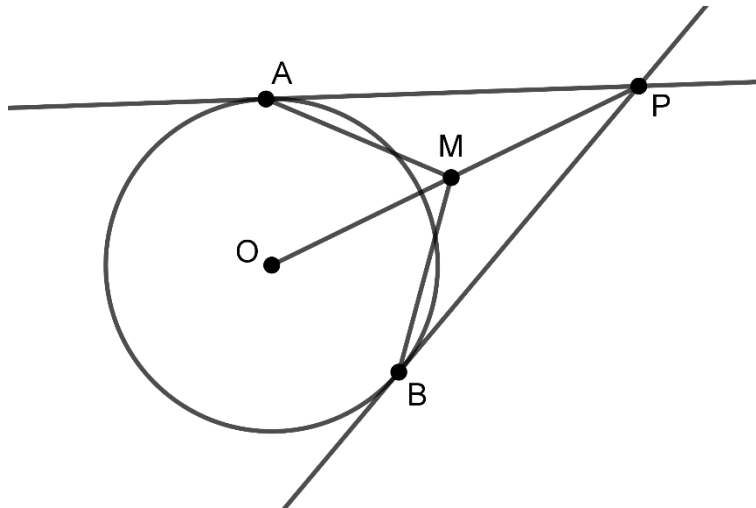
Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $\widehat{MAO}$ και $\widehat{MBO}$ είναι ίσες.

(Μονάδες 13)



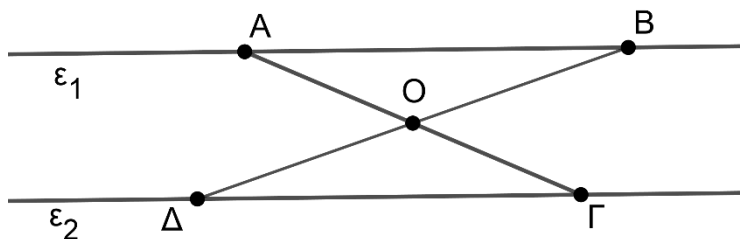
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 και τα σημεία A, B στην ε_1 και Δ και Γ στην ε_2 ώστε τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ να τέμνονται στο μέσο O του $B\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα AOB και $ΓΟΔ$ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 , ε_2 είναι παράλληλες και $AB=6$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$.

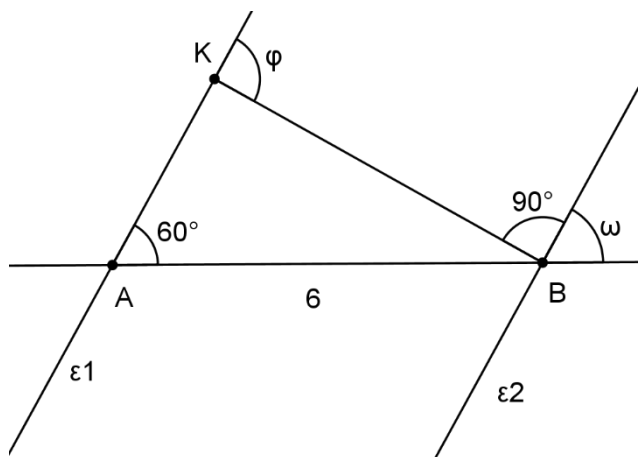
(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της AK , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

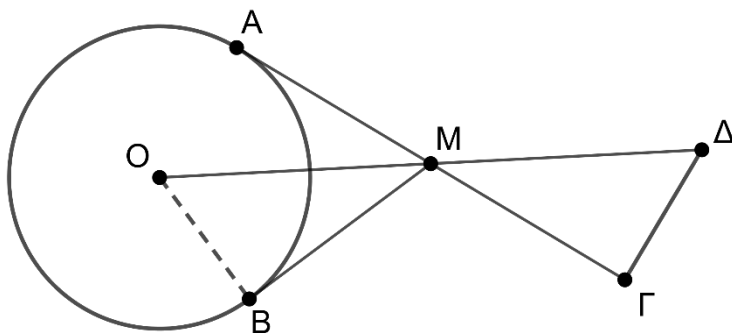


ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $ΜΓ=MA$ και την OM κατά τμήμα $ΜΔ=OM$.

α) Να αποδείξετε ότι $MB = MΓ$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $ΜΓΔ$ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές $AB, A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AD=\frac{1}{3}AB$ και $AE=\frac{1}{3}A\Gamma$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α) τα τμήματα BD και GE είναι ίσα, (Μονάδες 5)
- β) τα τρίγωνα BDM και $ME\Gamma$ είναι ίσα, (Μονάδες 10)
- γ) το τρίγωνο DEM είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA=KB$) και $K\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{K}$. Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M , έτσι ώστε $A\Lambda=BM$. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου $K\Lambda M$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 80^\circ$ και $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$, και AD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Φέρουμε από το D ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A\hat{D}E}$ και $\hat{E\hat{D}\Gamma}$. (Μονάδες 13)

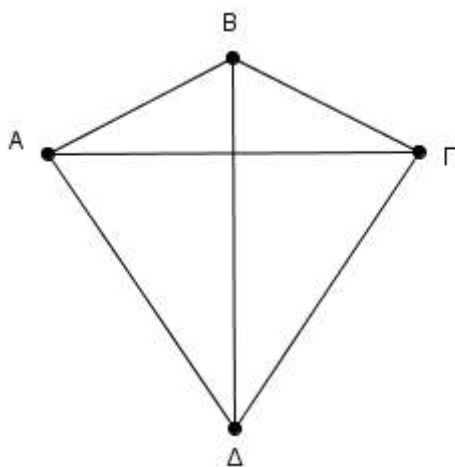
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA=B\Gamma$ και $\Delta A=\Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$, $B\Delta$ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

Να αποδείξετε ότι:

α) η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, (Μονάδες 12)

β) η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο $A\chi$ της γωνίας $\hat{A}$ και από το σημείο Γ την κάθετο $\Gamma\Delta$ στην $A\chi$. Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $EZ = AE = AZ$,

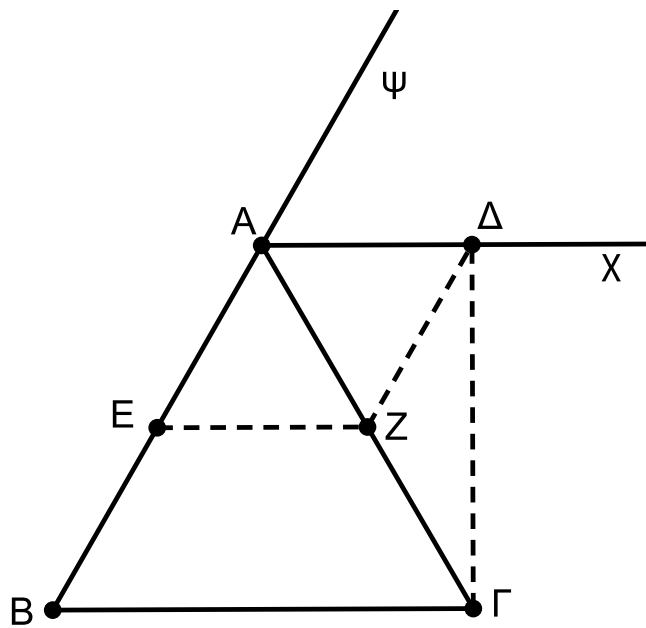
(Μονάδες 9)

