

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M στην πλευρά AB . Από το M φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Δ .

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Delta M \Gamma} = \widehat{B \Gamma M}$. (Μονάδες 05)

β) Αν το τρίγωνο ΓAB είναι ισοσκελές με βάση AB , να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου M στην AB ώστε το τρίγωνο $\Delta M \Gamma$ να είναι ισοσκελές με $\Delta M = \Delta \Gamma$ και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας. (Μονάδες 10)

γ) Αν M είναι το μέσο του τμήματος AB και E το μέσο του τμήματος $B\Gamma$ να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $M\Delta E B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών του AB και $B\Gamma$ προς το B και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία E και Z τέτοια ώστε $BE = \Gamma Z$. Αν P είναι το σημείο τομής των AZ και ΔE , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Οι γωνίες $\widehat{A\hat{E}\Delta}$ και $\widehat{B\hat{Z}A}$ είναι ίσες.
- ii. Τα τμήματα AZ και ΔE είναι κάθετα.

(Μονάδες 18)

β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής P των AZ και ΔE είναι τέτοιο ώστε $PB = AB$, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου E στην προέκταση του τμήματος AB . (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$, το μέσο M της βάσης $BΓ$ και τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στη βάση του.

α) Αν από το μέσο M φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές AB και $AΓ$ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

i. $ME = MZ$. (Μονάδες 6)

ii. Το $AEMZ$ είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με $2AB$. (Μονάδες 7)

β) Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο Δ στο ευθύγραμμο τμήμα $BΓ$, διαφορετικό από το μέσο M , και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές AB και $AΓ$ του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία K και Λ αντίστοιχα, τότε:

i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου $AK\Delta\Lambda$;

ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου $AK\Delta\Lambda$ με την περίμετρο του ρόμβου $AEMZ$ του ερωτήματος α ii) και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AD . Στην προέκταση της διαμέσου AD προς το Δ παίρνουμε σημείο E , έτσι ώστε $AD = DE$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα ABD και $ED\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 07)

ii. Η διάμεσος AD είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών AB και $A\Gamma$ που την περιέχουν. (Μονάδες 08)

β) Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το διπλάσιο της διαμέσου AD ισούται με την πλευρά $B\Gamma$, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου $ABED$ και το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Από σημείο B εξωτερικό ενός κύκλου (O, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα BA . Ενώνουμε το σημείο B με το κέντρο O του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα $OG = BO$. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $\Gamma\Delta$, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AB = \Delta\Gamma$

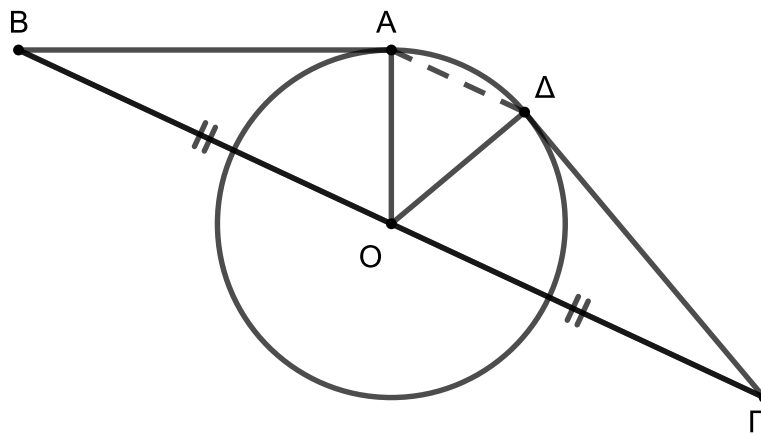
(Μονάδες 08)

ii. $A\Delta \parallel B\Gamma$

(Μονάδες 10)

β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος BA είναι ίσο με την ακτίνα R , τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο $AO\Delta$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)



ΘΕΜΑ 4

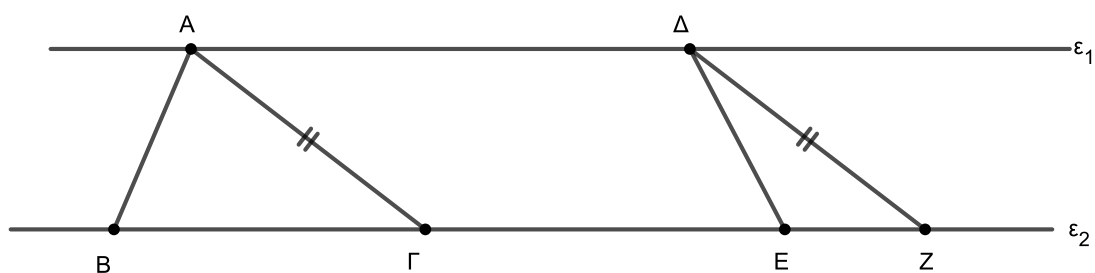
Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔEZ είναι αμβλυγώνιο με $\hat{E} > 90^\circ$. Ισχύει επίσης ότι $AG = \Delta Z$.

α)

i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές A και Δ ονομάζοντάς τα AH και $\Delta\Theta$ αντίστοιχα. (Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι $H\Gamma = \Theta Z$. (Μονάδες 12)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί $EZ < B\Gamma$. (Μονάδες 08)



ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $A\Gamma$. Φέρουμε τμήμα ΔE ίσο και παράλληλο με την πλευρά $B\Gamma$ και από το σημείο E φέρουμε τμήμα EZ ίσο και παράλληλο με την πλευρά AB , όπως φαίνεται στο σχήμα.

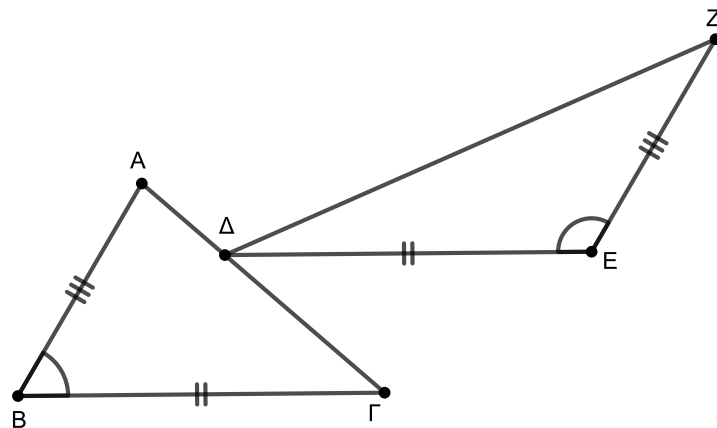
α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

1. Οι γωνίες $\widehat{\Delta E Z}$ και $\widehat{A B \Gamma}$ είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.
2. Οπότε $\widehat{\Delta E Z} = \widehat{A B \Gamma}$.
3. Τα τρίγωνα $\Delta E Z$ και $A B \Gamma$ είναι ίσα.
4. Το τμήμα ΔZ είναι ίσο με το τμήμα $A \Gamma$.

(Μονάδες 08)

β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας (Σ ή Λ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3. (Μονάδες 10)

γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη $\widehat{B} < 90^\circ$, να συγκρίνετε τα τμήματα $A\Gamma$ και ΔZ για τα διάφορα είδη της γωνίας $\widehat{B}$ και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 07)



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες (ε) και (ψ) .

