

ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π : Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π** , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της **Π** και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η **Π** και η **αντίστροφή της** ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) του παρακάτω σχήματος, η κάθετη στο μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου AD στο σημείο E . Αν Θ, Z είναι οι προβολές του E στις $AB, A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

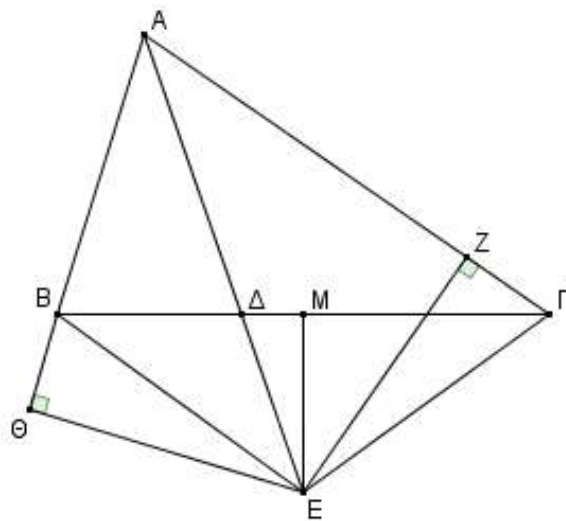
(Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα ΘBE και ZGE είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

γ) $\angle \Gamma E A + \angle B E A = 180^\circ$

(Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) με $\widehat{B} = 50^\circ$, το ύψος του $A\Delta$ και σημείο E στην $\Delta\Gamma$ ώστε $\Delta E = B\Delta$. Το σημείο Z είναι η προβολή του Γ στην AE .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

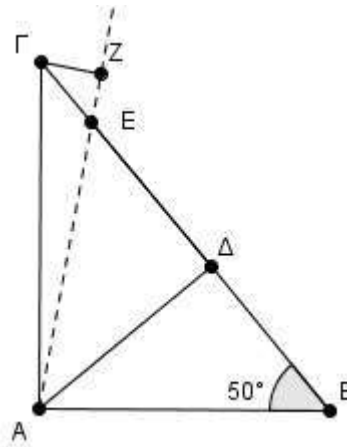
(Μονάδες 6)

ii. $\widehat{\Gamma A E} = 10^\circ$.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $Z\Gamma E$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας $\hat{A}$. Από την κορυφή A διέρχεται ημιευθεία $Ax \parallel B\Gamma$ στο ημιεπίπεδο (AB, Γ) . Στην ημιευθεία Ax θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η $B\Delta$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 7)

β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\chi}$. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) και η διχοτόμος του $A\Delta$. Φέρουμε από το B κάθετη στην $A\Delta$ που τέμνει την $A\Delta$ στο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο H . Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ABH είναι ισοσκελές.

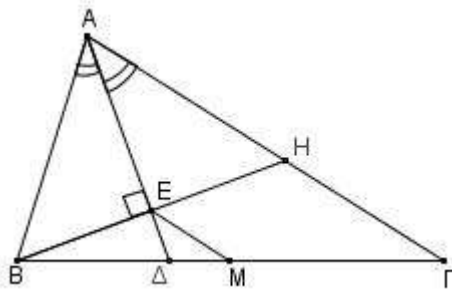
(Μονάδες 9)

β) $EM \parallel H\Gamma$

(Μονάδες 8)

γ) $EM = (A\Gamma - AB)/2$

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$

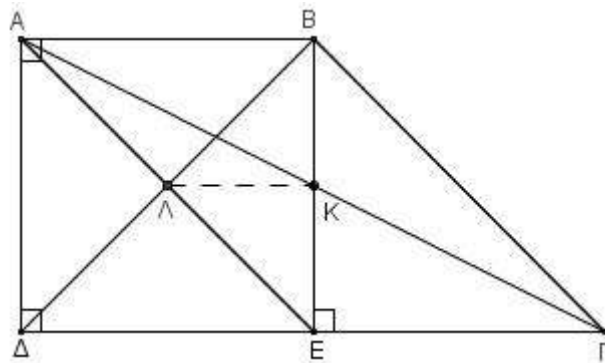
(Μονάδες 8)

β) $B\Delta = AE$

(Μονάδες 9)

γ) $KL = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) $\widehat{ΑΕΔ} = \widehat{ΒΖΓ}$ (Μονάδες 8)

γ) Οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

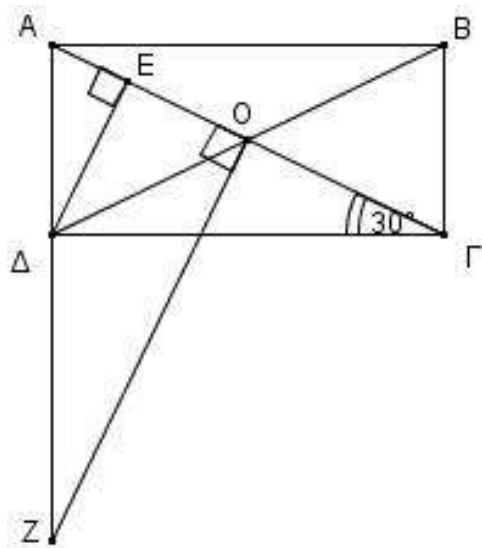
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{\Delta\Gamma A} = 30^\circ$ και O το κέντρο του. Φέρουμε $DE \perp AG$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A\Delta\Gamma}$ χωρίζεται από τη DE και τη διαγώνιο ΔB σε τρεις ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)

β) Φέρουμε κάθετη στην AG στο σημείο O η οποία τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο Z . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AZO και $AB\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $ΓΔ$ παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ επιπλέον ισχύει $AB > AD$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο $ΔΕΒΖ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $\widehat{ΑΕΔ} = \widehat{ΒΖΓ}$.

Ισχυρισμός 3: Οι $ΔΕ$ και $ΒΖ$ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\widehat{Δ}$ και $\widehat{Β}$.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $ΓΔ$ παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ επιπλέον ισχύουν $AB > AD$ και γωνία A αμβλεία, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο $ΔEBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΒΓΖ$ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΒΓΖ$ είναι ισοσκελή.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο O και τυχαίο σημείο M του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του M ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2 , να αποδείξετε ότι:

I. $OM = OM_1$ (Μονάδες 6)

II. Τα σημεία M, O και M_2 είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

III. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

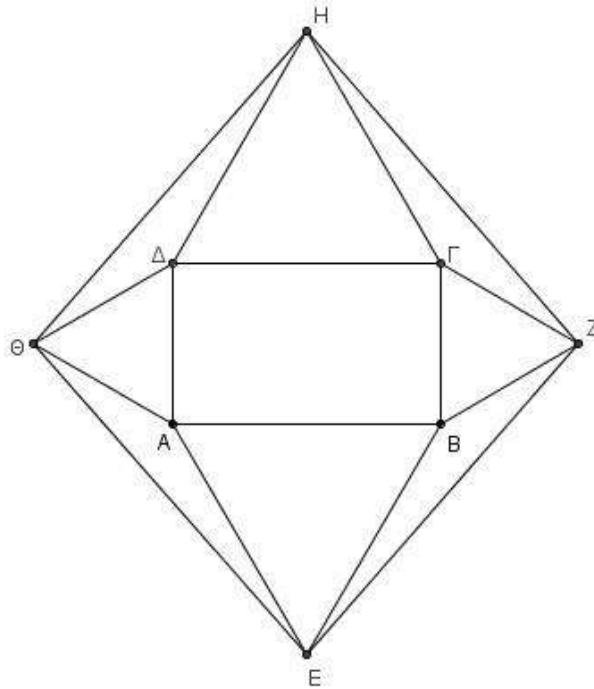
Β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1 , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ABE , $B\Gamma Z$, $\Gamma\Delta H$, $\Delta A\Theta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 15)

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε το $EZH\Theta$ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ευθεία (ε) και δυο σημεία A και B εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ε) . Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των A και B αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε) .

α) Να αποδείξετε ότι $AA' \parallel BB'$. (Μονάδες 6)

β) Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη σχέση της ευθείας AB με την ευθεία (ε) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω K, Λ τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔA και ΓB προεκτείνονται τέμνοντας κάθετα στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) $AB=2AE$

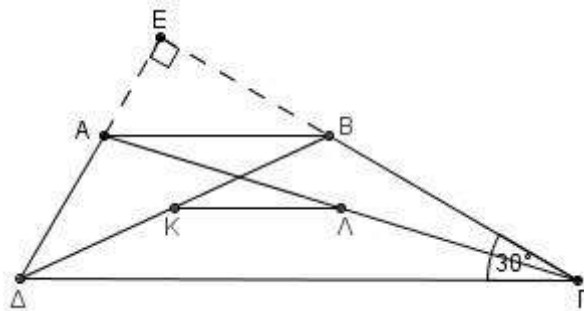
(Μονάδες 10)

β) $K\Lambda=AD$

(Μονάδες 10)

γ) Σε ποια περίπτωση το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AH . Ονομάζουμε Δ και E τα συμμετρικά σημεία του H ως προς τις ευθείες AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν M είναι το σημείο τομής του τμήματος $H\Delta$ με την πλευρά AB και N είναι το σημείο τομής του HE με την πλευρά $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) $AH=AD=AE$. (Μονάδες 10)

β) Η γωνία EHD είναι ορθή. (Μονάδες 8)

γ) Τα σημεία A , E και Δ είναι συνευθειακά και $MN = \frac{\Delta E}{2}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$, και η διχοτόμος $B\Delta$ της γωνίας $\hat{B}$. Από το μέσο M της $A\Gamma$ φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο $B\Delta$ που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο N .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

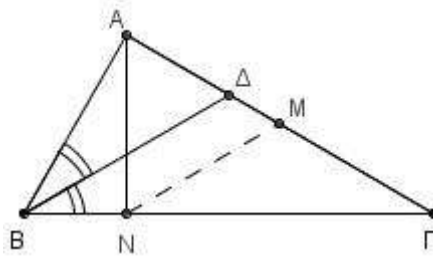
(Μονάδες 5)

β) Το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 10)

γ) $AN \perp B\Gamma$

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

Π2: Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 20)

β) Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω K, Λ τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο **M στο εσωτερικό του τριγώνου** και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E // B\Gamma$.

(Μονάδες 15)

β) Στην περίπτωση που **το σημείο M είναι το μέσο** της πλευράς $B\Gamma$, και Δ, E τα συμμετρικά του M ως προς K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, A και E είναι συνευθειακά.

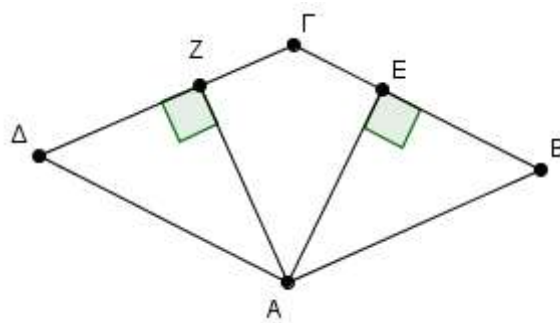
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και $AE \perp \Gamma B$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- β) Η ευθεία $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ZE . (Μονάδες 9)
- γ) Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $MN \parallel ZE$ και $ZM=EN$. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{\Gamma} = 120^\circ$. Έστω ότι AE και AZ είναι οι αποστάσεις του σημείου A στις πλευρές $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

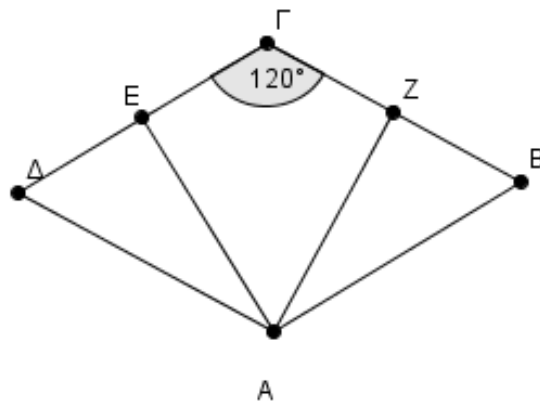
i. Τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και ΓB αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

ii. $A\Gamma \perp EZ$.

(Μονάδες 8)

β) Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EMNZ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) φέρουμε τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE . Μία ευθεία ε παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα Z και H αντίστοιχα και τις διαμέσους $B\Delta$ και ΓE στα σημεία Θ και K αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $BZ=GH$.