β) η γωνία $\widehat{A\Gamma\Delta}$ είναι ίση με 30° ,

(Μονάδες 10)

γ) το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία $\widehat{\chi\Omega\gamma}$ και η διχοτόμος της $\Omega\delta$. Θεωρούμε σημείο M της $\Omega\delta$ και σημεία A και B στις ημιευθείες $\Omega\chi$ και $\Omega\gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA=OB$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $MA=MB$,

(Μονάδες 15)

β) Η $\Omega\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AMB}$.

(Μονάδες 10)

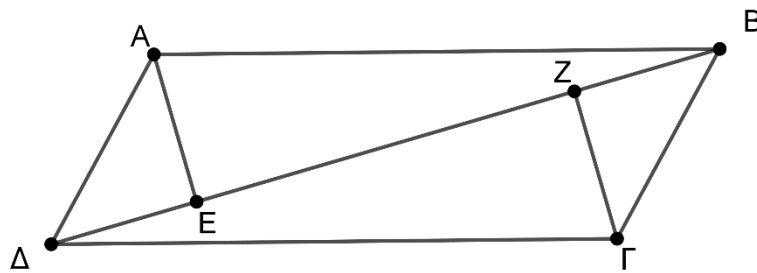
ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB > B\Gamma$ φέρουμε από τις κορυφές A και Γ καθέτους στη διαγώνιο $B\Delta$, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AE = \Gamma Z$, (Μονάδες 15)

β) το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

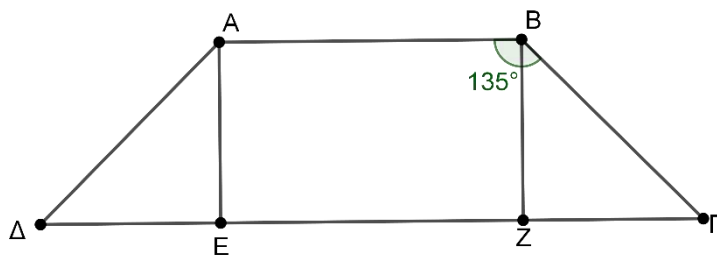
Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ και $\widehat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $AE = EZ = BZ = \Gamma Z$.

(Μονάδες 15)



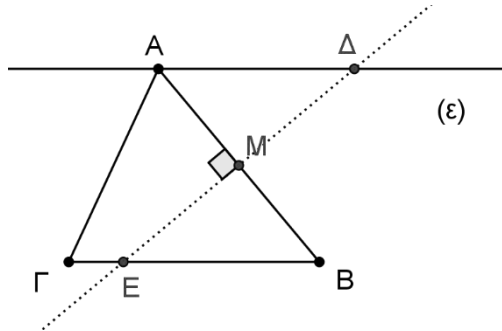
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΓΒ . Φέρουμε από τη κορυφή Α ευθεία (ϵ) παράλληλη στη ΒΓ . Η κάθετη στο μέσο Μ της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ϵ) στο Δ και την ΒΓ στο Ε .

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\text{Α}=\Delta\text{Β}$ και $\text{ΕΑ}=\text{ΕΒ}$. (Μονάδες 6)

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ . (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

(Μονάδες 15)

β) Αν η πλευρά ΒΓ=2cm να βρείτε το μήκος της ΑΒ.

(Μονάδες 10)

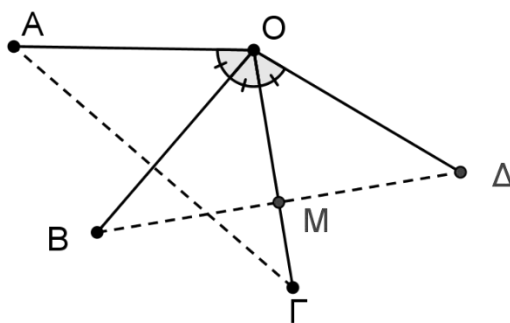
ΘΕΜΑ 2

Αν στο σχήμα που ακολουθεί είναι $\hat{A}OB = \hat{B}OG = \hat{G}OD$ και $OA = OB = OG = OD$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $AG = BD$, (Μονάδες 10)

β) το M είναι μέσον της BD , όπου M το σημείο τομής των τμημάτων OG και BD .

(Μονάδες 15)

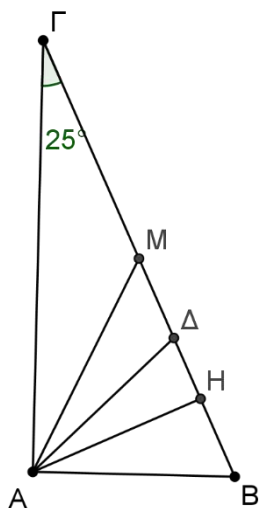


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 25^\circ$. Δίνονται επίσης η διάμεσος AM , το ύψος AH από την κορυφή A και η διχοτόμος AD της γωνίας $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}MB$, $\hat{H}AB$, $\hat{A}DB$. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $\hat{M}AD = \hat{D}AH = 20^\circ$. (Μονάδες 10)



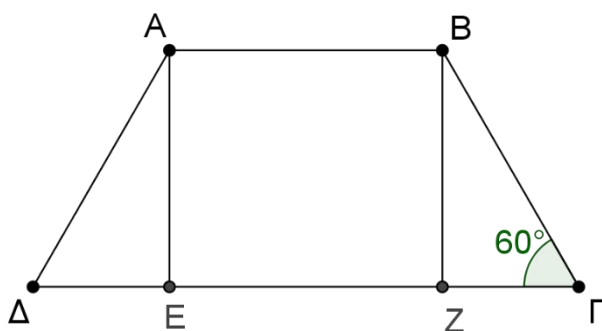
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB=6$, $B\Gamma=4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε τα τρίγωνα $AE\Delta$, $BZ\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 9)



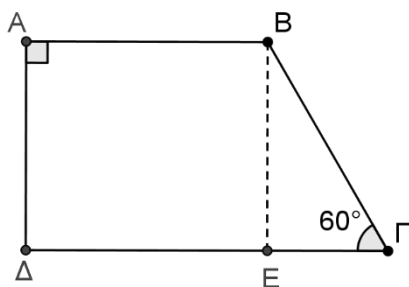
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB=B\Gamma=4$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Φέρουμε το ύψος BE από τη κορυφή B .