α) Αν η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι μεγαλύτερη από την $\widehat{A\hat{B}\psi}$:

i. Να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{A}\varepsilon} + \widehat{A\hat{B}\psi} < 180^\circ$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και ψ τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

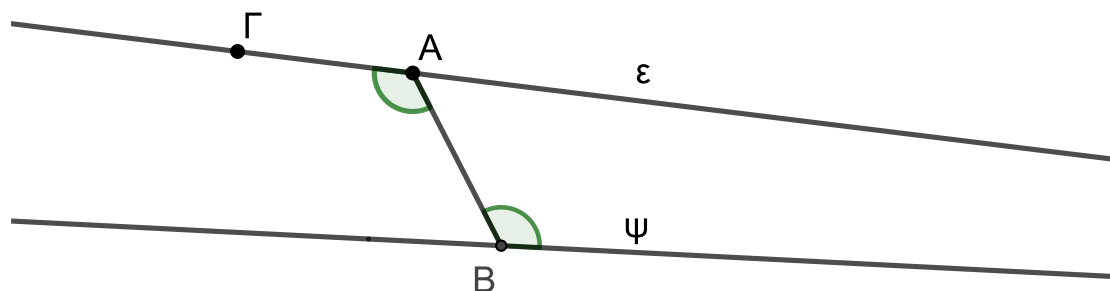
(Μονάδες 6)

β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

(Μονάδες 7)

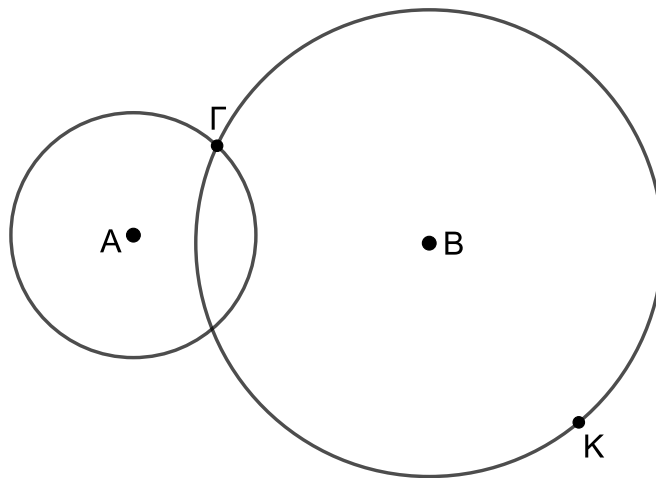
γ) Αν ισχύει $\widehat{B\hat{A}\Gamma} < \widehat{A\hat{B}\psi}$, τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η AB βρίσκεται το σημείο τομής των ε και ψ και γιατί;

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) ισχύει $\rho < R$ και $AB = 6$.



i. Να αποδείξετε ότι $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$.

ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα K και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το B.»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το A.»

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 16)

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 2 από το B του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;

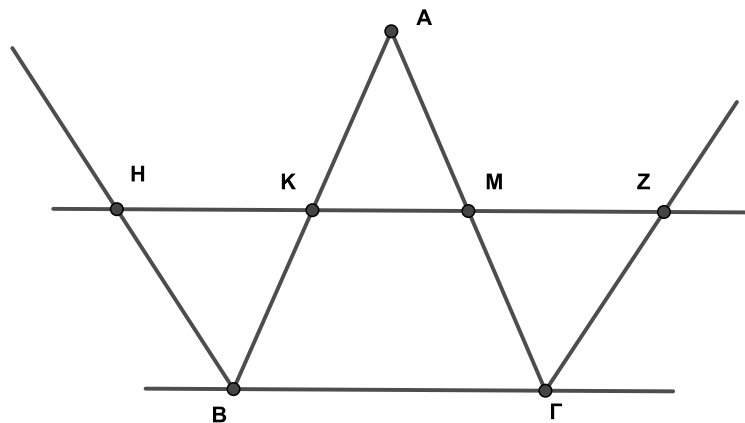
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$), με K, M τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία K και M τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών B και Γ στα σημεία H και Z αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma ZH$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 14)



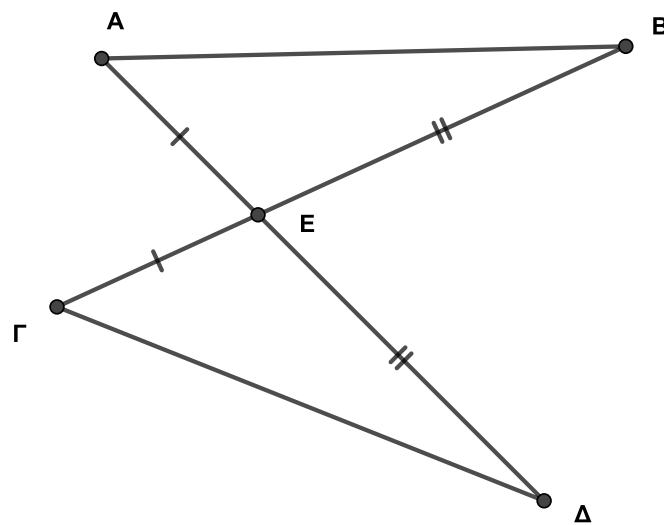
ΘΕΜΑ 4

Τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΔ$ και $ΒΓ$ τέμνονται στο σημείο $Ε$ έτσι ώστε $ΑΕ=ΓΕ$ και $ΒΕ=ΕΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΓΔΕ$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις $ΕΗ$ και $ΕΘ$ του σημείου $Ε$ από τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΓΔ$, αντίστοιχα, είναι ίσες. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι προεκτάσεις των $ΑΒ$ και $ΓΔ$ προς τα $Α$ και $Γ$ αντίστοιχα τέμνονται στο $Ζ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΒΔΖ$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, BD η διχοτόμος της γωνίας B και M το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν η EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο Z τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $BE=ED$. (Μονάδες 7)
- β) Να αποδείξετε ότι $BE//ZD$. (Μονάδες 8)
- γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι ρόμβος. (Μονάδες 5)
- δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε το τετράπλευρο ΔEBZ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι οι ευθείες $\chi\chi$ και $\gamma\gamma$ εφάπτονται στον κύκλο (O,R) στα άκρα μιας διαμέτρου του AB . Να αποδείξετε ότι:

- α) οι ευθείες $\chi\chi$ και $\gamma\gamma$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 4)
- β) οι διχοτόμοι των γωνιών $B\chi\chi$ και $A\gamma\gamma$ τέμνονται σε σημείο M . (Μονάδες 6)
- γ) το σημείο M είναι το μέσο του ημικυκλίου AB . (Μονάδες 10)
- δ) αν η διχοτόμος της γωνίας $B\chi\chi$ τέμνει την $\gamma\gamma$ στο σημείο Γ και η διχοτόμος της γωνίας $A\gamma\gamma$ τέμνει την $\chi\chi$ στο σημείο Δ , τότε $M\Gamma = M\Delta$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

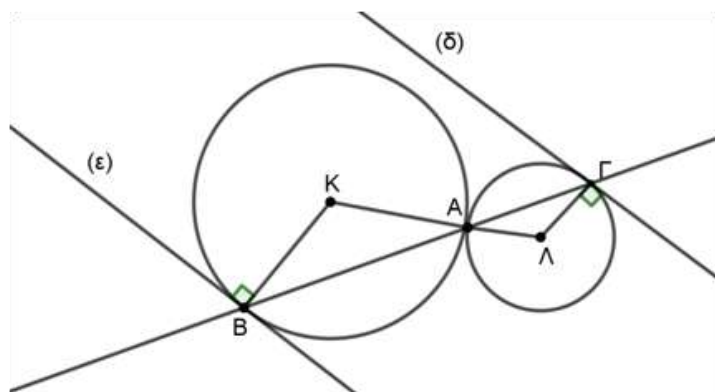
Οι κύκλοι (K,R) , (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το A και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία B και Γ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ϵ) και (δ) στα σημεία B και Γ .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{KBA} = \widehat{\Lambda\Gamma A}$. (Μονάδες 8)

β) $(\epsilon) \parallel (\delta)$. (Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο $K\Gamma\Lambda B$ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το παρακάτω σχήμα με τους κύκλους (A, ρ) και (B, R) με $R > \rho$. Επίσης $AB = 9$.