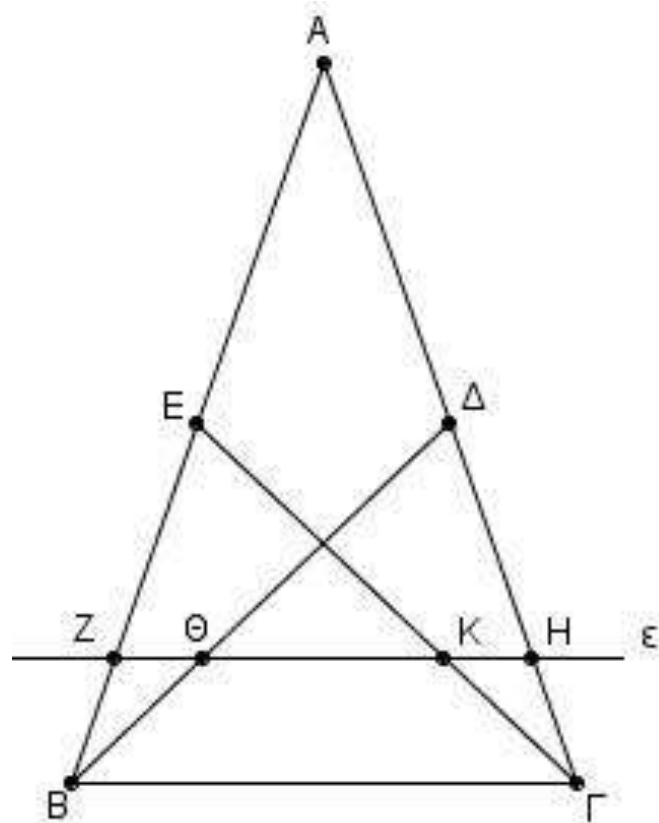
(Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα $ZB\Theta$ και $HK\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) $ZK=H\Theta$.

(Μονάδες 8)

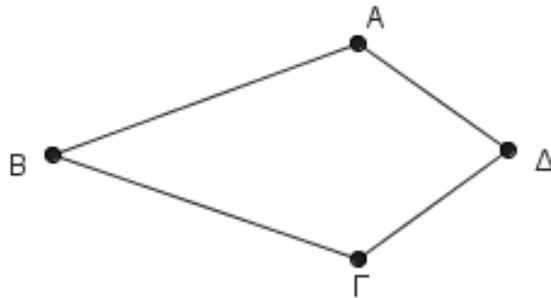


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
- β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται κάθετα. (Μονάδες 6)
- γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



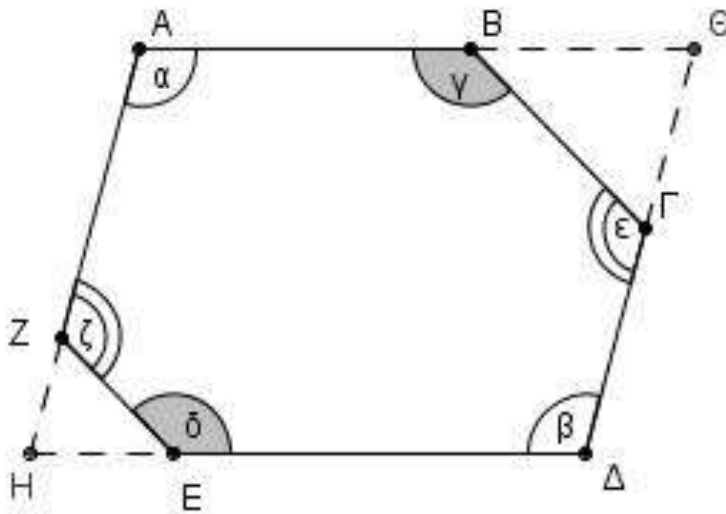
ΘΕΜΑ 4

Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon}$. (Μονάδες 8)

β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

- Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές (Μονάδες 10)
- Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του E και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο E δεν είναι το μέσο του τόξου AB , να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

ii. $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$. (Μονάδες 8)

β) Αν το σημείο E βρίσκεται στο μέσον του τόξου AB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου $A\Delta\Gamma B$ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ ονομάζουμε O το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο E του τμήματος OD . Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AE , που τέμνει το τμήμα AO στο Z .

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και ϕ του παρακάτω σχήματος είναι ίσες.

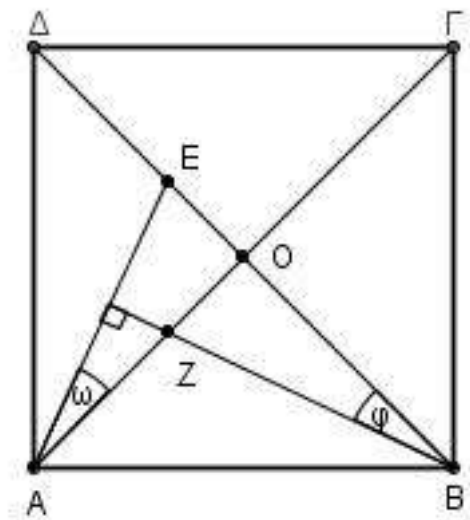
(Μονάδες 6)

β) $BZ=AE$ και $\Gamma Z=BE$

(Μονάδες 12)

γ) Το τμήμα EZ είναι κάθετο στο AB .

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε δυο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ε), τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην (ε). Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία (ε), δηλαδή η (ε) είναι μεσοκάθετος του AA'.

α) Αν η A'B τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο O, να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία (ε) διχοτομεί τη γωνία $\widehat{AOA'}$. (Μονάδες 6)

ii. Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ε).
(Μονάδες 6)

β) Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ε), να αποδείξετε ότι:

i. $KA=KA'$ (Μονάδες 6)

ii. $KA+KB>AO+OB$ (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα BN και την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma M = AN$.

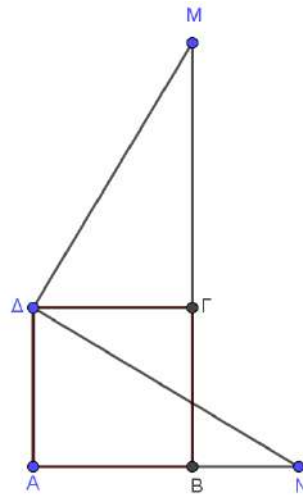
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta N = \Delta M$

(Μονάδες 12)

β) $\Delta N \perp \Delta M$

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου $PΓΕ$ στα σημεία A, Δ και B .

α) Να αποδείξετε ότι:

I. $PΓ = Γ\Delta + AP$

(Μονάδες 6)

II. $PΓ - Γ\Delta = PE - \Delta E$

(Μονάδες 8)

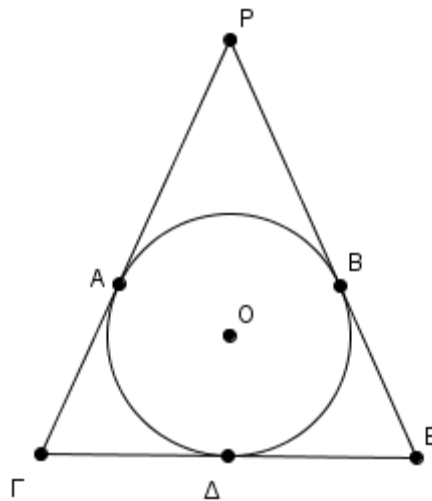
β) Αν $ΑΓ=ΒΕ$, να αποδείξετε ότι

I. Το τρίγωνο $PΓΕ$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 6)

II. Τα σημεία P, O και Δ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα PA και PB . Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) $\Gamma A = \Delta B$. (Μονάδες 8)

γ) η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι ίση με $PA + PB$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

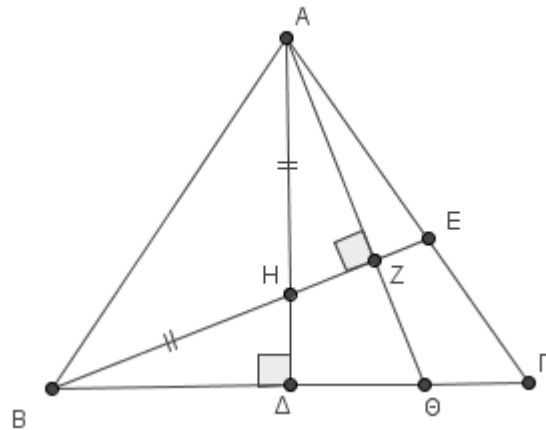
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Στο $A\Delta$ θεωρούμε σημείο H τέτοιο ώστε $HA=HB$. Έστω ότι E είναι το σημείο τομής της BH με την $A\Gamma$. Φέρνουμε την AZ κάθετη στην BE , η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Θ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα $H\Delta B$ και HZA είναι ίσα. (Μονάδες 6)
- ii. $\Delta\Theta = \Theta Z$. (Μονάδες 6)
- iii. Η ευθεία ΘH είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB . (Μονάδες 6)

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AHB ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) είναι $AB=AD$.

α) Να αποδείξετε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ . (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $ABE\Delta$ να είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον είναι γωνία $BAD=120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο O , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $EOB\Gamma$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, τέτοιο ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$ και $AB = \frac{1}{3} A\Delta$. Επιπλέον,

φέρουμε $BE \perp \Delta\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 10)
- γ) Αν K, Λ είναι τα μέσα των BE και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η $A\Gamma$ διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος BK . (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του E , η οποία τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$

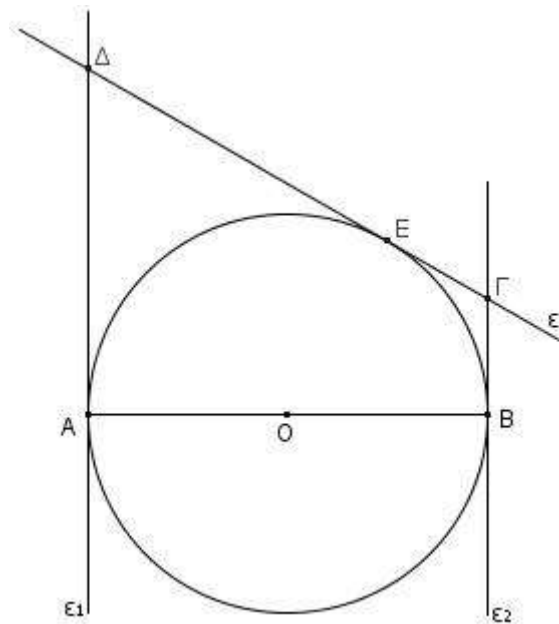
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma O \Delta$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ ανάλογα με τη θέση του σημείου E στο ημικύκλιο AB .

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία A αμβλεία, ισχύει ότι $AB=2AD$. Τα σημεία E και Z , είναι μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Από το Δ φέρουμε τη ΔH κάθετη στην προέκταση της $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο EZH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

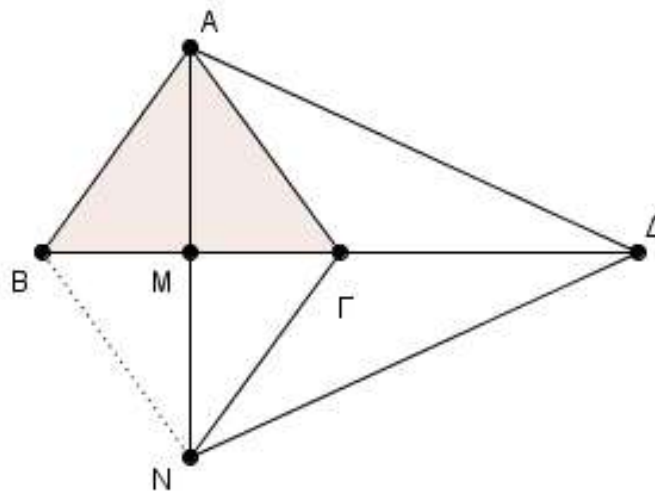
γ) Το τμήμα HE , είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{H}\Gamma$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και AM το ύψος του στην πλευρά $B\Gamma$. Στην προέκταση του AM θεωρούμε τμήμα $MN=AM$. Στην προέκταση του $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta=B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $ABN\Gamma$ ρόμβος. (Μονάδες 8)
- β) Το τρίγωνο $A\Delta N$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $A\Delta N$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία A ίση με 120° και γωνία B είναι ίση με 45° . Στην προέκταση της BA προς το A , παίρνουμε τμήμα $A\Delta = 2AB$. Από το Δ φέρνουμε την κάθετη στην $A\Gamma$ που την τέμνει στο σημείο K .