α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $2E\Gamma=B\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) Αν M, N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$, $B\Gamma$ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος MN . (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2

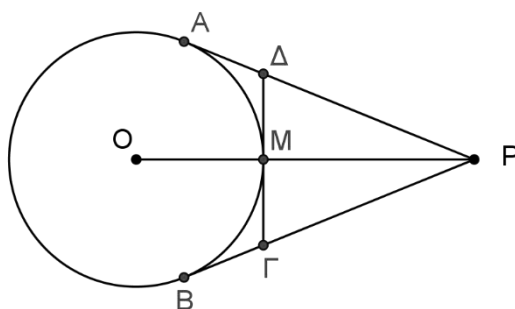
Δίνεται κύκλος κέντρου O και ένα εξωτερικό του σημείο P , από το οποίο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου PA και PB . Έστω ότι το τμήμα PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο M και η εφαπτομένη του κύκλου στο M τέμνει τα PA και PB στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $P\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία $\widehat{APB}$ είναι 40° να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{AOB}$.

(Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 2

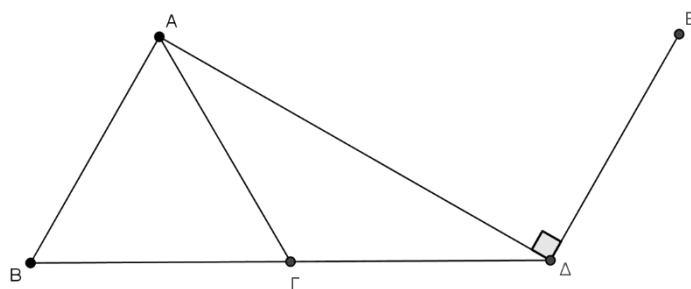
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta=B\Gamma$. Φέρουμε τμήμα DE κάθετο στην AD στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε $DE=B\Gamma$ (τα A και E είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την $B\Delta$).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Delta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το $AB\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ , τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{cm}$.

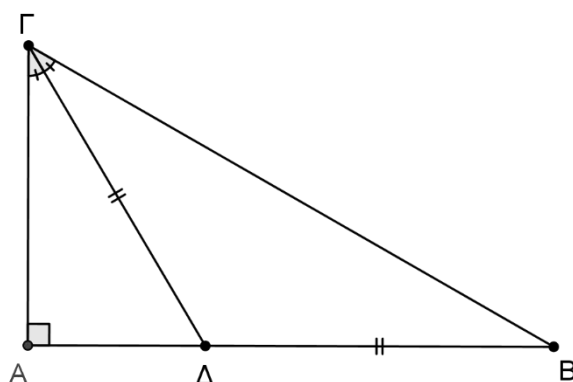
Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = 30^\circ$.

(Μονάδες 12)

β) $AB = 3\text{cm}$.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Στα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ (γωνία A ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει

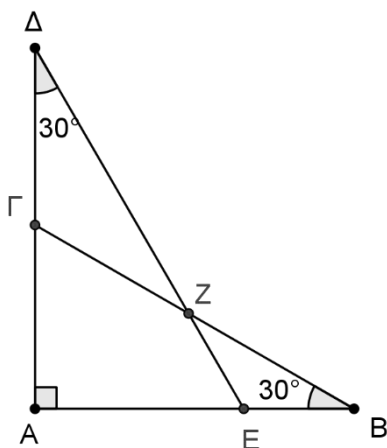
$\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$ και Z το σημείο τομής των πλευρών τους $B\Gamma$ και ΔE αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $AEZ\Gamma$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Gamma Z\Delta$ και EBZ είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 2

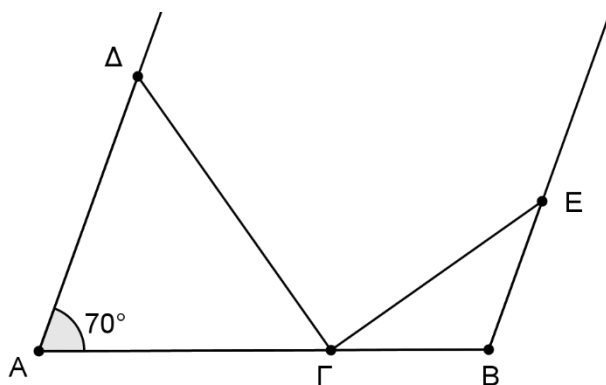
Στο παρακάτω σχήμα, οι AD και BE είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $AD=AG$, $BE=BG$ και $\hat{A} = 70^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ADG και BGE .

(Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{\Gamma}E = 90^\circ$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον $AD=BG$ και $AG=BE$.

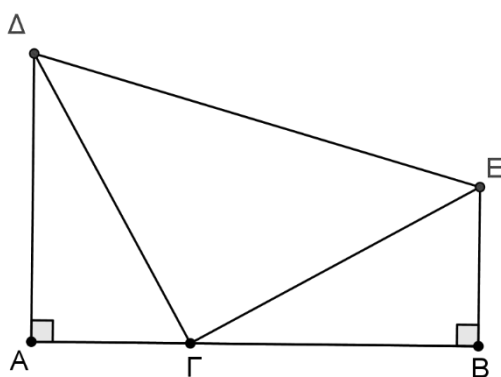
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AGD και BGE είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία $\angle EGB = 40^\circ$, τότε το τρίγωνο DGE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει $B\Gamma=2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η AD είναι διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της ώστε $AD=DE$.

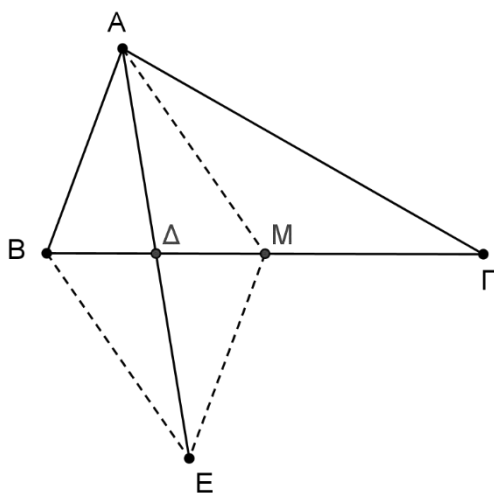
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο,

(Μονάδες 12)

β) $ME=M\Gamma$.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία E και Z στις προεκτάσεις των AB (προς το B) και $B\Gamma$ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z$.