α) Να αποδείξετε ότι $R + \rho < 9$.

(Μονάδες 7)

β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο KLM με KL να είναι ίση με ρ και η πλευρά LM να είναι ίση με R . Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.

(Μονάδες 10)

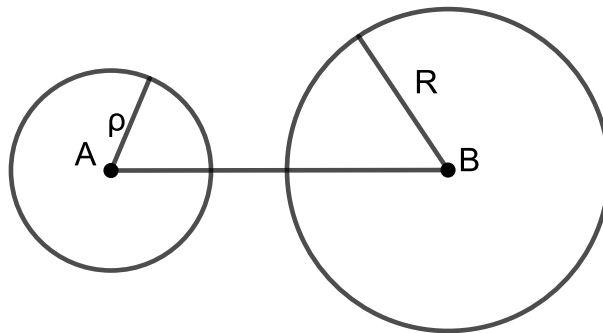
γ) Έστω το τρίγωνο KLM που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες I_1 και I_2 που περιγράφονται παρακάτω;

I_1 : «Η απόσταση των σημείων από το K είναι ίση με ρ ».

I_2 : «Η απόσταση των σημείων από το M είναι ίση με R ».

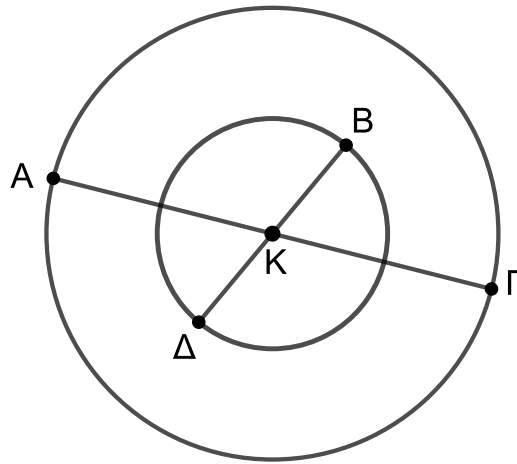
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροί τους.



α) Αν ισχύει $ΑΓ > ΒΔ$:

i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής:

«Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

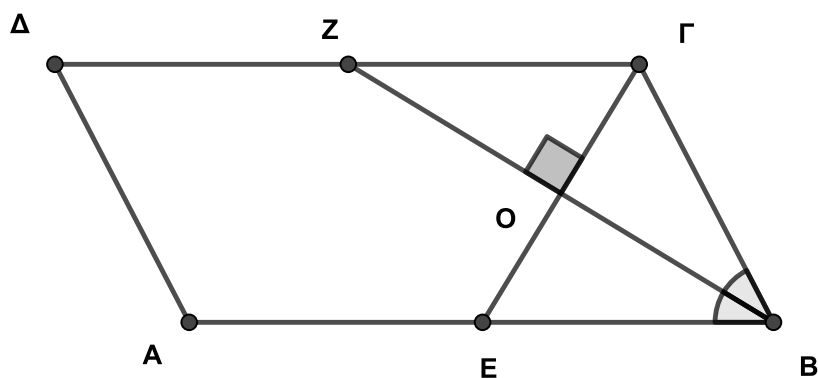
Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος και η BZ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Φέρουμε GO κάθετη στη BZ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την AB στο σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $OZ\Gamma$ και OBE είναι ίσα. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ είναι ρόμβος (Μονάδες 6)

δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\widehat{B}$ ώστε το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ να είναι τετράγωνο; (Μονάδες 4)



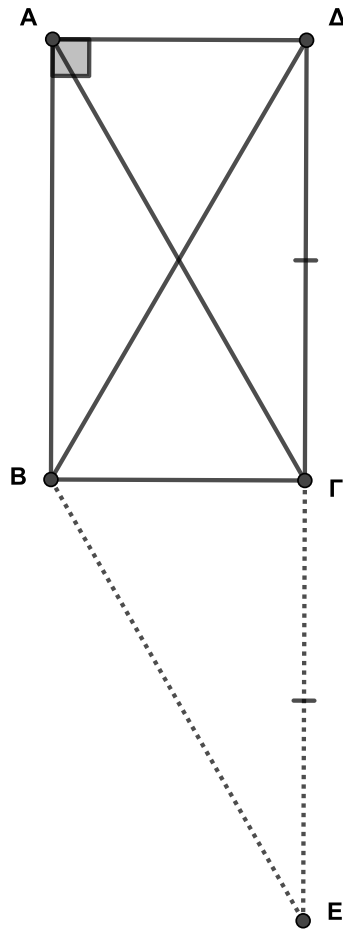
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά $\Delta\Gamma$ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma E = \Delta\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma E B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Αν $\widehat{B\Gamma E} = 120^\circ$ να αποδείξετε ότι $B\Delta = 2A\Delta$. (Μονάδες 9)



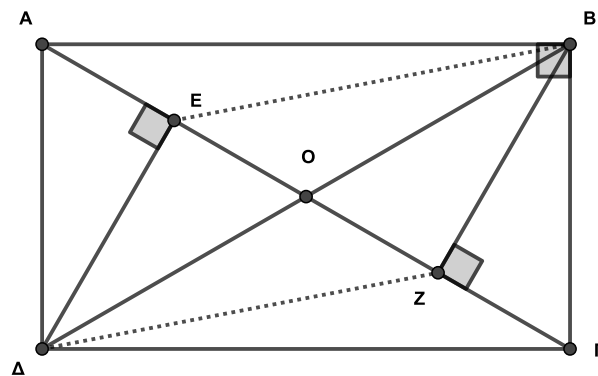
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$ και με κέντρο O . Αν BZ και ΔE είναι οι αποστάσεις των κορυφών B και Δ από τη διαγώνιο $A\Gamma$, τότε:

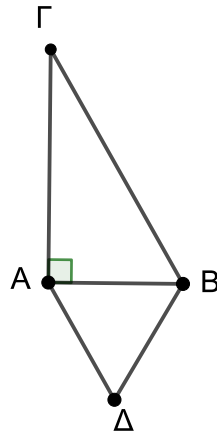
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔEO και BZO είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Αν $\widehat{\Delta\hat{A}E} = 60^\circ$ και $OE = 5$, να βρείτε το μήκος της πλευράς $A\Delta$. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 4



Στο παραπάνω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. Επίσης οι $A\Delta$ και $B\Gamma$ είναι παράλληλες και το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 8)

β) Αν η περίμετρος του $AB\Delta$ είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του $AB\Gamma$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν το σημείο K είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το $A\Delta BK$ να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου K . Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $A\Delta BK$; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 10)