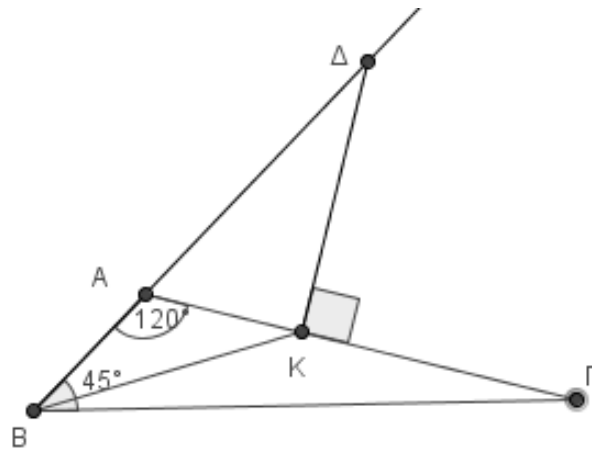
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $A\Delta K$ είναι ίση με 30° . (Μονάδες 6)

β) Το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

γ) Αν Z το μέσο της ΔA , τότε $\angle ZKB = 90^\circ$. (Μονάδες 6)

δ) Το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος $B\Delta$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O και $A\Gamma = 2B\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς ΔA , προς το A , παίρνουμε σημείο E ώστε $\Delta A = AE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

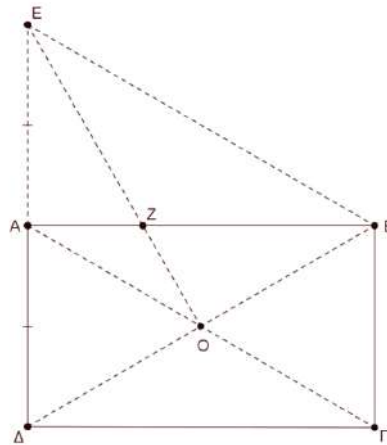
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $EB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 9)

γ) Αν η EO τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι $\Delta Z \perp EB$.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta H = \frac{AB}{2}$

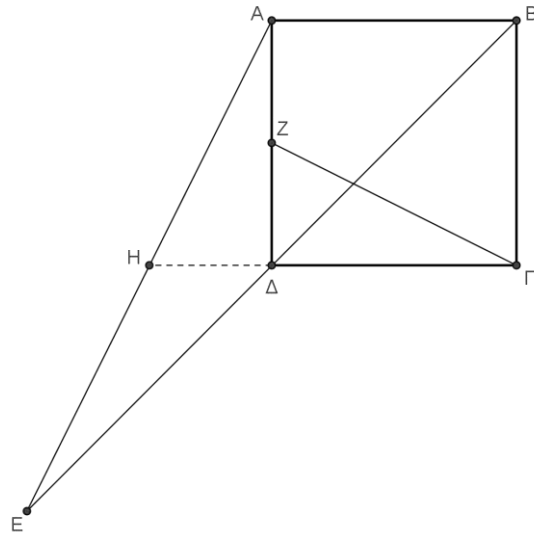
(Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ.

(Μονάδες 8)

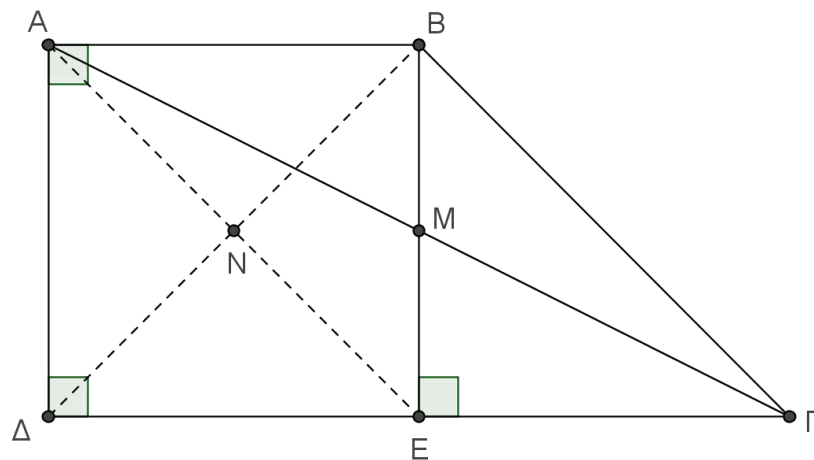


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Φέρνουμε $BE \perp \Delta\Gamma$ που τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο M . Φέρνουμε την AE που τέμνει τη διαγώνιο $B\Delta$ στο N .

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\hat{\Gamma} = 45^\circ$. (Μονάδες 7)
- β) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
- γ) $AE \perp BD$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

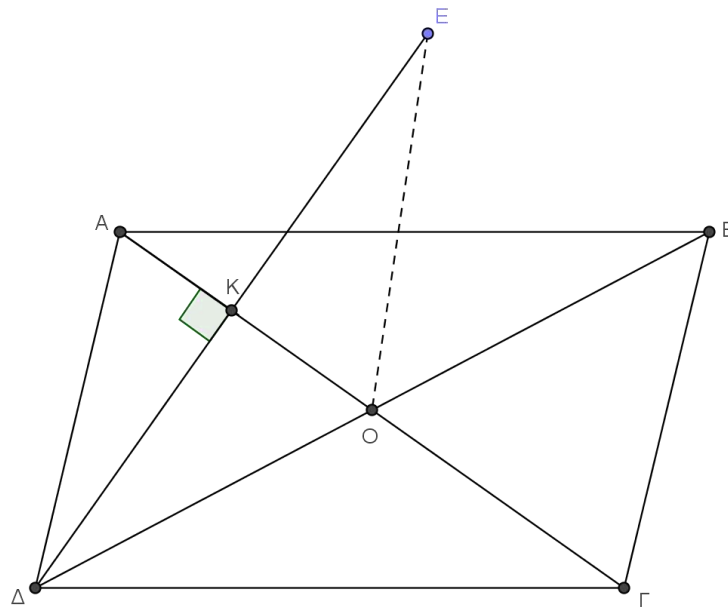
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔΚ κάθετο στην ΑΓ και στην προέκτασή του προς το Κ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε ΚΕ= ΔΚ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $EO = \frac{BD}{2}$. (Μονάδες 8)

β) Η γωνία $\angle \Delta EB$ είναι ορθή. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δύο κύκλοι $(O, \rho_1), (K, \rho_2)$ εφάπτονται εξωτερικά στο N . Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία A, B αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο N τέμνει την (ε) στο M .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το M είναι μέσον του AB .

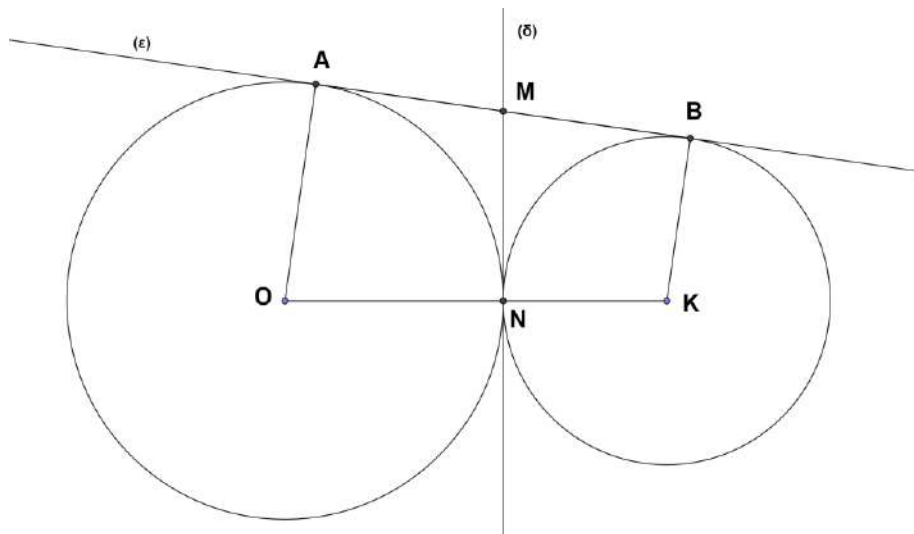
(Μονάδες 7)

β) $\widehat{OMK} = 90^\circ$

(Μονάδες 9)

γ) $\widehat{ANB} = 90^\circ$

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

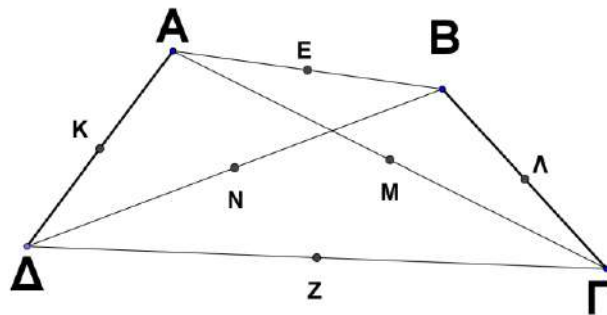
Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Delta=B\Gamma$. Αν E, Λ, Z, K, N, M είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A, \Delta B$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $EMZN$ ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Η EZ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος MN . (Μονάδες 7)

γ) $KE=Z\Lambda$ (Μονάδες 5)

δ) Τα ευθύγραμμα τμήματα $K\Lambda, MN, EZ$ διέρχονται από ίδιο σημείο. (Μονάδες 5)

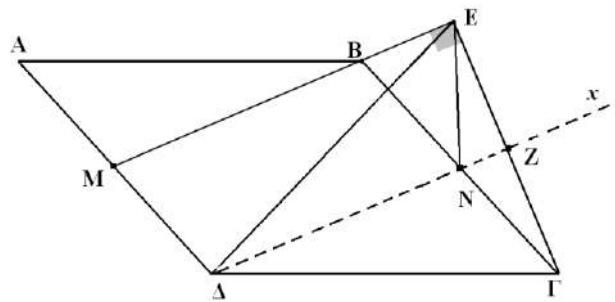


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Θεωρούμε το μέσο M της πλευράς $A\Delta$ και ΓE κάθετος από τη κορυφή Γ στην ευθεία MB ($\Gamma E \perp MB$). Η παράλληλη από την κορυφή Δ στην ευθεία MB ($\Delta x \parallel MB$) τέμνει τις $B\Gamma$ και ΓE στα σημεία N , Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $MBN\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)
- β) Το σημείο Z είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓE . (Μονάδες 9)
- γ) $\Delta E = \Delta \Gamma$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, $BE \perp \Gamma Z$, τα ύψη από τις κορυφές B, Γ αντίστοιχα και H το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα M, N, K, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $AB, A\Gamma, \Gamma H, BH$ αντίστοιχα.

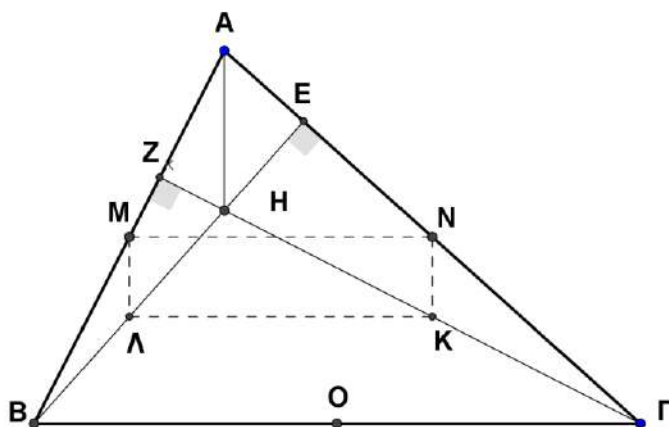
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $MN = \Lambda K$ (Μονάδες 6)

ii. $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$ (Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο $MNKL$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν το O είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το $\hat{MOK} = 90^\circ$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = \Delta B$.

Έστω M το μέσο της $A\Delta$ και N το σημείο τομής των ευθειών AE και $\Gamma\Delta$.