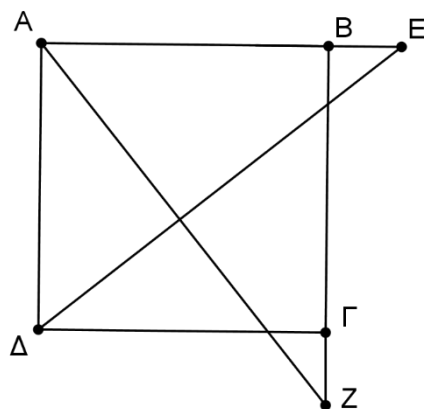
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ABZ και $AE\Delta$ είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $\widehat{E\Delta\Gamma}$ και $\widehat{AZB}$ είναι ίσες.

(Μονάδες 13)

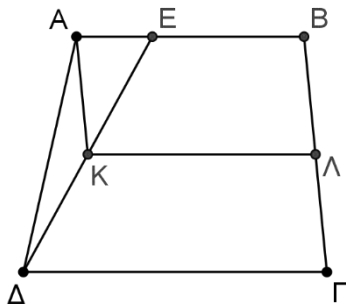


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=3$, $\Gamma\Delta=4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB ώστε $AE=1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K και Λ , μέσα των $E\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραπεζίου $EB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 2

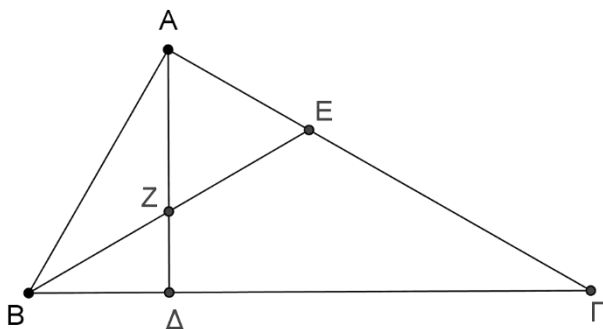
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία B είναι 60° .

(Μονάδες 10)

β) Αν το ύψος του $A\Delta$ και η διχοτόμος του BE τέμνονται στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{A}$ και η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι μικρότερη της γωνίας $\hat{B}$. Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και η DE είναι κάθετη στην $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = DE$,

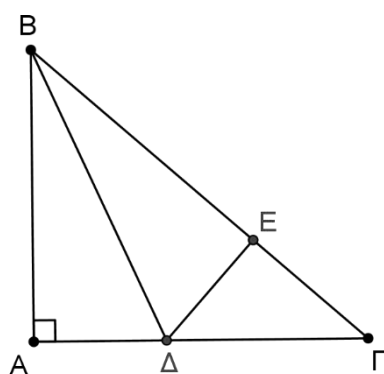
(Μονάδες 8)

β) $AD < \Delta\Gamma$,

(Μονάδες 9)

γ) $A\Gamma > AB$.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ . (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AMB . (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $AE = A\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma\Delta$, (Μονάδες 6)

β) $B\Delta = \Gamma E$, (Μονάδες 10)

γ) $\angle B\Gamma E = \angle E\Gamma B$. (Μονάδες 9)

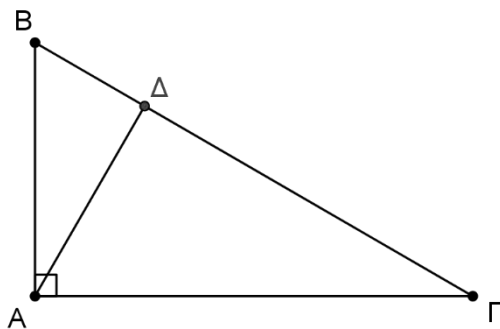
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και το ύψος του AD .

α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογιστεί η γωνία $B\hat{A}D$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \frac{AB}{2}$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

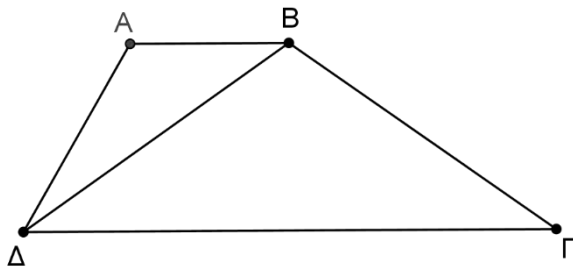
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Delta = B\Gamma$. Αν $\widehat{B\Gamma\Delta} = 110^\circ$ και $\widehat{A\Delta B} = 25^\circ$ να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $\widehat{\Gamma}$,

(Μονάδες 11)

β) τη γωνία $\widehat{A}$.

(Μονάδες 14)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες :

i. $\widehat{ABE}$

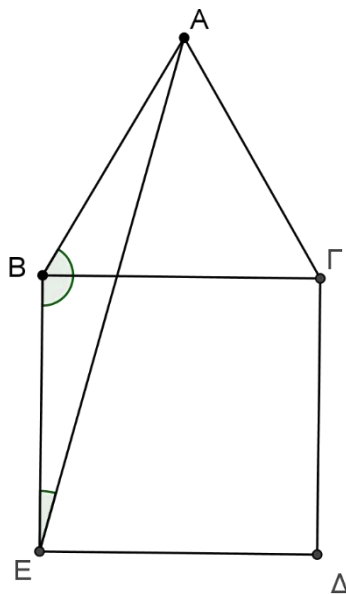
(Μονάδες 8)

ii. $\widehat{BEA}$

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $AB\Delta E$.

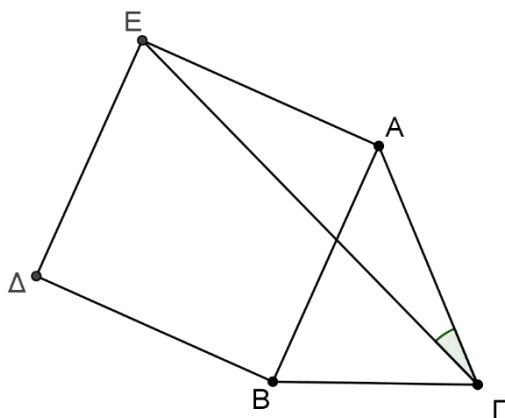
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 10)

β) $2 \cdot \hat{E}\Gamma A = 90^\circ - \hat{B}A\Gamma$.