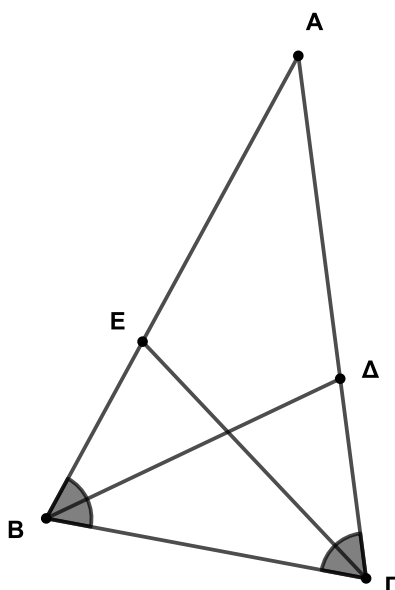
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Θεωρούμε τις διχοτόμους $B\Delta$ και ΓE των γωνιών B και Γ , αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$. (Μονάδες 9)

β) Από τα σημεία E και Δ φέρνουμε κάθετες EL και ΔK στις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\Delta K = EL$. (Μονάδες 9)

γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Z της πλευράς $B\Gamma$ που η απόστασή του από το σημείο E να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και K αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



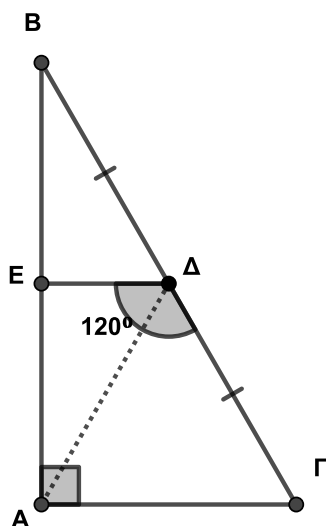
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$. Από το μέσο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά AG που τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $\hat{E\Delta\Gamma}=120^\circ$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\Delta\Gamma A}$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Προεκτείνουμε την πλευρά AG προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma Z=AG$ και την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma H=\frac{B\Gamma}{2}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A\hat{H}Z}=90^\circ$. (Μονάδες 12)



ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο ΔEZ , φέρουμε τη διάμεσο ΔM και στην προέκτασή της προς το μέρος του M παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε $\Delta M = M\Theta$. Προεκτείνουμε την πλευρά EZ προς το E κατά τμήμα $EA = EZ$ και προς το Z κατά τμήμα $Z\Gamma = EZ$.

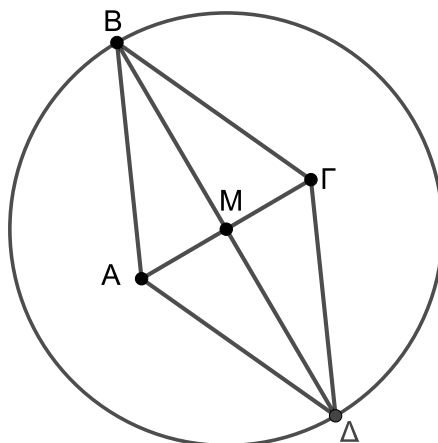
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔAM και ΘGM είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Theta A \Delta \Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι $A\Delta = 12$. Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου EH του τριγώνου ΔEZ στο σχήμα του Γιάννη; (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

α) Στο σχήμα η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο M . Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)



β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.

Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

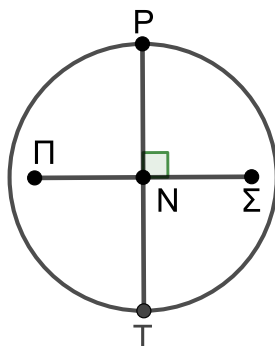
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα PT και $P\Sigma$ τέμνονται κάθετα στο N και $PN = N\Sigma$. Επίσης η PT είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το N .

Να αποδείξετε ότι $PP = P\Sigma = \Sigma T = TP$.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$. Αν τα σημεία Ε, Ζ, Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ, και ΑΓ αντιστοίχως και το ΜΚ είναι κάθετο στην ΒΔ, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ΒΜΔ είναι ισοσκελές (μον. 5) και το Κ είναι το μέσο του ΒΔ (μον. 2)

(Μονάδες 7)

β)

i. $EK = \frac{AD}{2}$.

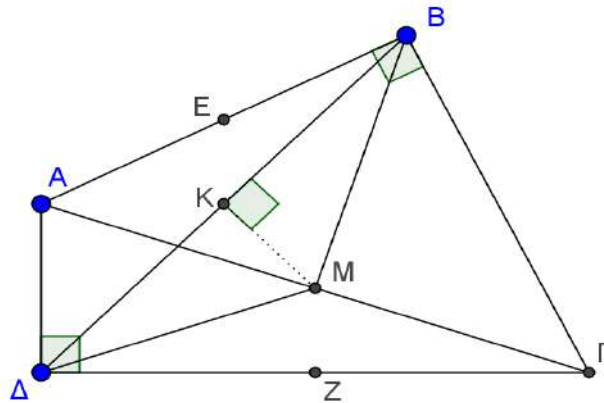
(Μονάδες 6)

ii. $MZ = EK$.

(Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο ΚΕΜΖ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Α φέρουμε ΑΕ κάθετη στη ΒΔ. Έστω Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι :

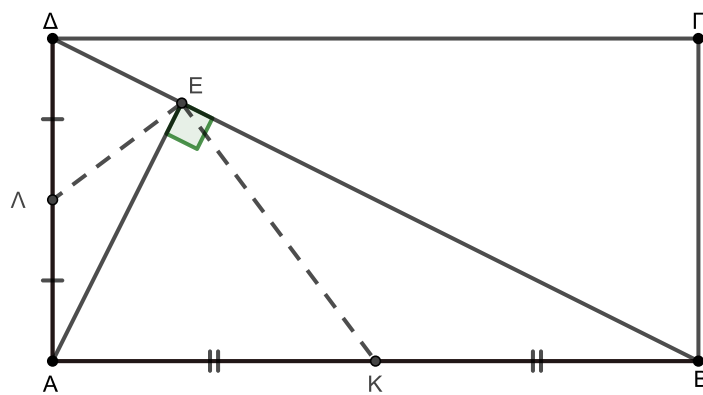
i. $\widehat{ΚΕΛ} = 90^\circ$.

ii. $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$.

(Μονάδες 16)

β) Αν $\widehat{ΒΑΓ} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι $ΚΛ = ΒΓ$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν E είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA και $\Gamma\Delta$ και Z το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔA και ΓB να αποδείξετε ότι:

α) Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$.

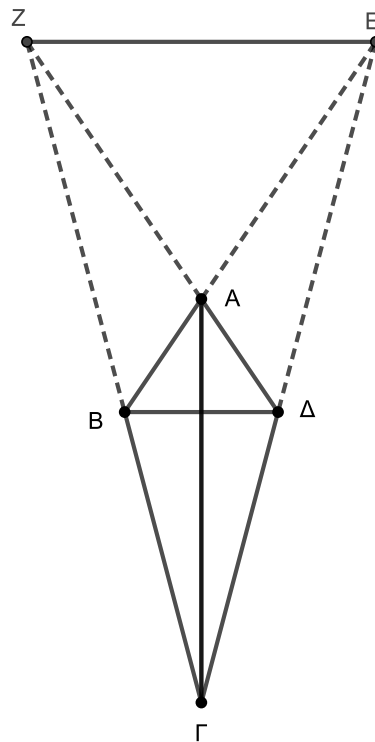
(Μονάδες 7)

β) $\Gamma Z = \Gamma E$

(Μονάδες 9)

γ) $EZ \parallel B\Delta$

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή και AM η διάμεσός του. Από το M φέρουμε MK κάθετη στην AB και ML κάθετη στην $A\Gamma$. Αν N, P είναι τα μέσα των BM και ΓM αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{NKM} = \widehat{NMK}$ (Μονάδες 7)

β) Η MK είναι διχοτόμος της γωνίας NMA . (Μονάδες 9)

γ) $AM = KN + LP$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Αν M , K και Λ είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, AB και $A\Delta$ αντίστοιχα τότε:

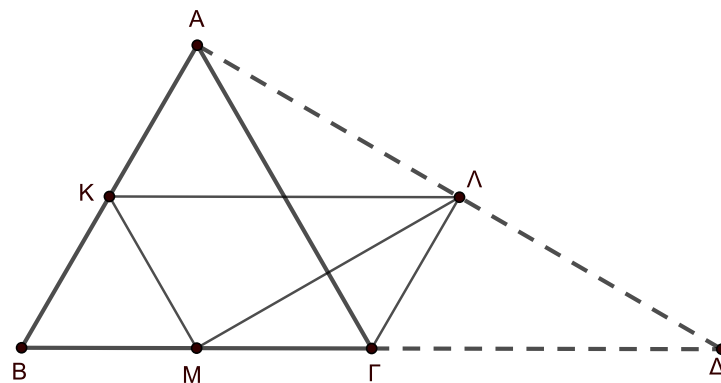
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAD .