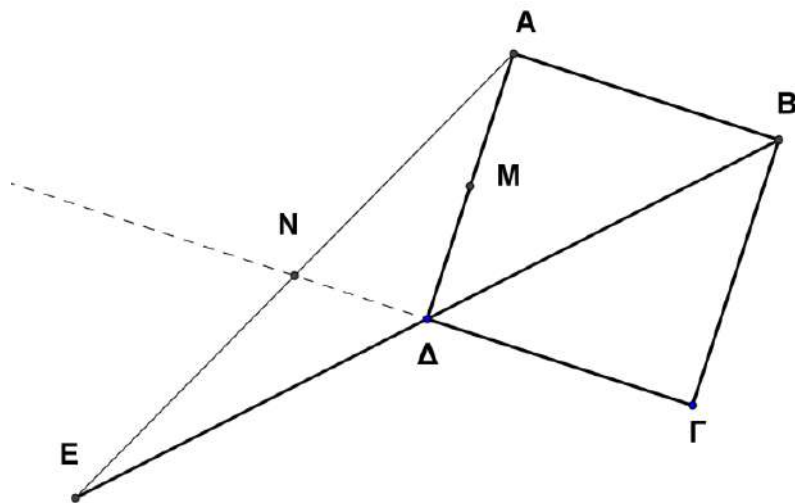
α) Να αποδείξετε ότι $\Delta N = \Delta M$. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $NM\Delta$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $MN \perp A\Gamma$ (Μονάδες 7)

ii. $\Gamma M \perp AN$ (Μονάδες 7)



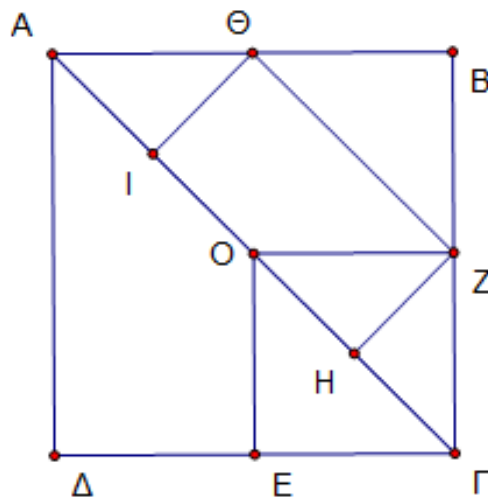
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στη διαγώνιο $A\Gamma$ θεωρούμε σημεία I , O , H ώστε $AI = IO = OH = H\Gamma$. Αν E , Θ και Z τα μέσα των πλευρών $\Delta\Gamma$, AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $OZ\Gamma E$ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 7)

β) $ZH = \frac{A\Gamma}{4}$. (Μονάδες 8)

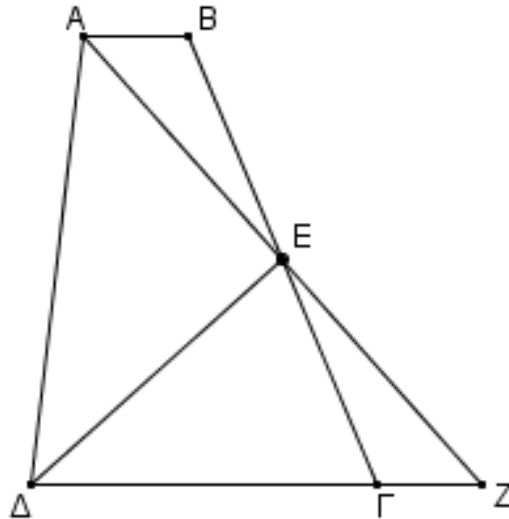
γ) Το τετράπλευρο $I\Theta ZH$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με $\Theta Z = 2\Theta I$. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) ισχύει $ΑΒ+ΓΔ=ΑΔ$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει την ΒΓ στο Ε και την προέκταση της ΔΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΔΑΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
- β) Το Ε είναι το μέσο της ΒΓ (Μονάδες 10)
- γ) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ του τραπεζίου. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

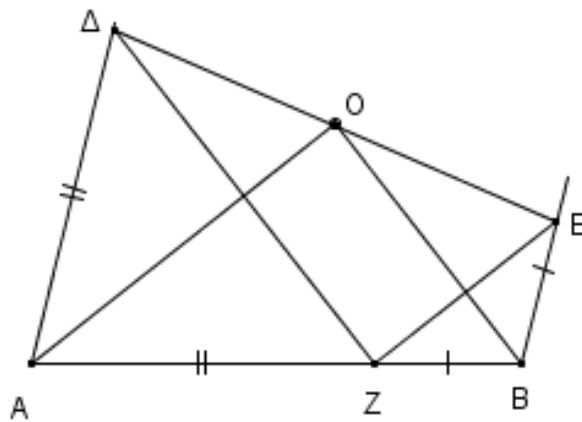
Δίνεται τραπέζιο $AΔEB$, με $AΔ \parallel BE$, στο οποίο ισχύει ότι $AB = AΔ + BE$, και O το μέσον της $ΔE$. Θεωρούμε σημείο Z στην AB τέτοιο ώστε $AZ = AΔ$ και $BZ = BE$.

Αν γωνία $\hat{A}Z = \varphi$,

α) να εκφράσετε τη γωνία $AZΔ$ σε συνάρτηση με τη φ . (Μονάδες 8)

β) να εκφράσετε τη γωνία EZB σε συνάρτηση με τη φ . (Μονάδες 8)

γ) να αποδείξετε ότι οι OA και OB είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων $ΔZ$ και ZE αντίστοιχα. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με $AB > A\Delta$. Θεωρούμε σημεία K, Λ , των $A\Delta$ και AB αντίστοιχα ώστε $AK = A\Lambda$. Έστω M το μέσο του $K\Lambda$ και η προέκταση του AM (προς το M) τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \Delta E$.

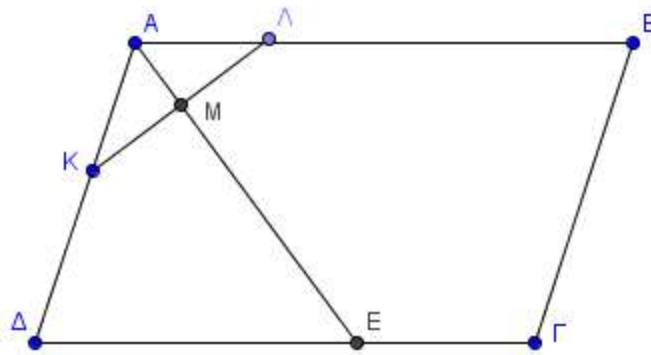
(Μονάδες 8)

β) $B\Gamma + \Gamma E = AB$.

(Μονάδες 10)

γ) $\hat{B} = 2 \cdot \hat{A\Lambda K}$.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$ και τη γωνία B αμβλεία. Από την κορυφή A φέρουμε την AE κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$ και έστω M, N τα μέσα των $AB, \Delta\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $MB\Gamma N$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)
- β) Το τετράπλευρο $ME\Gamma N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)
- γ) Η EN είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{ME\Gamma}$. (Μονάδες 8)

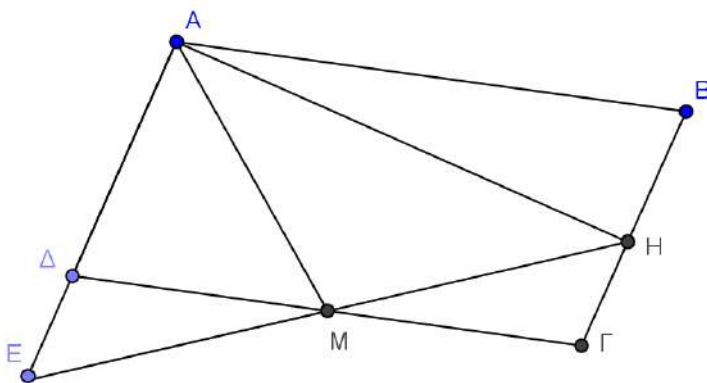
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2 B\Gamma$, τη γωνία A αμβλεία και M το μέσο της $\Gamma\Delta$. Φέρουμε κάθετη στην $A\Delta$ στο σημείο A , η οποία τέμνει την $B\Gamma$ στο H . Αν η προέκταση της HM τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο E , να αποδείξετε ότι:

α) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔAB . (Μονάδες 9)

β) Τα τμήματα EH , $\Delta\Gamma$ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

γ) $\hat{E} = \hat{\Delta M A}$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{EAH} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Gamma B}$

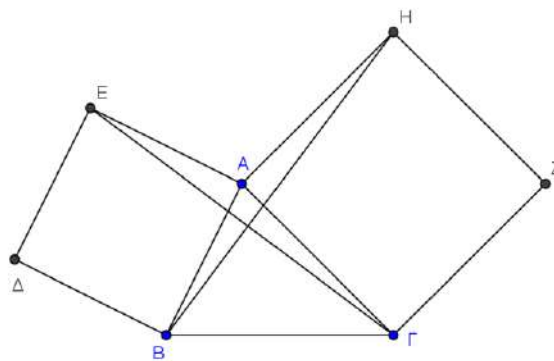
(Μονάδες 8)

β) $E\Gamma = BH$

(Μονάδες 9)

γ) Η $E\Gamma$ είναι κάθετη στη BH .

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

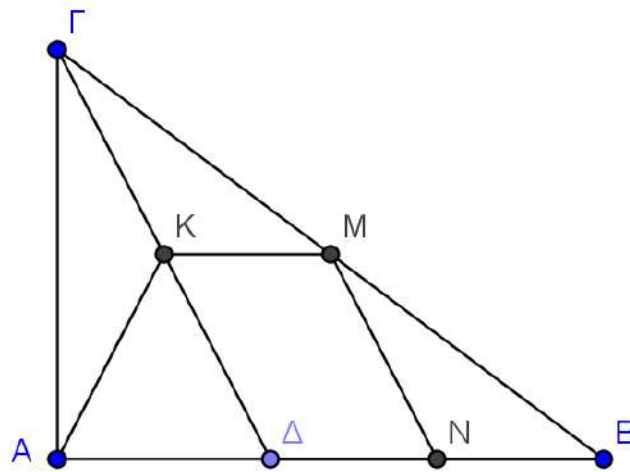
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή, και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB . Έστω K, M, N τα μέσα των $\Gamma\Delta, B\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $KMND$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η διάμεσος του τραπεζίου $AKMN$ είναι ίση με $\frac{AB}{2}$. (Μονάδες 8)



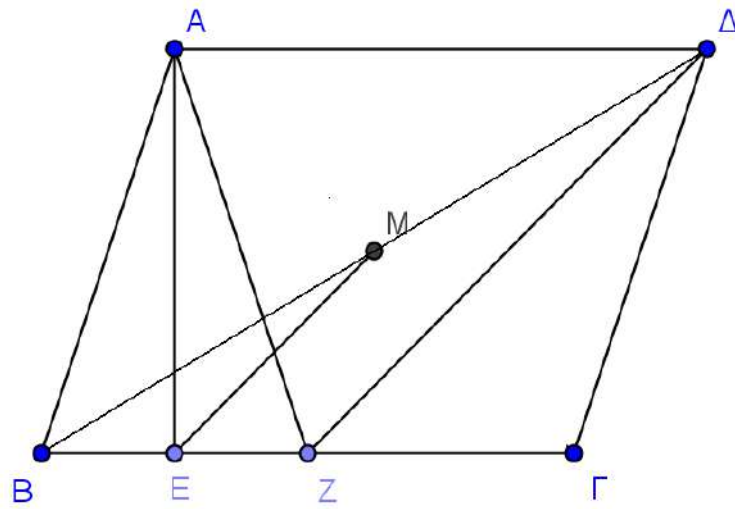
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τη γωνία του Β να είναι ίση με 70° και το ύψος του ΑΕ. Έστω Ζ σημείο της ΒΓ ώστε $BE = EZ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου ΑΖΓΔ (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ το μέσο του ΒΔ, να αποδείξετε ότι $EM = \frac{AG}{2}$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και τη διάμεσό του AM . Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία AM , η οποία την τέμνει στο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.

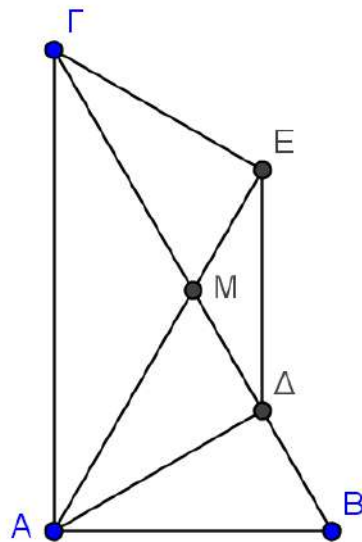
(Μονάδες 8)

β) $ME = M\Delta = B\Gamma/4$

(Μονάδες 9)

γ) Το $A\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

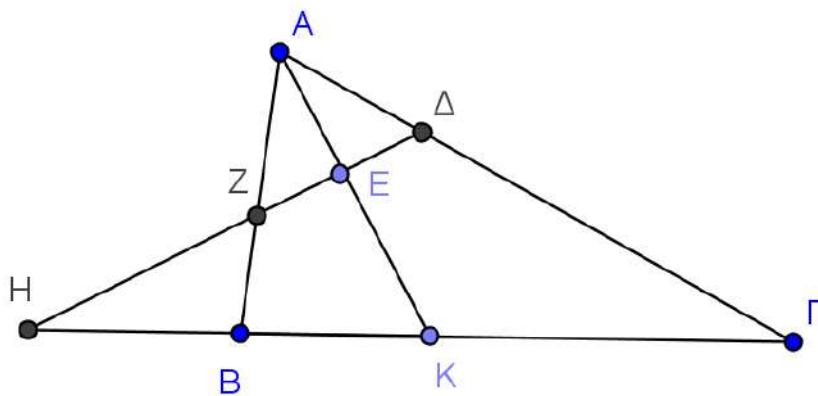
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο του $A\Gamma$ και σε τυχαίο σημείο της E φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο AK , η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Z και Δ αντίστοιχα και την προέκταση της GB στο σημείο H .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\angle Z\Delta\Gamma = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$. (Μονάδες 7)

β) $ZK = K\Delta$. (Μονάδες 8)

γ) $\angle ZH\Gamma = \frac{\angle B - \angle \Gamma}{2}$. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

α) Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 15)

β) Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

(Μονάδες 10)