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2

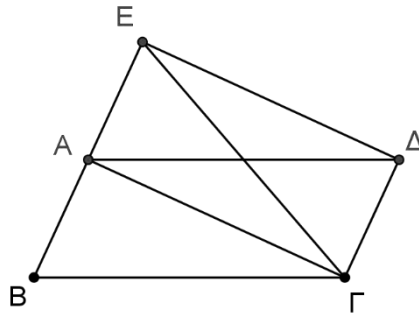
Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) το σημείο A είναι μέσο του BE , (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 9)

γ) $\hat{B\Gamma A} = \hat{A\Delta E}$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και γωνία $\widehat{B}$ ίση με 30° . Θεωρούμε Δ και E τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

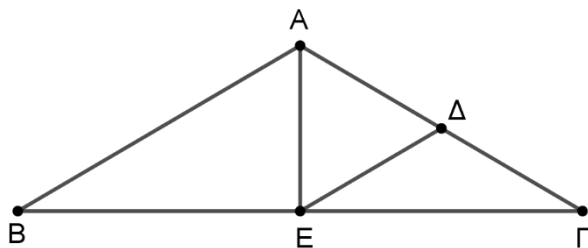
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

(Μονάδες 16)

β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA (προς το A) και την πλευρά $\Delta\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $\Gamma Z = \Delta\Gamma$.

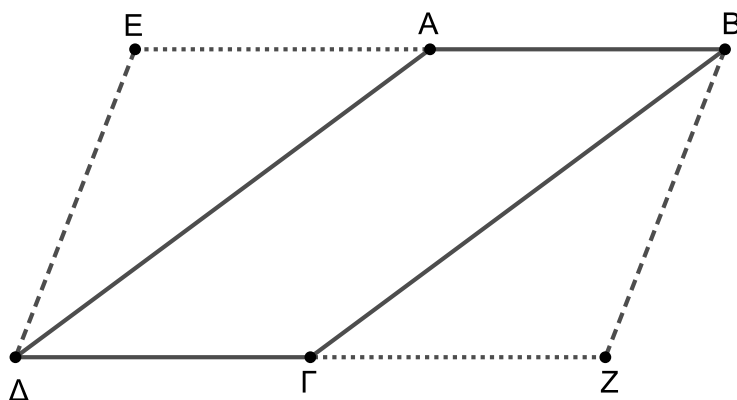
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα,

(Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)

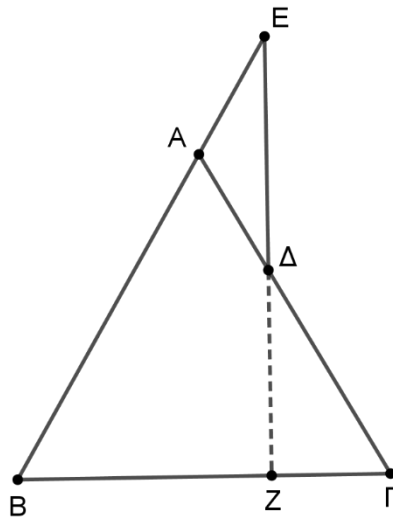


ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Θεωρούμε σημείο E στην προέκταση της BA (προς το A) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $AE = A\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$. (Μονάδες 10)

β) Αν Z είναι το σημείο τομής της προέκτασης της $E\Delta$ (προς το Δ) με την $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η EZ είναι κάθετη στην $B\Gamma$. (Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta EZ$.

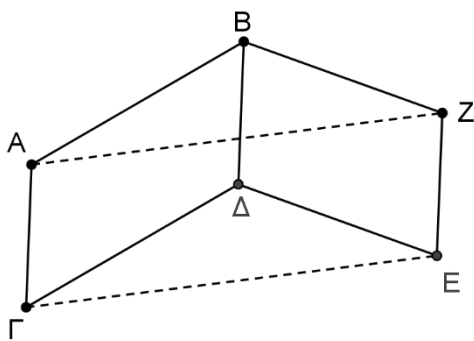
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι παραλληλόγραμμο,

(Μονάδες 13)

β) $\hat{ABZ} = \hat{\Gamma\Delta E}$.

(Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η AM με το σημείο Γ).

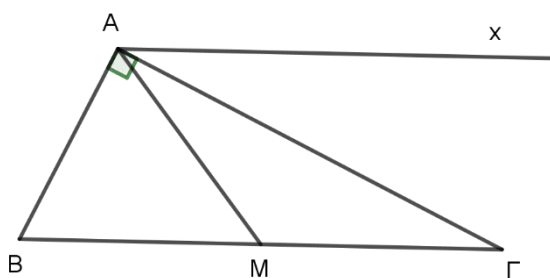
Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A}$,

(Μονάδες 12)

β) η $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας MAx .

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $M\Delta$, NE οι μεσοκάθετοι των πλευρών του AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα.

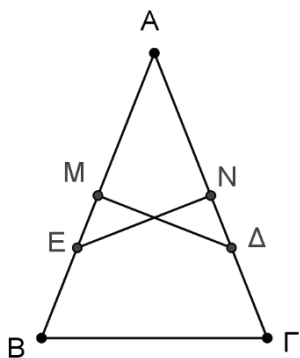
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι $M\Delta = NE$, τότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

β) Αν είναι $AB = A\Gamma$, τότε $M\Delta = NE$.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και από σημείο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

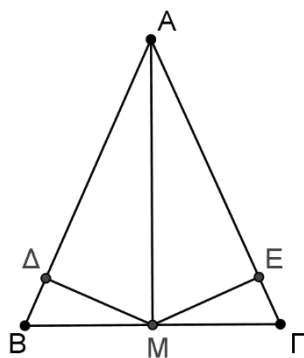
Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι $M\Delta = ME$, τότε τα τρίγωνα $AM\Delta$ και AME είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Αν είναι $AB = A\Gamma$ και M μέσο του $B\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$.

(Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι $M\Delta = ME$, τότε:

i. τα τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM είναι ίσα,

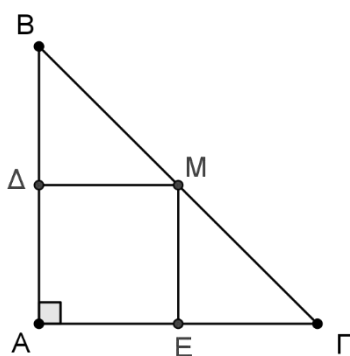
(Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

β) Αν είναι $AB = A\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην ευθεία $A\Gamma$ και από το E φέρουμε EZ κάθετη στην ευθεία AB .