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $K\Lambda\Gamma M$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο $KM\Lambda$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε το ύψος του AH κατά τμήμα $H\Delta=AH$ και τη διάμεσό του AM κατά τμήμα $ME=AM$. Να αποδείξετε ότι:

α)

i. $AB = \Gamma E$

ii. $AB = B\Delta$

(Μονάδες 8)

β) $\widehat{B\Delta} = \widehat{B\Gamma E}$

(Μονάδες 8)

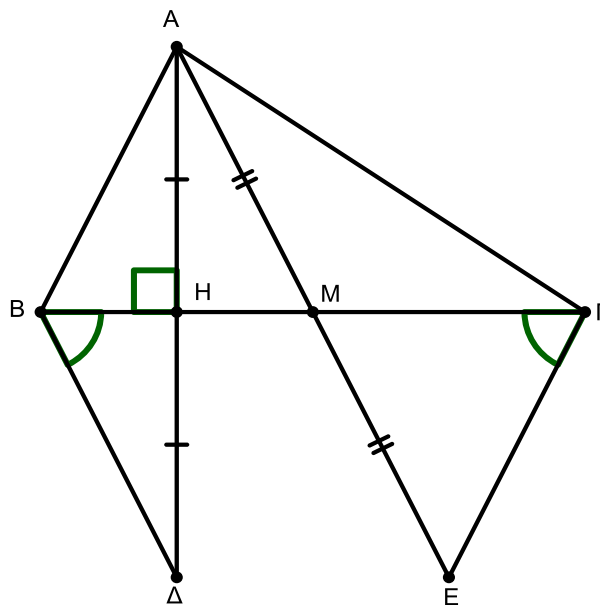
γ)

i. Εξετάστε αν το τμήμα $B\Delta$ μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα ΓE .

(Μονάδες 5)

ii. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου $B\Gamma E\Delta$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών του και το ύψος του AK . Αν Θ είναι το σημείο τομής των AZ και ΔE , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

ii. $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον είναι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, τότε:

i. να βρείτε τη γωνία $A\hat{Z}B$. (Μονάδες 5)

ii. να αποδείξετε ότι $BK = \frac{B\Gamma}{4}$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), και τυχαίο σημείο M της πλευράς $B\Gamma$. Από το σημείο M φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει τις ευθείες AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Θ αντίστοιχα. Αν $A\Delta$ και AH τα ύψη των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Theta E$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{\Delta A H} = 90^\circ$.

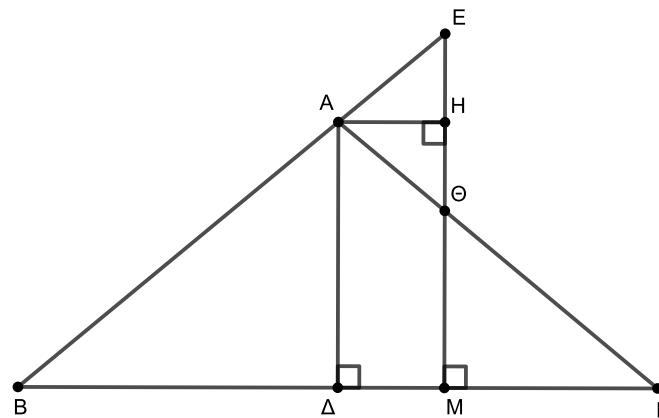
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $A\Theta E$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) $M\Theta + ME = 2A\Delta$.

(Μονάδες 9)



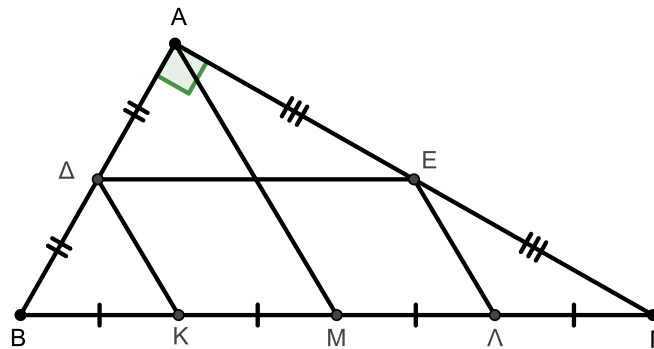
ΘΕΜΑ 4

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε τα σημεία K, M, Λ ώστε $BK=KM=M\Lambda=\Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $\Delta E \Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο $K\Delta AM$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με $\frac{3}{8} B\Gamma$.

(Μονάδες 12)



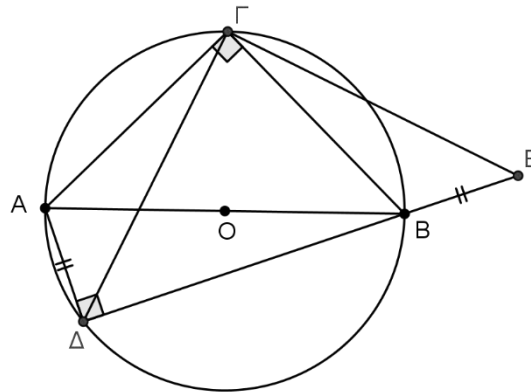
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος κέντρου O και διάμετρος του AB . Έστω Γ το μέσο ενός ημικυκλίου του, Δ τυχαίο σημείο του άλλου ημικυκλίου του και $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{A\Delta B} = 90^\circ$. Στην προέκταση της ΔB προς το μέρος του B θεωρούμε σημείο E ώστε $BE = A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. οι γωνίες $\widehat{\Gamma\Delta A}$ και $\widehat{\Gamma B E}$ είναι ίσες, (Μονάδες 6)
- ii. τα τρίγωνα $\Delta\Gamma A$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα, (Μονάδες 7)
- iii. η $\Gamma\Delta$ είναι κάθετη στην ΓE . (Μονάδες 6)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι αντιδιαμετρικό του Γ , η ΓE είναι εφαπτόμενη του κύκλου. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και E το μέσο του τόξου του $B\Gamma$. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο στο E . Οι προεκτάσεις των OB , OG (προς το B και το Γ αντίστοιχα) τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Z και H αντίστοιχα.