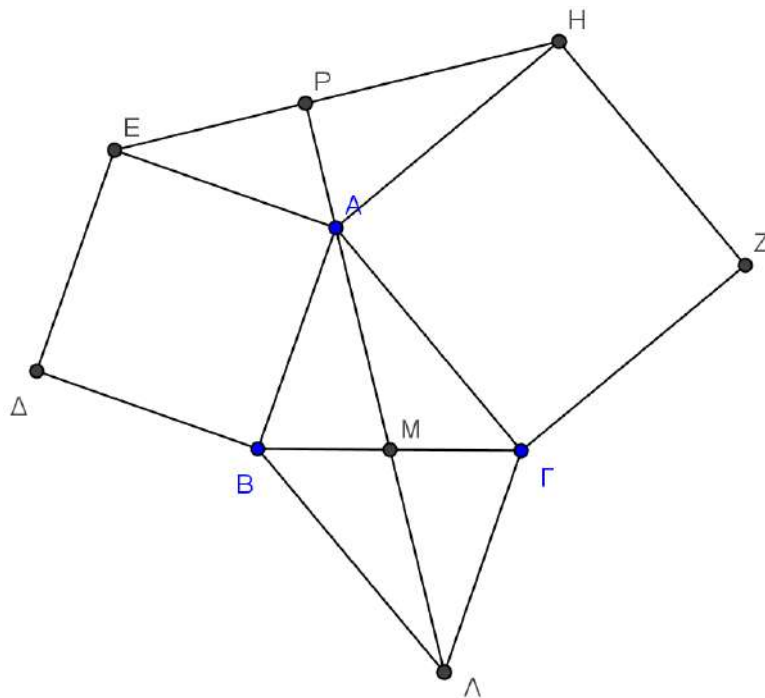
ΘΕΜΑ 4

Εκτός τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$. Αν M το μέσο του $B\Gamma$ και Λ σημείο στην προέκταση της AM τέτοιο ώστε $AM = M\Lambda$, να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma\Lambda = AE$. (Μονάδες 10)

β) Οι γωνίες $A\Gamma\Lambda$ και EAH είναι ίσες. (Μονάδες 10)

γ) Η προέκταση της MA (προς το A) τέμνει κάθετα την $E\Lambda$. (Μονάδες 5)



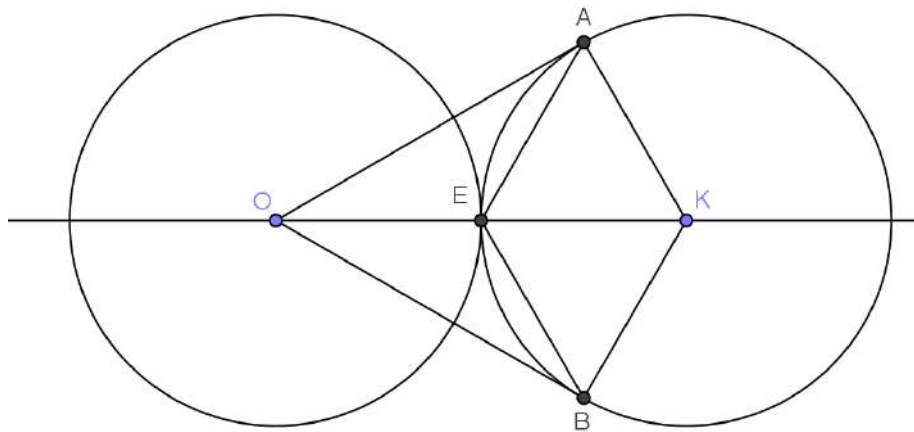
ΘΕΜΑ 4

Δυο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο E . Αν OA και OB είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο O στον κύκλο (K, ρ) να αποδείξετε ότι:

α) $AE = BE$. (Μονάδες 9)

β) $\hat{AOK} = 30^\circ$. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο $AKBE$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

α) Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda M N$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)

β) Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το $AB\Gamma\Delta$ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

α) Σε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda M N$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

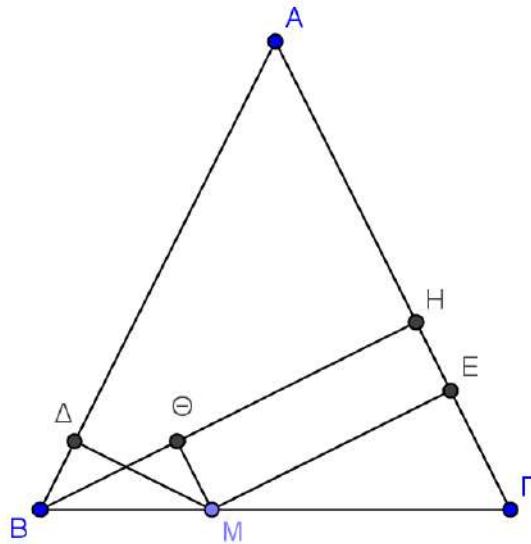
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$ και το ύψος του BH . Από το M φέρουμε κάθετες $M\Delta$, ME και $M\Theta$ στις AB , $A\Gamma$ και BH αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) $B\Theta = \Delta M$ (Μονάδες 9)

γ) Το άθροισμα $M\Delta + ME = BH$. (Μονάδες 7)



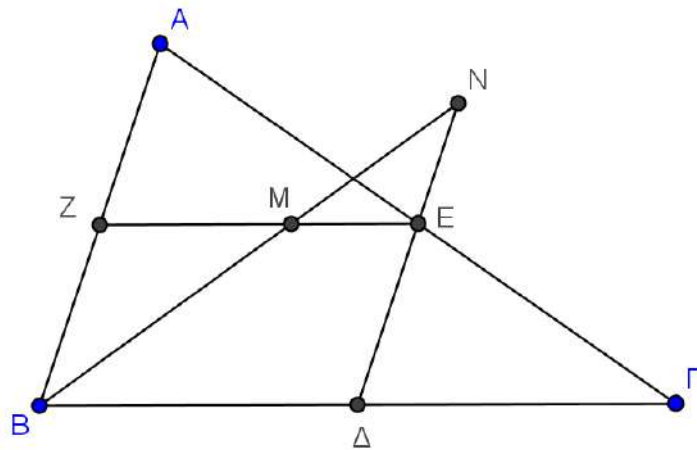
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A\Gamma > AB$ και Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας B τέμνει την ZE στο σημείο M και την προέκταση της DE στο σημείο N , να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Τα τρίγωνα BZM και MEN είναι ισοσκελή. (Μονάδες 10)

γ) $BZ + NE = \Delta\Gamma$ (Μονάδες 8)



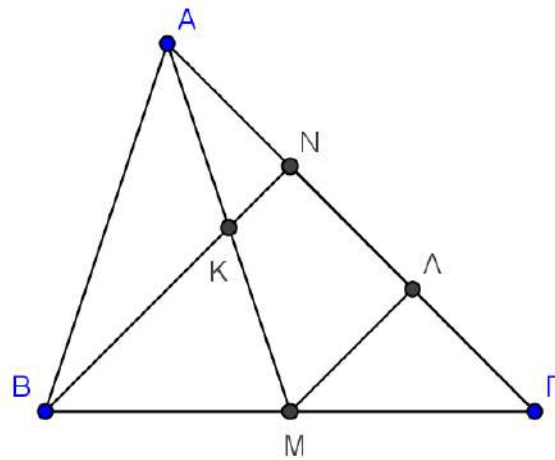
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, AM διάμεσός του και K το μέσο του AM . Αν η προέκταση της BK τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο N , και Λ είναι το μέσο του ΓN , να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο N είναι μέσο του $A\Lambda$. (Μονάδες 9)

β) $\vec{KM}\vec{\Gamma} = \vec{MB}\vec{K} + \vec{AK}\vec{N}$ (Μονάδες 9)

γ) $BK = 3KN$ (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2A\Gamma$. Έστω AM διάμεσος του $AB\Gamma$ και K, Λ τα μέσα των $M\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{M\Lambda\Gamma} = \widehat{A\hat{M}\Gamma}$

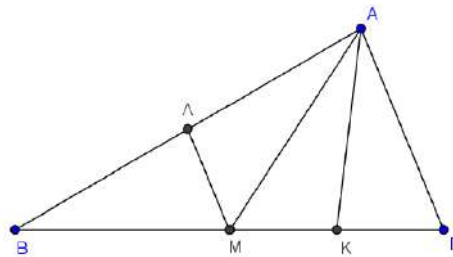
(Μονάδες 7)

β) $M\Lambda = MK$.

(Μονάδες 9)

γ) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΛMK .

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

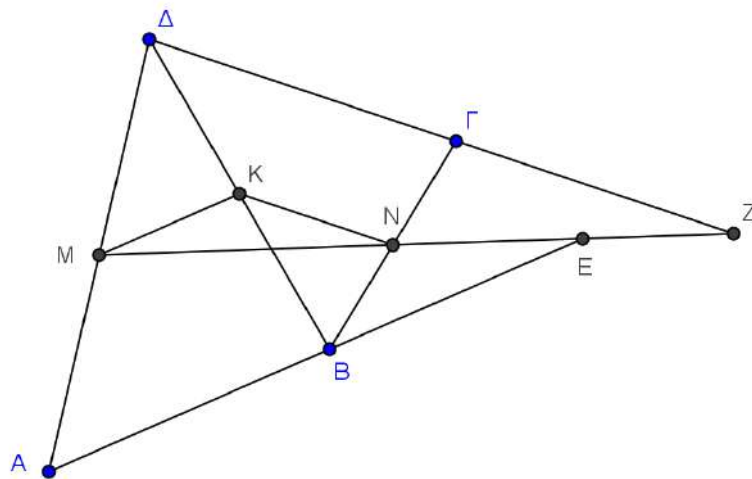
Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta$ και M, N, K τα μέσα των $A\Delta, B\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των AB και $\Delta\Gamma$ τέμνουν την προέκταση της MN στα σημεία E και Z αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) $MK = KN$.

(Μονάδες 13)

β) $\hat{M}EA = \hat{M}Z\Delta$.

(Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και στην προέκταση της $A\Delta$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Delta E = \Delta\Gamma$ ενώ στην προέκταση της AB θεωρούμε σημείο θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B\Gamma Z} = \hat{\Delta\Gamma E}$. (Μονάδες 10)

ii. τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

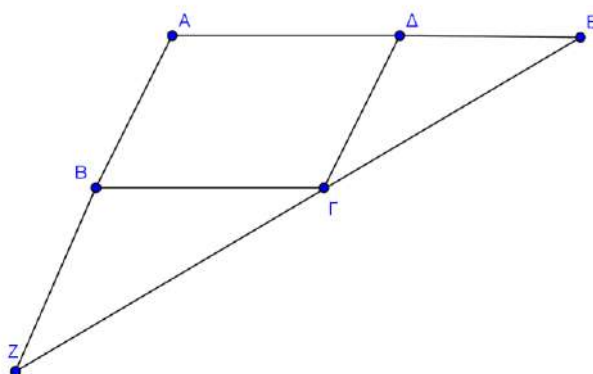
β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. « Έχουμε:

$\hat{B\Gamma Z} = \hat{\Delta\Gamma E}$ (ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη ZE) και

$\hat{B\Gamma\Delta} = \hat{\Gamma\Delta E}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$).

Όμως $\hat{\Delta\Gamma E} + \hat{\Gamma\Delta E} + \hat{\Delta\Gamma\Gamma} = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Delta\Gamma E$). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα: $\hat{\Delta\Gamma E} + \hat{B\Gamma\Delta} + \hat{B\Gamma Z} = 180^\circ$. Οπότε τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή. Φέρουμε τη διάμεσό του AM και σε τυχαίο σημείο K αυτής φέρουμε κάθετη στην AM η οποία τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν H είναι το μέσο του ΔE να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{B} \hat{A} M$. (Μονάδες 8)

β) $\hat{A} \hat{\Delta} H = \hat{\Delta} \hat{A} H$. (Μονάδες 9)

γ) Η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και Δ, E τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔE (προς το E) θεωρούμε σημείο Λ ώστε $E\Lambda = AE$ και στην προέκταση της $E\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο K τέτοιο ώστε $\Delta K = A\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $K\Delta = \Lambda E$. (Μονάδες 6)
- β) Τα τρίγωνα AKB και $\Lambda\Lambda\Gamma$ είναι ορθογώνια. (Μονάδες 9)
- γ) Τα τρίγωνα AKB και $\Lambda\Lambda\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ του ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο με το ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο με το ΓΑ (τα σημεία Δ και Ε είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη ΒΓ και το σημείο Α). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

β) Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:

$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των $AB \parallel M\Delta$ που τέμνονται από ΑΖ)

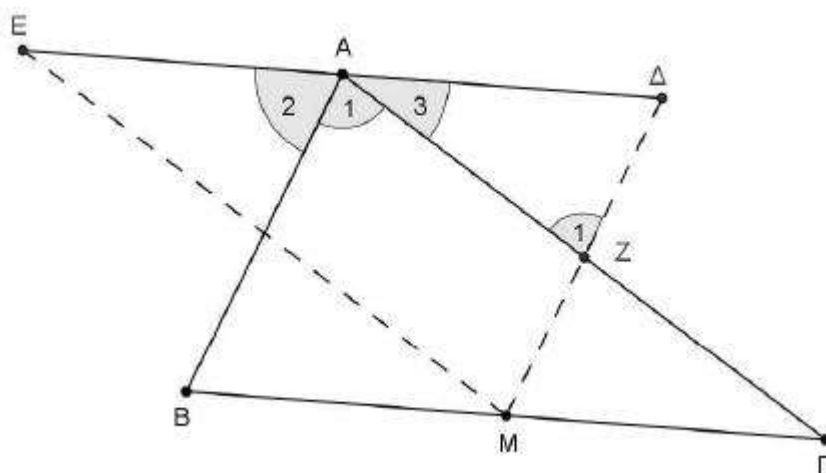
$\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $AB \parallel M\Delta$ που τέμνονται από ΔΕ)

Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}\hat{\Delta}Z = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΑΔΖ). Άρα σύμφωνα

με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$. Οπότε Δ,Ε,Α συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή;

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες (ϵ) και (ζ), και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία A και B αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν M είναι το μέσον του AB, να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία BΔA είναι ορθή.