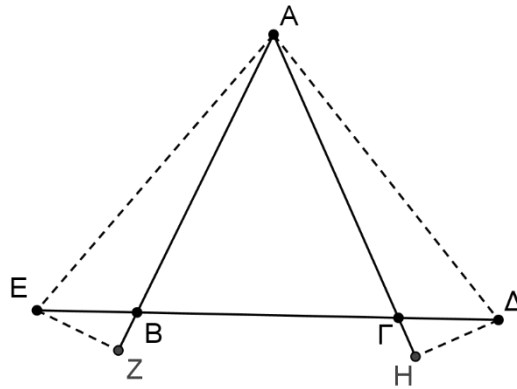
Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = AE$

(Μονάδες 12)

β) $EZ = \Delta H$

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

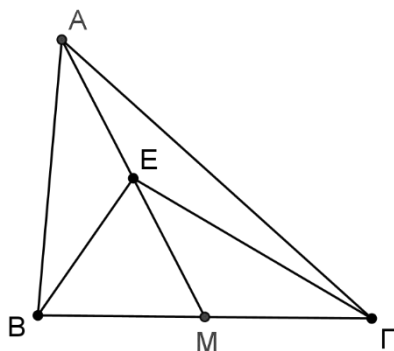
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM . Αν είναι $B\Gamma = 2 BE$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{AEB} = \hat{EM\Gamma}$

(Μονάδες 12)

β) $AB = E\Gamma$

(Μονάδες 13)



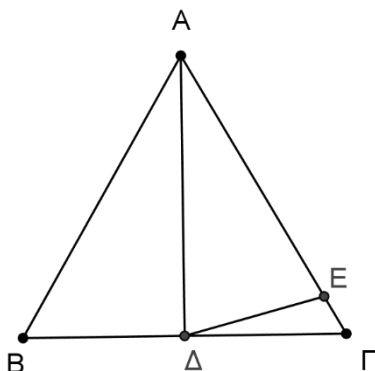
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσός του $A\Delta$ τέτοια ώστε $\widehat{BA\Delta} = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{E\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

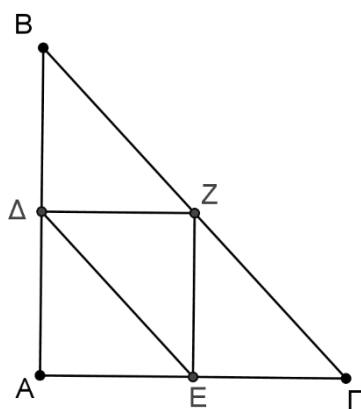
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι τετράγωνο,

(Μονάδες 15)

β) το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)

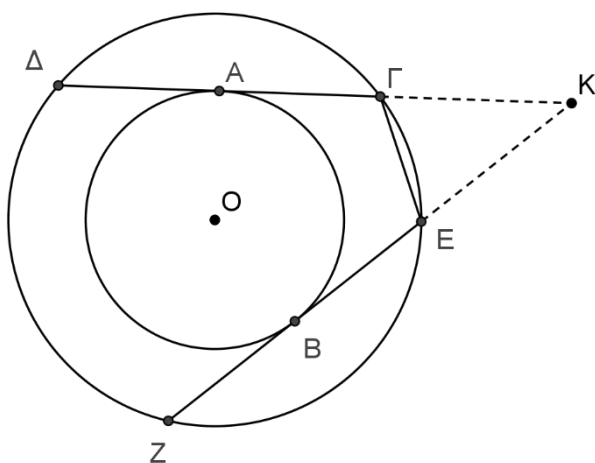


ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$. (Μονάδες 12)

β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

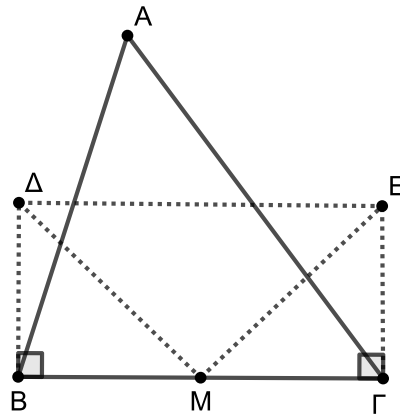
Στο σχήμα που ακολουθεί, το M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, και τα τμήματα $B\Delta$ και $E\Gamma$ είναι κάθετα στη $B\Gamma$ στα σημεία B, Γ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $M\Delta = ME$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα,

(Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$ και $A\Delta = B\Gamma$), το μέσο M της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα μέσα K και Λ των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

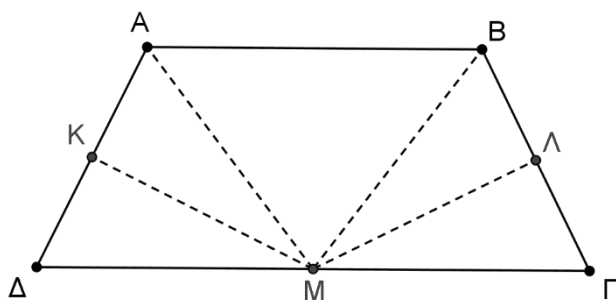
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα KM και ΛM είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) Τα τμήματα AM και BM είναι ίσα.

(Μονάδες 13)



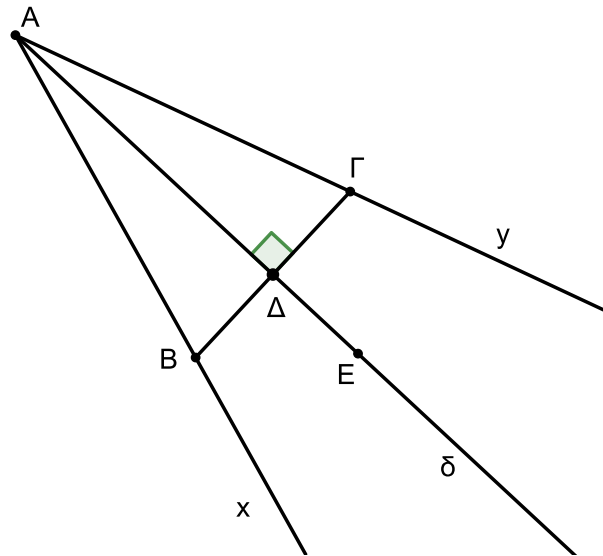
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία $\chi A \gamma$ και η διχοτόμος της $A\delta$. Από τυχαίο σημείο B της $A\chi$ φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο $A\delta$, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο σημείο Δ και την $A\gamma$ στο σημείο Γ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AB και $A\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Αν E τυχαίο σημείο της $A\delta$, να αποδείξετε ότι το E ισαπέχει από τα B και Γ .

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν τα σημεία E και Δ είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα με $E\Delta=1$, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α) $A\Gamma$

(Μονάδες 8)

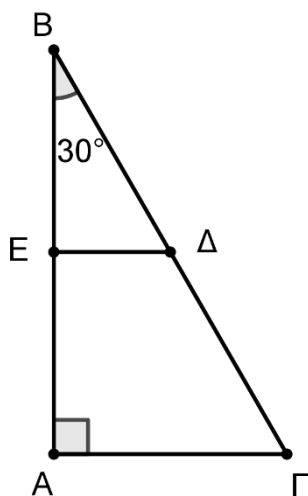
β) $B\Gamma$

(Μονάδες 9)

γ) $A\Delta$

(Μονάδες 8)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$. Από τα μέσα K και Λ των πλευρών $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα KE και ΛZ στην πλευρά $B\Gamma$.