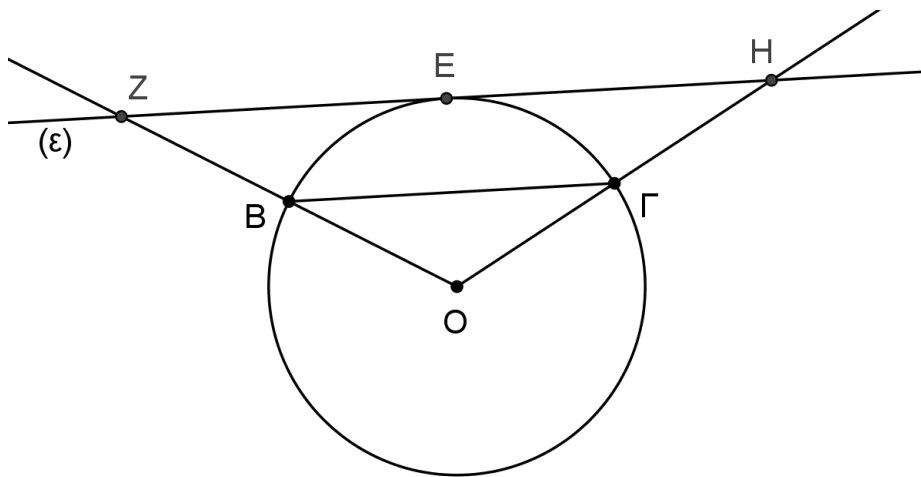
α) Να αποδείξετε ότι:

i. $B\Gamma \parallel (\varepsilon)$ (Μονάδες 9)

ii. $OZ = OH$ (Μονάδες 9)

β) Αν το σημείο B είναι το μέσο του OZ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ZOH .

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

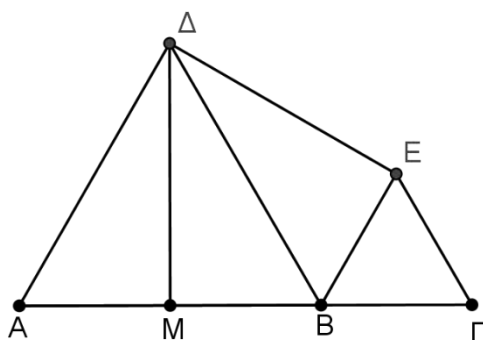
Έστω A, B και Γ συνευθειακά σημεία με $AB = 2BΓ$. Θεωρούμε το μέσο M της AB. Προς το ίδιο ημιεπίεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα AΔB και BEΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο AΔEB είναι τραπέζιο με βάσεις τα τμήματα AΔ και BE, (Μονάδες 9)

β) τα τρίγωνα ΔMB και ΔEB είναι ίσα, (Μονάδες 8)

γ) $\widehat{\Delta MB} + \widehat{\Delta EB} = 180^\circ$. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και AD , BE τα ύψη του.

Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = 2ED$,

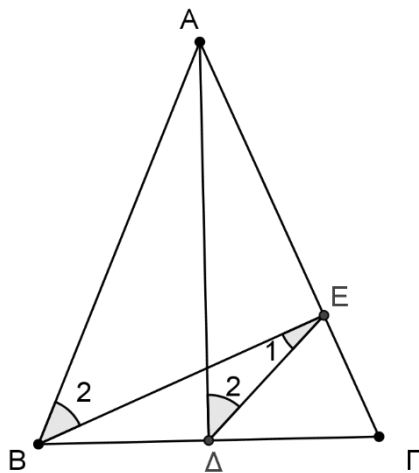
(Μονάδες 7)

β) $\hat{E}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$,

(Μονάδες 9)

γ) $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$

(Μονάδες 9)

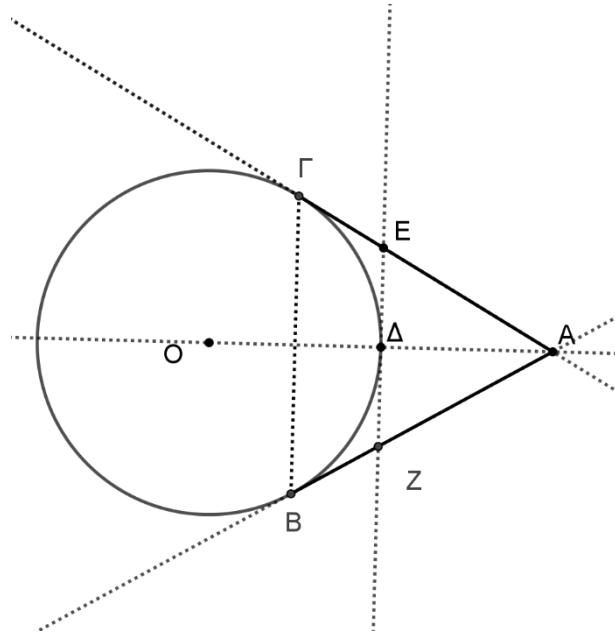


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος κέντρου O και ακτίνας ρ . Από σημείο A εξωτερικό του κύκλου θεωρούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου που εφάπτονται σε αυτόν στα σημεία B, Γ και τέτοιες ώστε, η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$ να είναι 60° . Έστω ότι η ευθεία AO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ και η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ τέμνει τα τμήματα AB και $A\Gamma$ στα σημεία Z και E αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $OA = 2\rho$, (Μονάδες 6)
- β) το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, (Μονάδες 5)
- γ) $AZ = 2ZB$, (Μονάδες 7)
- δ) το τετράπλευρο $EZB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

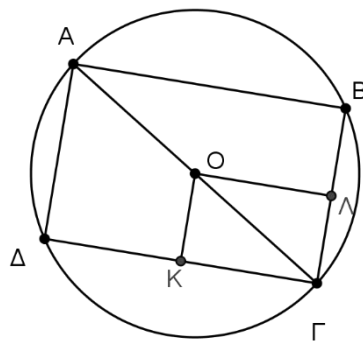


ΘΕΜΑ 4

Έστω κύκλος κέντρου O και AG μια διάμετρος του. Θεωρούμε δυο ίσες χορδές AD , $BΓ$ και χορδές $ΔΓ$, AB τέτοιες ώστε να είναι κάθετες στις AD , $BΓ$ αντίστοιχα. Έστω K και $Λ$ τα μέσα των χορδών $ΔΓ$ και $BΓ$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) οι χορδές AB και $ΔΓ$ είναι παράλληλες, (Μονάδες 7)
- β) το τετράπλευρο $ABΓΔ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 7)
- γ) η $BΔ$ είναι διάμετρος του κύκλου, (Μονάδες 6)
- δ) το τετράπλευρο $ΟΚΓΛ$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

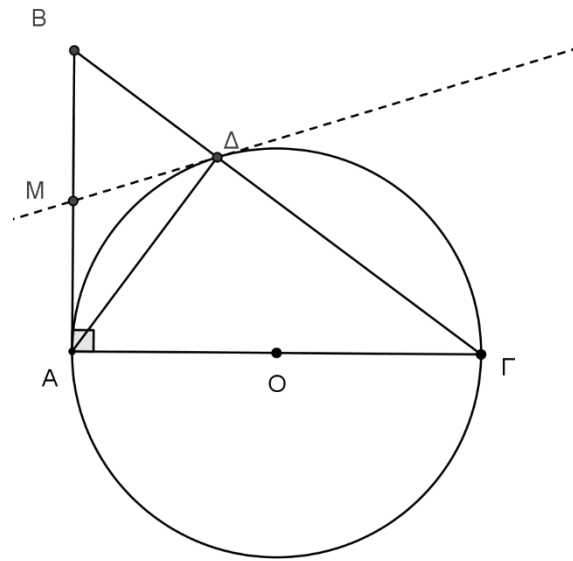
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διάμετρο την κάθετη πλευρά του $A\Gamma$ φέρουμε κύκλο κέντρου O , ο οποίος τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου σε σημείο Δ . Έστω ότι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά AB σε σημείο M .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{\Gamma\Delta A} = \hat{B}$, (Μονάδες 9)