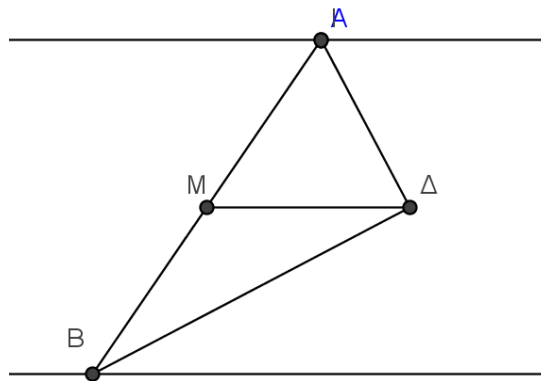
(Μονάδες 9)

β) $\hat{BMD} = 2 \cdot \hat{MDA}$

(Μονάδες 8)

γ) $MD \parallel \epsilon$

(Μονάδες 8)

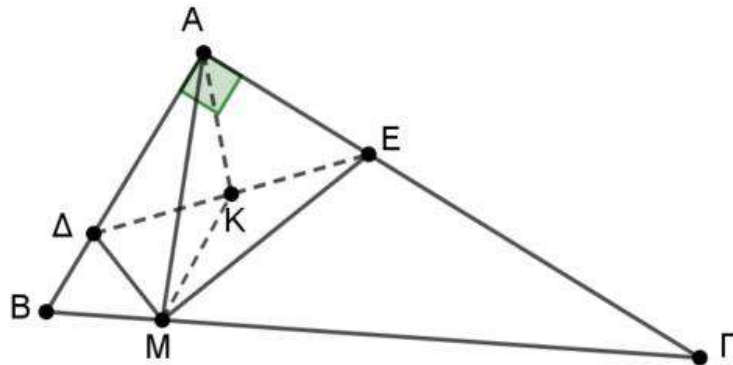


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και M τυχαίο σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών BMA και $AM\Gamma$ οι οποίες τέμνουν τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι, η γωνία $\widehat{\Delta M E}$ είναι ορθή. (Μονάδες 12)

β) Αν K το μέσο του ΔE , να αποδείξετε ότι $MK = KA$ (Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο $MB\Gamma$. Αν η προέκταση της AM τέμνει την $B\Delta$ στο σημείο E , να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Delta A E} = 15^\circ$.

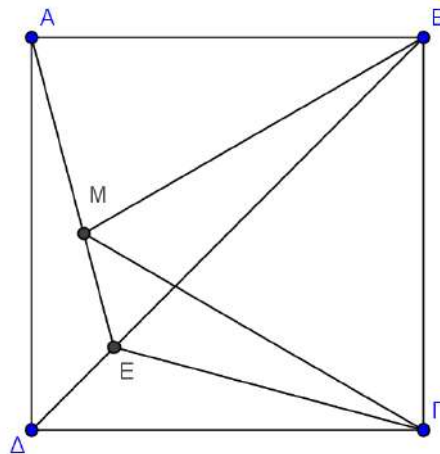
(Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα $\Delta A E$ και $\Delta E \Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

γ) Η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta \Gamma M$.

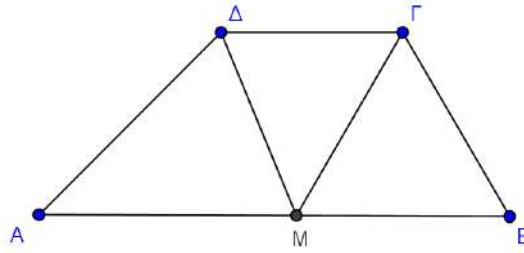
(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB = A\Delta + B\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την AB στο σημείο M , να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- β) Το τρίγωνο $M\beta\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
- γ) Η ΓM είναι διχοτόμος της γωνίας Γ του τραπεζίου. (Μονάδες 8)

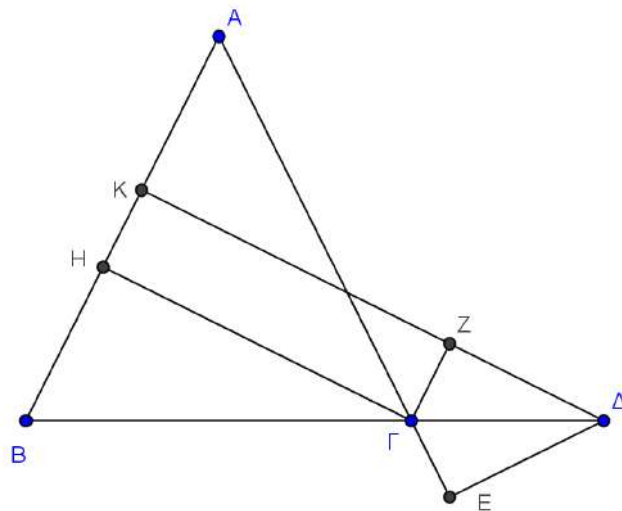


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ΔK κάθετη στην AB και ΔE κάθετη στην προέκταση της $A\Gamma$. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓH κάθετη στην AB και ΓZ κάθετη στην $K\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία $Z\Gamma\Delta$ είναι ίση με τη γωνία B . (Μονάδες 4)
- β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\Gamma E$. (Μονάδες 4)
- γ) Το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
- δ) $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$ (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και ευθεία (ε) παράλληλη από το B προς την $A\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $A\Delta$ η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z , την ευθεία (ε) στο σημείο Λ και την προέκταση της BA στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEZ και $B\Lambda E$ είναι ισοσκελή.

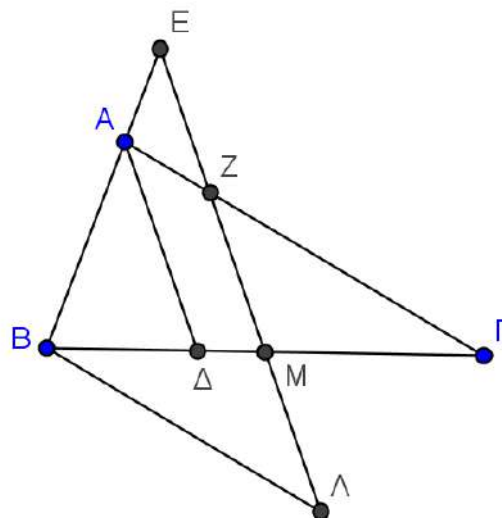
(Μονάδες 8)

β) $B\Lambda = \Gamma Z$.

(Μονάδες 9)

γ) $AE = A\Gamma - B\Lambda$.

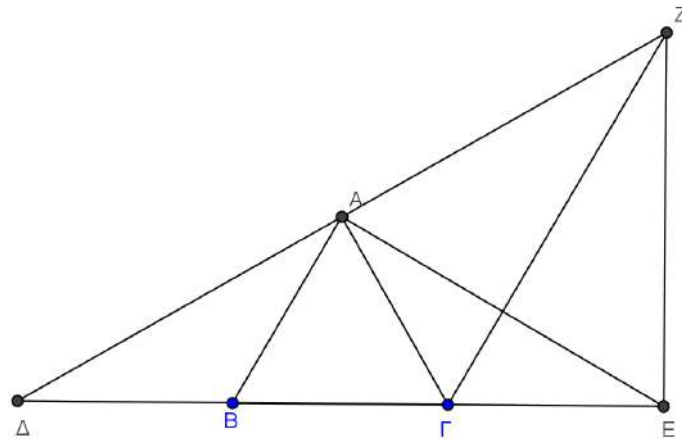
(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = B\Gamma$, ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = B\Gamma$. Φέρουμε την κάθετη στην ED στο σημείο E , η οποία τέμνει την προέκταση της ΔA στο Z .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $\Gamma A E$ και $B\Delta A$. (Μονάδες 8)
β) Να αποδείξετε ότι η ΓZ είναι μεσοκάθετος του $A E$. (Μονάδες 12)
γ) Να αποδείξετε ότι $AB \parallel \Gamma Z$. (Μονάδες 5)

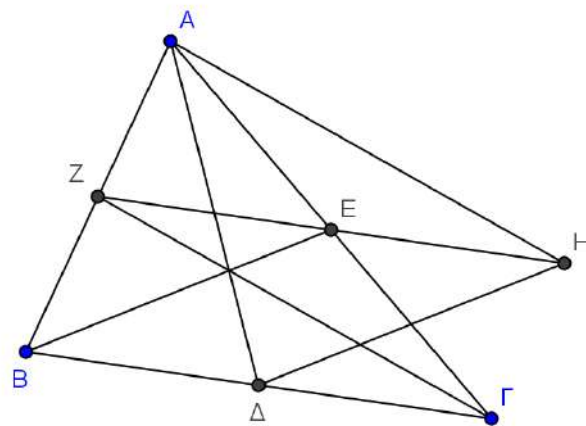


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διάμεσοί του AD , BE και $ΓΖ$. Προεκτείνουμε το τμήμα $ZΕ$ (προς το E) κατά τμήμα $ΕΗ = ZE$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $ΕΗΔΒ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- β) Η περίμετρος του τριγώνου $ΑΔΗ$ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου $ΑΒ\Gamma$. (Μονάδες 9)
- γ) Οι ευθείες BE και $ΔΗ$ τριχοτομούν το τμήμα $Z\Gamma$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) με $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$ και K, Λ τα μέσα των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$. Η παράλληλη από το K προς την AB τέμνει την $A\Lambda$ στο Z .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το Z είναι μέσο του $A\Lambda$.

(Μονάδες 6)

β) $B\Gamma = 2 \Delta Z$.

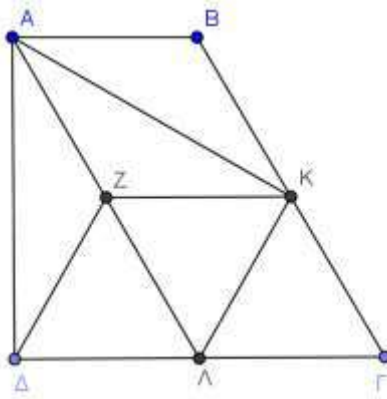
(Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο $ZK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 5)

δ) $\hat{A\hat{K}\Lambda} = 90^\circ$.

(Μονάδες 8)

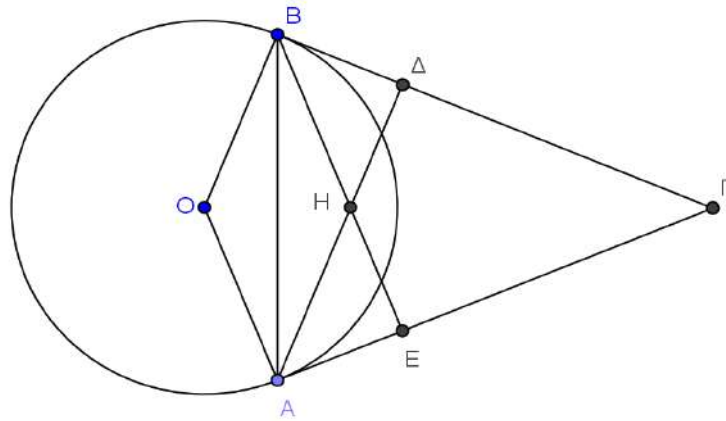


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος κέντρου O και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του A και B . Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη AD και BE του τριγώνου $AB\Gamma$ τα οποία τέμνονται στο σημείο H .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο BHA είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- β) Το τετράπλευρο $OBHA$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)
- γ) Τα σημεία O, H, Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

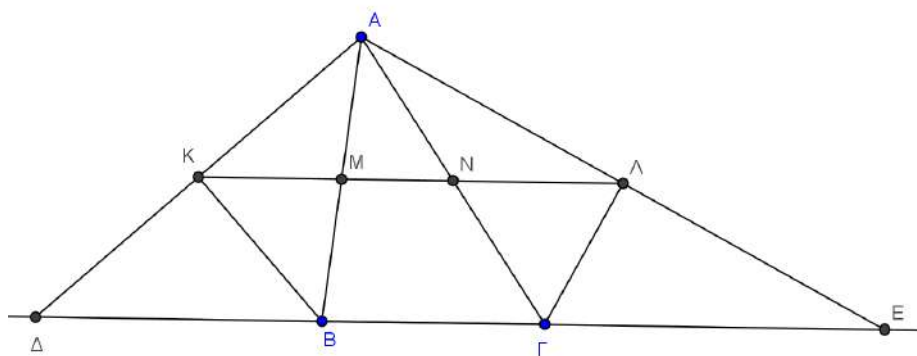
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της ΓB (προς το B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = AB$ ενώ στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E = \Gamma A$.

Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τέμνουν τις $A\Delta$ και AE στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, και η $K\Lambda$ τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία K και Λ είναι μέσα των $A\Delta$ και AE αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα KMA και $AN\Lambda$ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)

γ) $K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$ (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και τυχαίο σημείο E στην πλευρά $\Delta\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο AZ της γωνίας EAB και τη ΔH κάθετη από το Δ προς την AZ , η οποία τέμνει την AE στο M και την AB στο N .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $A\Delta N$ και ABZ είναι ίσα.

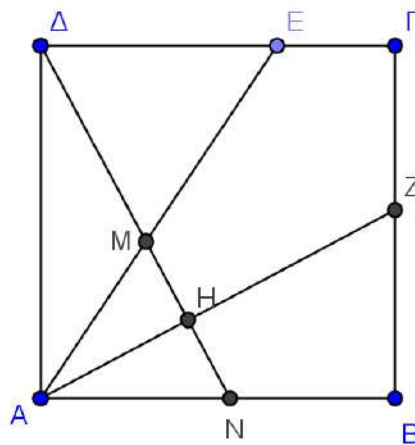
(Μονάδες 8)

β) $AM=AN$ και $\Delta E=EM$.

(Μονάδες 10)

γ) $AE=\Delta E+BZ$

(Μονάδες 7)

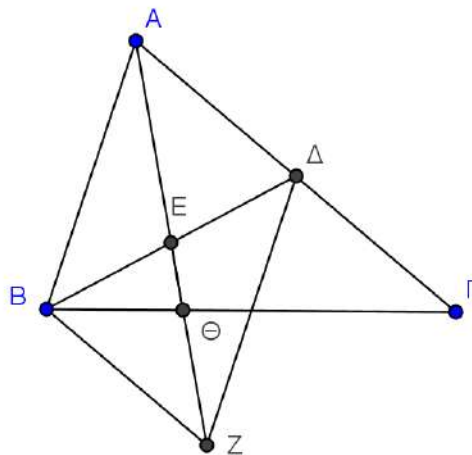


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου BD . Στην προέκταση της AE θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $EZ=AE$ και έστω Θ το σημείο τομής της AZ με την πλευρά $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

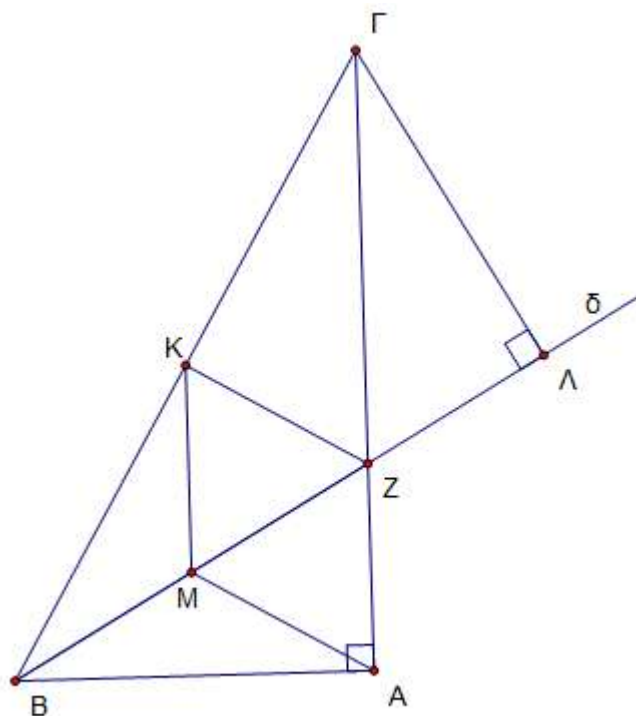
- α) Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- β) Το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Delta Z$. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Z . Τα σημεία M και K είναι τα μέσα των BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν το τμήμα $\Gamma\Lambda$ είναι κάθετο στη διχοτόμο $B\delta$ να αποδείξετε:

- α) Το τρίγωνο $\triangle BZ\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- β) Το τετράπλευρο $AMKZ$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)
- γ) $\Gamma Z = 2ZA$ (Μονάδες 7)
- δ) $B\Lambda = A\Gamma$ (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο $ΚΛ$. Έστω A σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα OA να είναι κάθετη στην $ΚΛ$. Φέρουμε τις χορδές $AB = AΓ = \rho$. Έστω Δ και E τα σημεία τομής των προεκτάσεων των AB και $AΓ$ αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου $ΚΛ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $BAΓ$ είναι 120° .

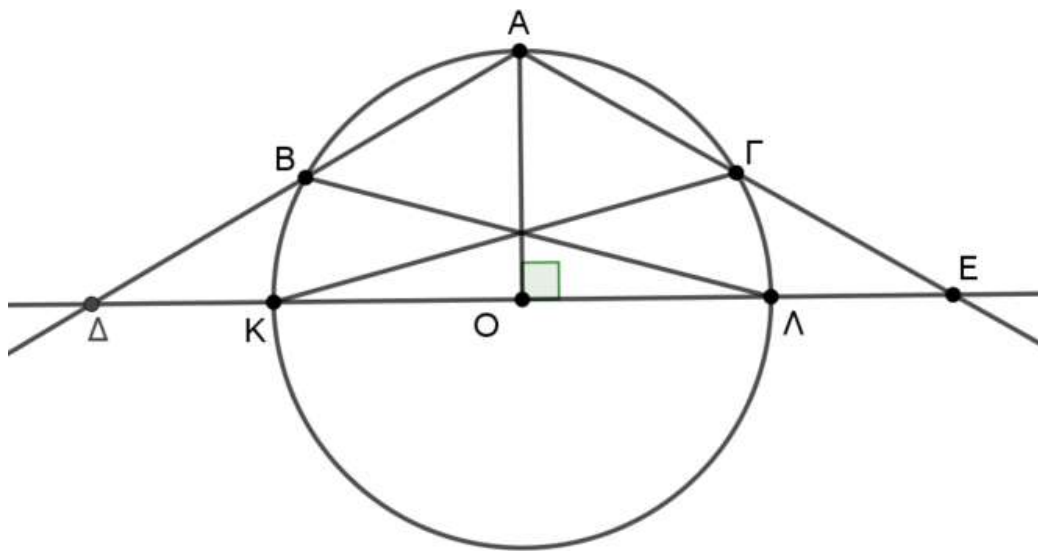
(Μονάδες 7)

β) Τα σημεία B και Γ είναι μέσα των $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 9)

γ) $K\Gamma = \Lambda B$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

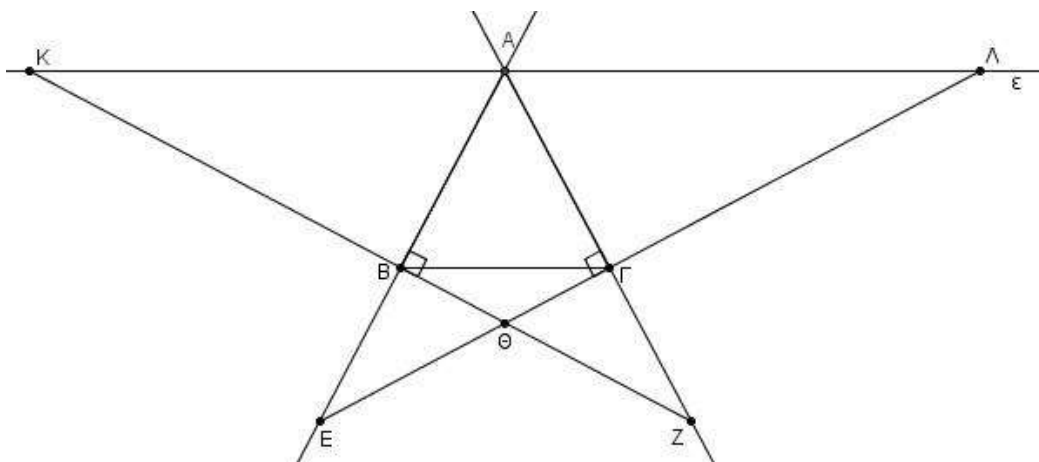
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$), και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Η κάθετη στην πλευρά AB στο B τέμνει την ε στο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο Z . Η κάθετη στην πλευρά $A\Gamma$ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AZ=AE$ (Μονάδες 8)

ii. $AK=A\Lambda$ (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των KZ και $E\Lambda$. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

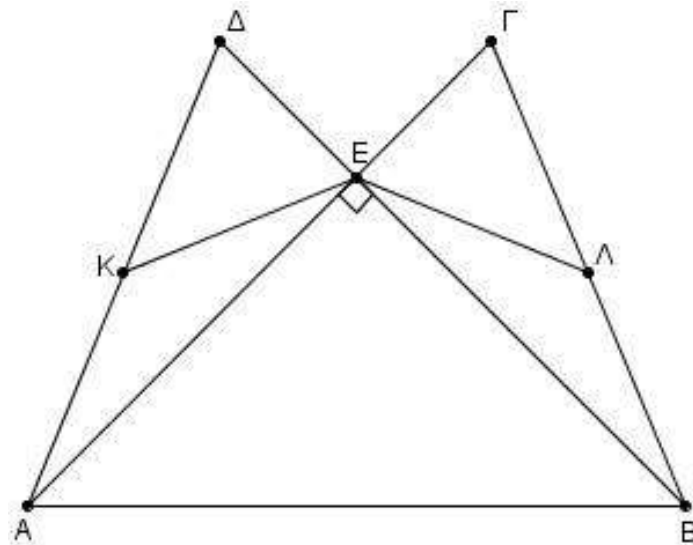


ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και $AB\Delta$ ($BA=B\Delta$), τέτοια ώστε οι πλευρές τους $A\Gamma$ και $B\Delta$ να τέμνονται κάθετα στο σημείο E , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $ED=EG$. (Μονάδες 7)
- β) $\Delta\Gamma \parallel AB$. (Μονάδες 8)
- γ) Το τρίγωνο EKL είναι ισοσκελές και $K\Lambda \parallel AB$. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

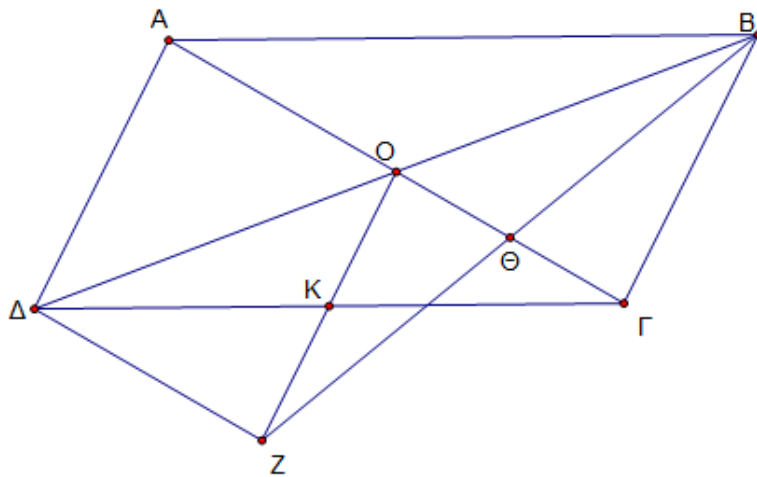
Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το σημείο τομής των διαγωνίων του και K το μέσο του $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το τμήμα OK κατά τμήμα $KZ = KO$. Η BZ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο Θ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $O\Gamma$ και BZ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

β) $AO = \Delta Z$. (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα $\triangle AOB$ και $\triangle Z\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε το $B\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τις διαμέσους AE και ΓZ του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ που τέμνονται στο Θ . Το $B\Theta$ προεκτεινόμενο, τέμνει το $A\Gamma$ στο K και το $A\Delta$ στο H .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το $ZK\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

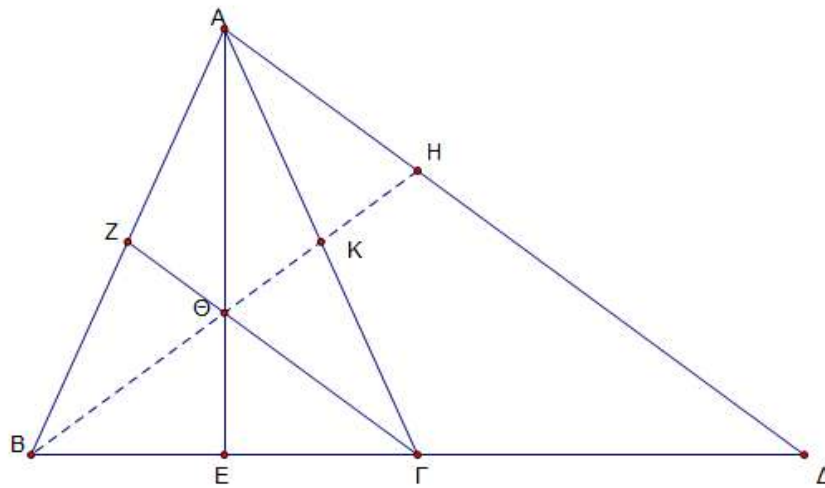
(Μονάδες 9)

β) $AH = \Theta\Gamma$.