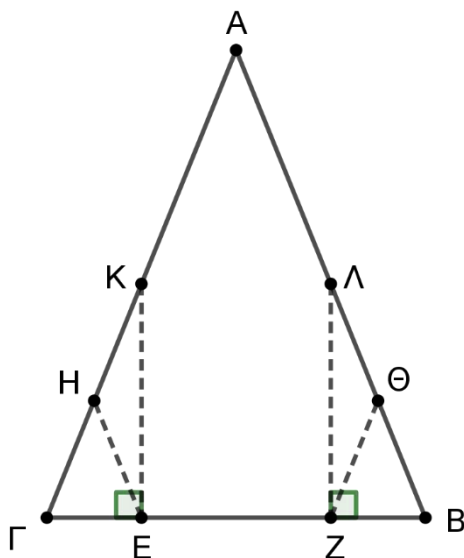
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $KE\Gamma$ και ΛZB είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

β) $EH=Z\Theta$, όπου H , Θ τα μέσα των τμημάτων $K\Gamma$, ΛB αντίστοιχα.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA=NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα.

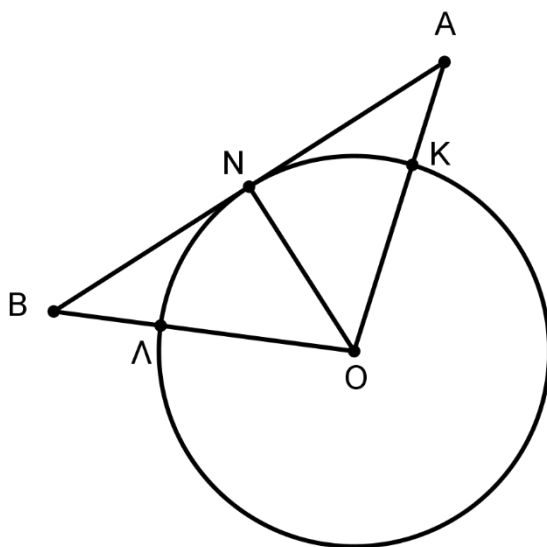
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 13)

β) το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$.

(Μονάδες 12)

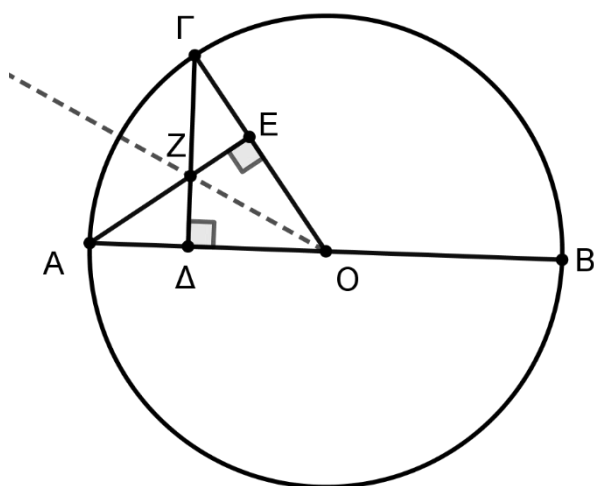


ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε διάμετρο AB και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν τα $AE, \Gamma\Delta$ είναι κάθετα τμήματα στις OG, OA αντίστοιχα και Z το σημείο τομής τους, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΔOE είναι ισοσκελές, (Μονάδες 13)

β) η OZ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{AOG}$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου AG . (Μονάδες 12)

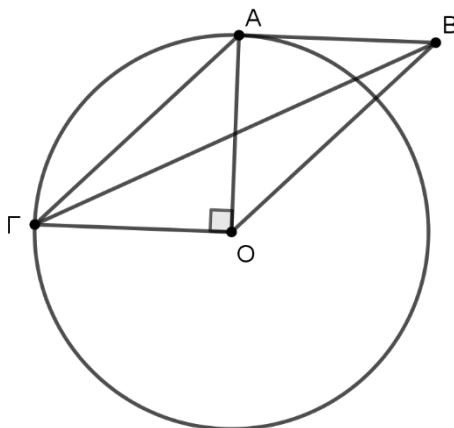


ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες OA , OG και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα AB τέτοιο ώστε $AB = OG$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και $BΓ$ διχοτομούνται. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ABOG$. (Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2

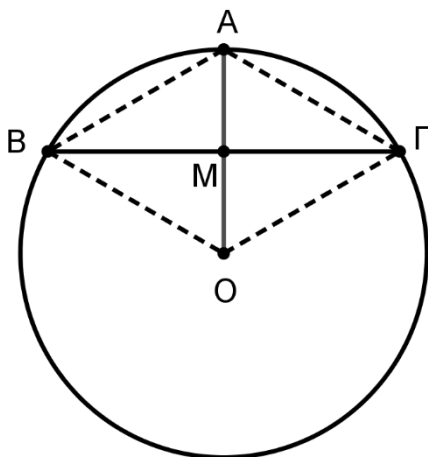
Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε ακτίνα OA και χορδή $B\Gamma$ κάθετη στο μέσο της M .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma O B$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Gamma O B$.

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2

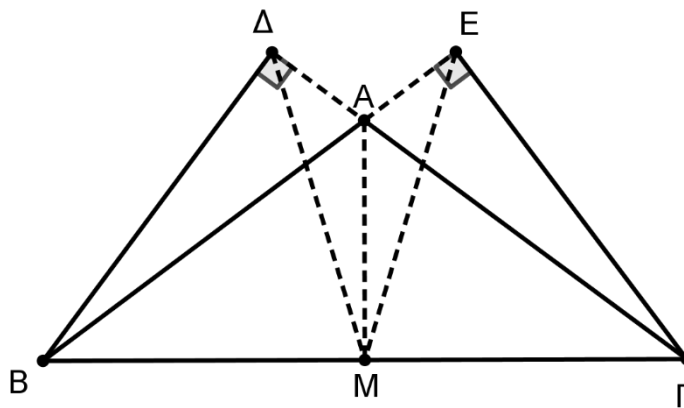
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ προς το A φέρνουμε τμήματα $B\Delta$ και ΓE κάθετα στις $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$. (Μονάδες 10)

β) Αν το σημείο M είναι το μέσο της $B\Gamma$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $M\Delta = ME$, (Μονάδες 8)

ii. η MA διχοτομεί τη γωνία $\angle \Delta ME$. (Μονάδες 7)



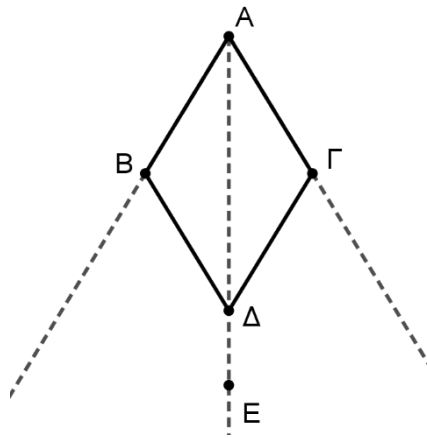
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ρόμβος $AB\Delta\Gamma$. Στην προέκταση της διαγωνίου του $A\Delta$ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο E ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών AB και $A\Gamma$ (προς το μέρος των B και Γ αντίστοιχα). (Μονάδες 10)

β) Το σημείο E ισαπέχει από τα σημεία B και Γ . (Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας ρ φέρουμε δυο διαμέτρους του AB και $\Gamma\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) οι χορδές $A\Gamma$ και $B\Delta$ του κύκλου είναι ίσες, (Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία A, Γ, B και Δ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος (O, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο A . Από το A φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$ του κύκλου και έστω E και Δ τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα.