β) $\hat{M\Delta B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΔMB είναι ισοσκελές, (Μονάδες 9)

γ) το M είναι το μέσο του AB . (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\Delta B\Gamma$ ($\hat{\Delta} = 90^\circ$) με τις κορυφές τους A και Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$ και το μέσο M της $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές,

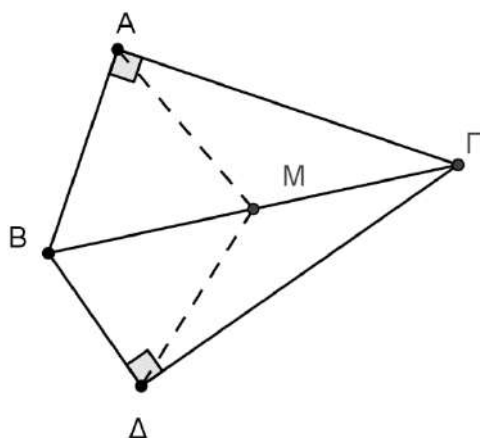
(Μονάδες 9)

β) $\hat{AM\Delta} = 2\hat{A\Gamma\Delta}$,

(Μονάδες 9)

γ) τα A , B , Δ και Γ είναι σημεία ενός κύκλου, τον οποίο και να κατασκευάσετε.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) φέρουμε το ύψος AD . Έστω K, Λ, M τα μέσα των $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $K\Lambda \parallel B\Gamma$ (Μονάδες 5)

β)

i. $M\Lambda = K\Delta$ (Μονάδες 6)

ii. Το τετράπλευρο $K\Lambda M\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Οι γωνίες $\widehat{K\Delta\Lambda}$ και $\widehat{K\hat{M}\Lambda}$ είναι ίσες. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2AB$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και E το μέσο του τμήματος BD . Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την AG , η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z .

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ABE και $BZ\Delta$ είναι ίσα, (Μονάδες 7)
- β) η AD είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}\Gamma$, (Μονάδες 9)
- γ) το τετράπλευρο $ADEZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} < \hat{\Gamma}$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ αντίστοιχα. Έστω H η προβολή της κορυφής Γ πάνω στην πλευρά AB .

Να αποδείξετε ότι:

α) $HE = E\Gamma$ και $HZ = Z\Gamma$, (Μονάδες 8)

β) το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 8)

γ) $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος (O,R) και μία ευθεία $\chi\chi$ η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο A . Θεωρούμε τυχαίο σημείο M της ημιευθείας $A\chi$. Αν για κάποιο σημείο B του κύκλου ισχύει η σχέση $MA = MB$, να αποδείξετε ότι:

α) το MB είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O,R) (Μονάδες 9)

β) η διχοτόμος της γωνίας $BM\chi$ είναι κάθετη στη MO , (Μονάδες 9)

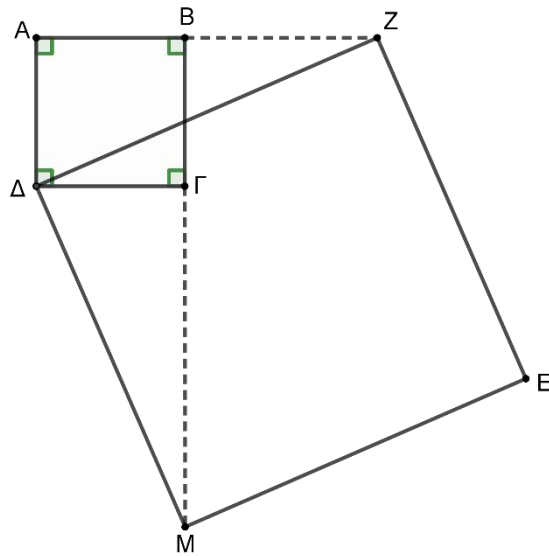
γ) το ευθύγραμμο τμήμα OB τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $BM\chi$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το B κατά τμήμα BZ και την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma M = AZ$. Θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔMEZ να είναι παραλληλόγραμμο.

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $\Gamma\Delta M$ είναι ίσα και οι γωνίες $\widehat{AZ\Delta}$ και $\widehat{M\Gamma\Delta}$ είναι ίσες, (Μονάδες 9)
- β) το τετράπλευρο ΔMEZ είναι τετράγωνο, (Μονάδες 9)
- γ) οι γωνίες $\widehat{BZE}$ και $\widehat{E\hat{M}B}$ είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

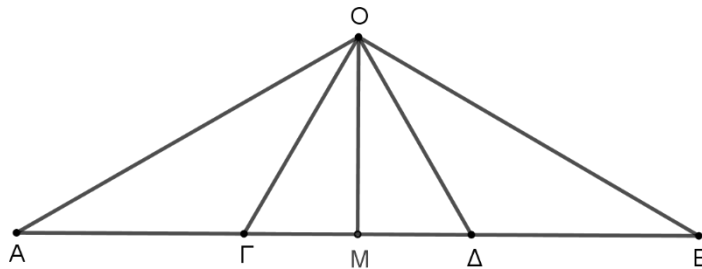
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία Γ, Δ ώστε να ισχύει $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$. Επίσης θεωρούμε σημείο O εκτός του ευθυγράμμου τμήματος AB έτσι ώστε να ισχύουν $O\Gamma = A\Gamma$ και $O\Delta = \Delta B$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η γωνία $\widehat{\Gamma O \Delta}$ είναι 60° , (Μονάδες 9)
- ii. οι γωνίες $\widehat{O \hat{A} \Gamma}$, $\widehat{O \hat{B} \Delta}$ είναι ίσες και κάθε μία ίση με 30° . (Μονάδες 9)

β) Αν M το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος AB , να αποδείξετε ότι $2OM = OA$.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

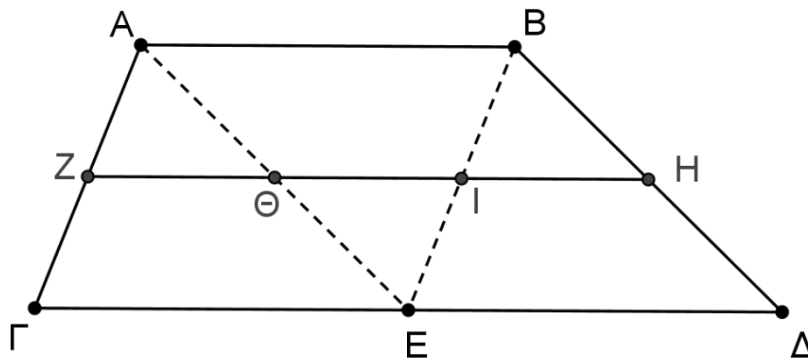
Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $\Gamma\Delta = 2AB$. Επίσης, τα σημεία Z , H και E είναι τα μέσα των $A\Delta$, $B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Ακόμη η ZH τέμνει τις AE , BE στα σημεία Θ , I αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι:

i. τα σημεία Θ , I είναι μέσα των AE , BE αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