(Μονάδες 9)

γ) $AH = 2Z\Theta$.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB . Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta \parallel AB$ με K το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα DE κάθετο στη $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $KGOE$ είναι παραλληλόγραμμο.

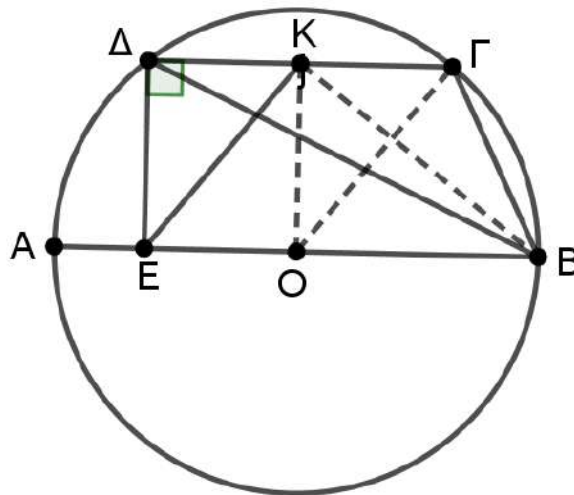
(Μονάδες 8)

β) $\hat{\Delta EK} = \frac{\hat{\Delta O\Gamma}}{2}$.

(Μονάδες 12)

γ) $KE < KB$.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο με $AB > B\Gamma$ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία 60° . Από το Δ φέρουμε ΔM κάθετη στην $A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο M είναι μέσο του AO όπου O το κέντρο του ορθογωνίου.

(Μονάδες 8)

ii. $AM = \frac{1}{4} A\Gamma$

(Μονάδες 7)

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓN κάθετη στη $B\Delta$, να αποδείξετε ότι το $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε τη διχοτόμο του $A\Delta$. Έστω ΔK και ΔP οι προβολές του Δ στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η κάθετη της $B\Gamma$ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο E και την προέκταση της πλευράς AB (προς το B) στο σημείο Z .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = \hat{\Delta E\Gamma}$

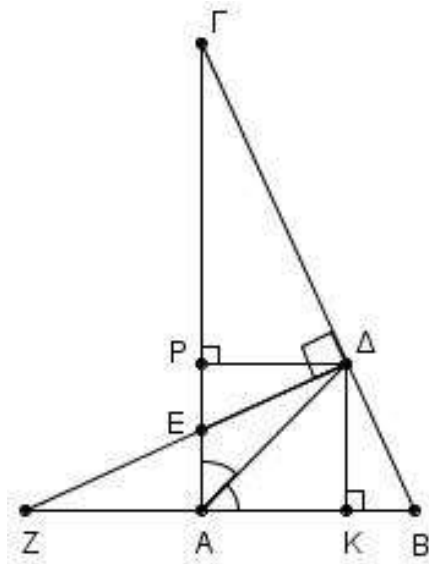
(Μονάδες 8)

ii. $\Delta E = \Delta B$

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\Gamma Z$

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΓΒ$ ($ΑΓ=ΓΒ$). Φέρουμε τα ύψη του $ΑΚ$ και $ΓΛ$. Αν $Ε$ είναι το μέσο της πλευράς $ΑΓ$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $ΚΕΛ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Η $ΚΛ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΒΚΕ$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AD . Έστω E , Z και H είναι τα μέσα των BD , AD και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DEZH$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών AB και $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το παραλληλόγραμμο $DEZH$ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)
- γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο (η γωνία B ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου $DEZH$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) με $AB < A\Gamma$ και AH το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία Δ και E τέτοια ώστε $\Delta B = AB$ και $\Gamma E = \Gamma A$. Αν ΔZ και $E\Theta$ είναι οι αποστάσεις των Δ και E από τις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{\Gamma\Delta A} = \widehat{\Delta\hat{A}H}$ και $\widehat{E\hat{A}B} = \widehat{H\hat{A}E}$.

(Μονάδες 14)

β) $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$.

(Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με $AB > AD$. Στην AB θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε $AE = AD$. Από το μέσο M της DE φέρουμε παράλληλη προς την $ΔΓ$ που τέμνει την $BΓ$ στο K .

α) Να αποδείξετε $AM \perp DE$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $2MK = 2AB - AD$. (Μονάδες 9)

γ) Φέρνουμε την $EΚ$ που τέμνει την προέκταση της $ΔΓ$ στο Z .

Να αποδείξετε ότι $ΓZ = AB - AD$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O, ρ) και σημείο P εκτός του κύκλου. Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Η PO τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο AB στο Γ και $\widehat{APB} = 60^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $OP = 2\rho$.

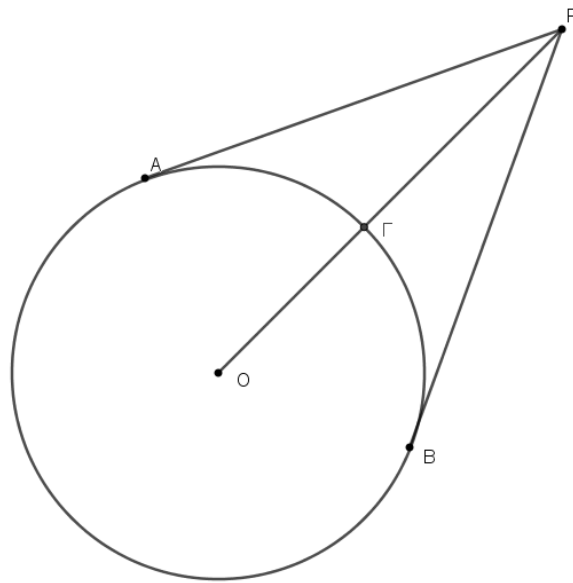
(Μονάδες 10)

β) $\widehat{A\Gamma B} = 120^\circ$.

(Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο $OAGB$ είναι ρόμβος.

Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)



ΘΕΜΑ 4

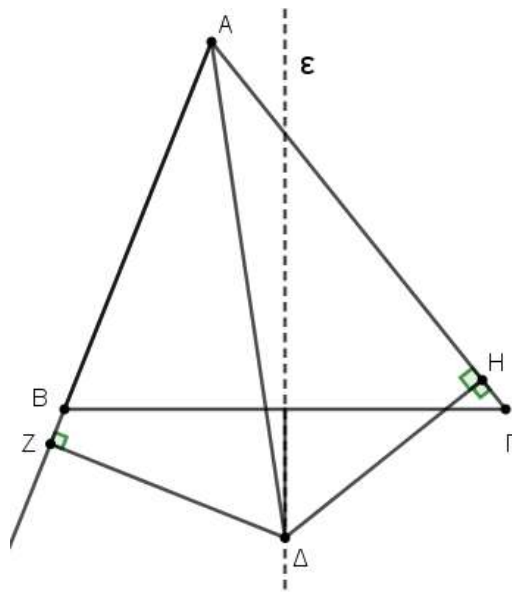
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την μεσοκάθετο (ϵ) της $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΔZ και ΔH προς τις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $AH\Delta$. (Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι $BZ = H\Gamma$. (Μονάδες 09)

γ) Αν η γωνία $A = 60^\circ$ και M το μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $HM = Z\Delta$.

(Μονάδες 08)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$, ώστε $A\Delta = B\Delta = B\Gamma$ και σημείο E της πλευράς AB , ώστε $AE = \Gamma\Delta$.

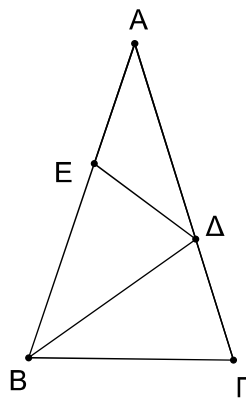
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$. (Μονάδες 6)

ii. $\hat{A} = 36^\circ$. (Μονάδες 6)

iii. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Στην προέκταση της ΔE προς το E θεωρούμε σημείο Z , ώστε $\Delta Z = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

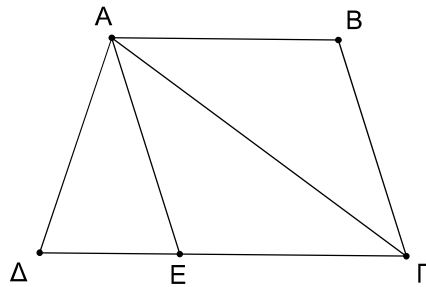
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} = 108^\circ$. Στη βάση $\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημείο E , ώστε οι $A\Gamma$, AE να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

ii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε η διαγώνίός του $A\Gamma$ να είναι κάθετη στη $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα E , Z και H των AB , $A\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

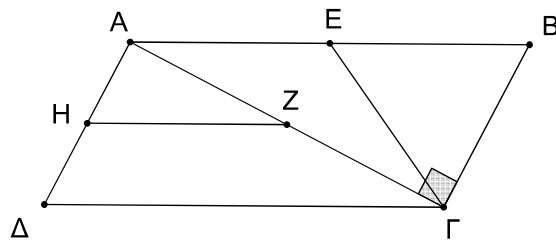
i. $\Gamma E = ZH$.

(Μονάδες 9)

ii. Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{\Gamma}E$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $\Delta H = \frac{AB}{4}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB > A\Gamma$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε κάθετη στη $B\Gamma$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο AH της γωνίας $\hat{A}$ στο σημείο E . Έστω AZ το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma A Z} = \hat{\Delta A B}$.

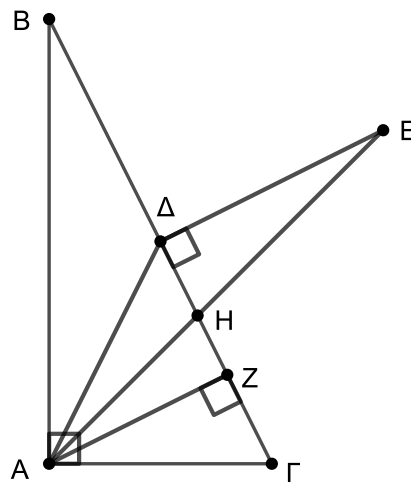
(Μονάδες 8)

β) $A\Delta = \Delta E$.

(Μονάδες 9)

γ) $\hat{Z A \Delta} = \hat{\Gamma} - \hat{B}$.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα AE , BZ , BD και GE αναπαριστούν τέσσερις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου.

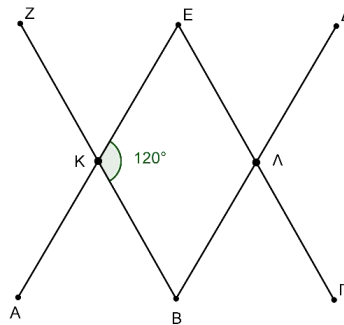
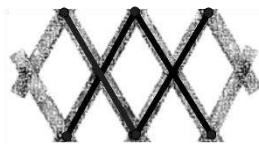
Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή $AE \parallel BD$ και $BZ \parallel GE$, και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή K κοινό μέσο των AE , BZ και Λ κοινό μέσο των BD , GE . Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι AE και BZ με κορυφή το κοινό τους μέσο K , η γωνία $B\hat{K}E$, είναι ίση με 120° .

α) Να αποδείξετε ότι $A\hat{K}B = K\hat{B}\Lambda = B\hat{\Lambda}\Gamma = 60^\circ$. (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα AKB και $B\Lambda\Gamma$ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A . Έστω ότι μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους B και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους A τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο M .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. οι ευθείες KB και ΛM τέμνονται σε σημείο, έστω Δ . (Μονάδες 10)

ii. το τρίγωνο $\Delta K \Lambda$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K \Lambda$ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε $BK \perp B\Gamma$ έτσι ώστε $BK = A\Gamma$ (το σημείο K είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A).

α) Να αποδείξετε ότι $AM \parallel BK$ και $AB = BK$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η AK είναι διχοτόμος της γωνίας BAM . (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $\widehat{BKA} = 45^\circ - \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$ (Μονάδες 6)

δ) Μπορεί το τετράπλευρο $ABKM$ να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)