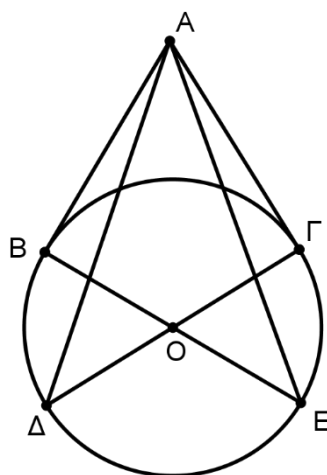
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα,

(Μονάδες 13)

β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

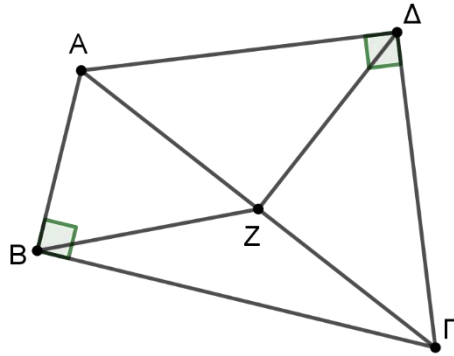


ΘΕΜΑ 2

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} = 90^\circ$ και Z το μέσο του $A\Gamma$. Με υποτείνουσα το $A\Gamma$ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ με $\widehat{\Delta} = 90^\circ$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $BZ = \Delta Z$. (Μονάδες 13)

β) Αν είναι $\widehat{A\Gamma B} = 30^\circ$, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B\Delta\Delta}$ και $\widehat{B\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνα $AB\Delta$ με $AB = B\Delta = 5$ και $A\Gamma E$ με $A\Gamma = \Gamma E = 5$ έτσι ώστε τα σημεία Δ , B , Γ και E να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους BK και $\Gamma\Lambda$ αντίστοιχα.

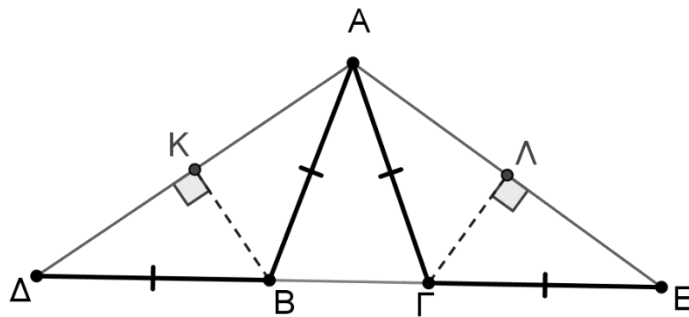
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ισοσκελή, (Μονάδες 8)
- ii. τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και AE αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα $K\Lambda$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και την διάμεσο AM στην πλευρά $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma A \Delta}$ είναι ίσες, (Μονάδες 12)

β) $\hat{A M \Delta} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{B}=60^\circ$. Φέρουμε τα ύψη AE και BZ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στην ευθεία $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma Z = \frac{A\Delta}{2}$, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ίσο με το τρίγωνο $B\Gamma Z$, (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = K\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα , (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $A\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A\Delta E}$. (Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{E\Delta\Gamma}$.
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με $AB=8$ και $\Delta\Gamma=12$. Αν AH και $B\Theta$ είναι τα ύψη του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$,

α) να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$. (Μονάδες 12)

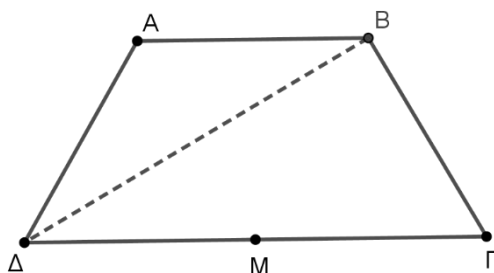
β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραpezίου. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε $AB=AD=\frac{\Gamma\Delta}{2}$, $\hat{\Delta}=60^\circ$ και M το μέσο της πλευράς ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

- α) η διαγώνιος ΔΒ του τραpezίου είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$, (Μονάδες 9)
β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 16)



ΘΕΜΑ 2

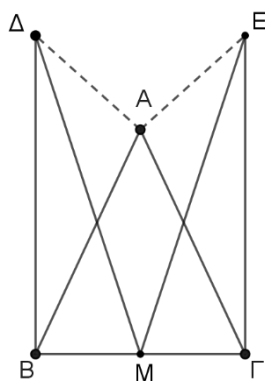
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Στα σημεία B και Γ της $B\Gamma$ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της $B\Gamma$, τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και $\Gamma E M$ είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) $A\Delta = AE$.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$).

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$. (Μονάδες 13)

β) Αν $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

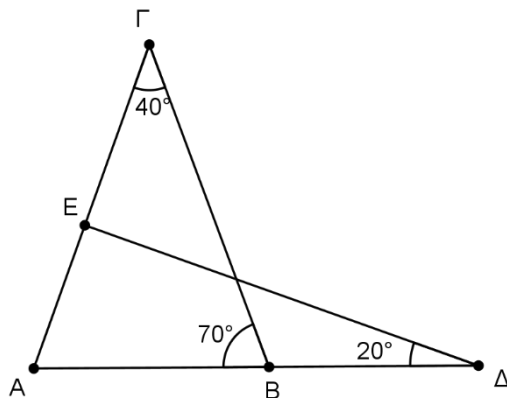
Στο παρακάτω σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 12)

β) η γωνία $AE\Delta$ είναι ορθή.

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Delta = MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)

β) $BM = \frac{AE}{2}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma < AB$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και στην προέκταση της BA (προς το A) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα $\Delta\Gamma$ και $E\Gamma$ είναι κάθετα μεταξύ τους, (Μονάδες 12)

β) η γωνία $\widehat{E\Delta\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\widehat{A\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\widehat{B} = 120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{\Gamma}$ του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 8)

β) Αν K είναι το μέσο της πλευράς AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{EZ\Gamma}$. (Μονάδες 8)