ii. $ZH = \frac{3}{2}AB$. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

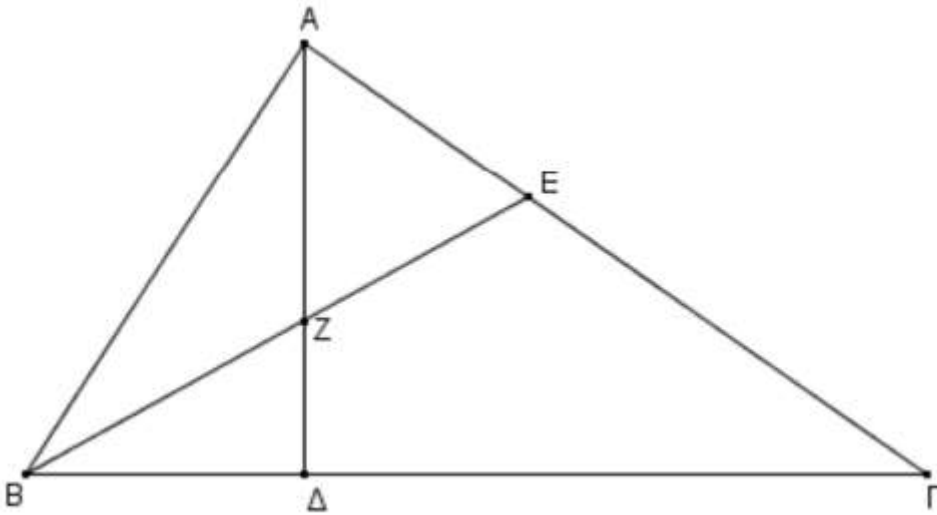
Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και έστω AD ύψος και BE διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο Z .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\hat{B} = 60^\circ$ και $AZ=BZ$, (Μονάδες 10)

ii. $AD = \frac{3}{2}BZ$ (Μονάδες 8)

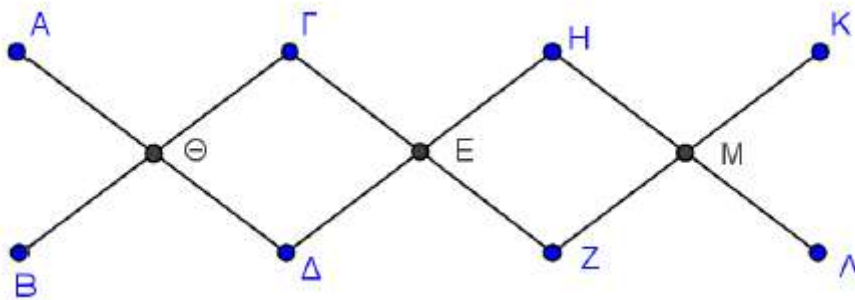
β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου ($ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ$) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά ($Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ$). Αν το σημείο $Θ$, είναι μέσο των τμημάτων $ΑΔ$ και $ΒΓ$ ενώ το σημείο $Ε$ είναι μέσο των τμημάτων $ΓΖ$ και $ΔΗ$, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $ΓΗΖΔ$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)
- β) Τα σημεία $Β, Δ, Ζ$ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)
- γ) Το τετράπλευρο $ΑΓΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθεία (ϵ) και δυο σημεία A, B εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ϵ). Φέρουμε AD, BG κάθετες στην (ϵ) και M, N μέσα των AB και GD αντίστοιχα.

α) Αν τα A, B είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την (ϵ),

- i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο $ABGD$ είναι παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

1) $AD < BG$ (Μονάδες 5)

2) $AD = BG$ (Μονάδες 5)

- ii. να εκφράσετε το τμήμα MN σε σχέση με τα τμήματα AD, BG στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. (Μονάδες 6)

β) Αν η ευθεία (ϵ) τέμνει το τμήμα AB στο μέσο του M , να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $ABGD$ (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο), αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE που τέμνονται στο σημείο H και το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

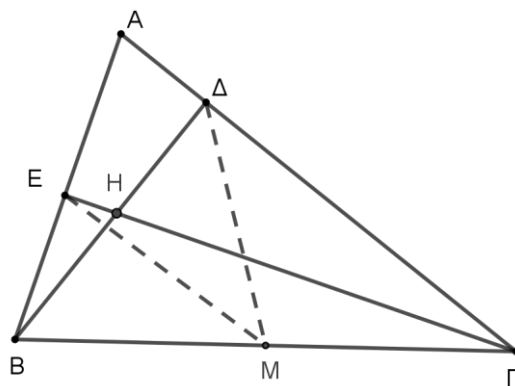
i. $M\Delta = ME$, (Μονάδες 10)

ii. η ευθεία AH τέμνει κάθετα τη $B\Gamma$ και ότι $\widehat{A\hat{H}\Delta} = \hat{\Gamma}$, όπου $\hat{\Gamma}$ η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου ABH .

(Μονάδες 10)

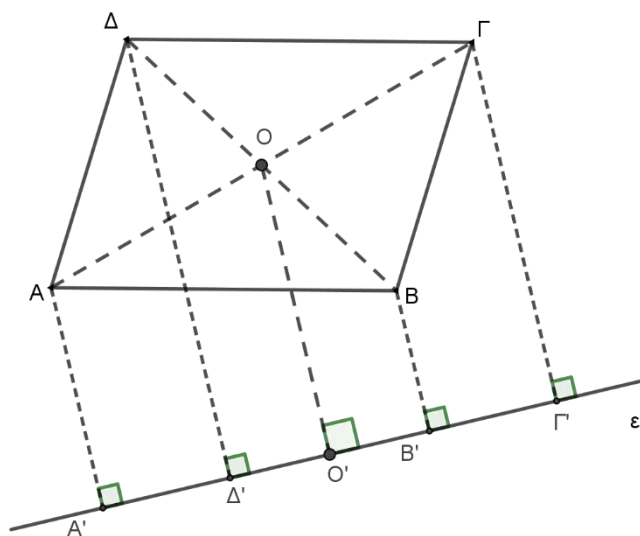


ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τις προβολές A' , B' , Γ' , Δ' και O' των κορυφών του A , B , Γ , Δ και του κέντρου του O αντίστοιχα, σε μία ευθεία ϵ .

α) Αν η ευθεία (ϵ) αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο (όπως στο σχήμα που ακολουθεί) και είναι $AA' = 3$, $BB' = 2$, $\Gamma\Gamma' = 5$, τότε:

- Να αποδείξετε ότι η απόσταση OO' του κέντρου O του παραλληλογράμμου από την (ϵ) είναι ίση με 4. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε την απόσταση $\Delta\Delta'$. (Μονάδες 9)



β) Αν η ευθεία (ϵ) διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

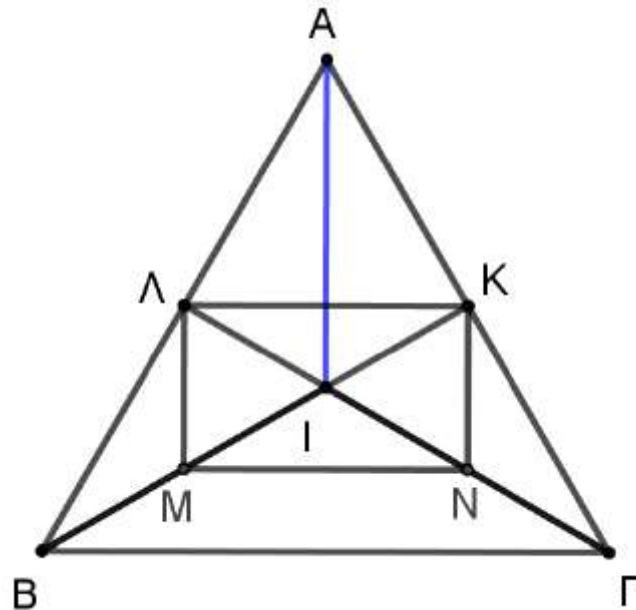
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BK και $\Gamma\Lambda$, τα οποία τέμνονται στο I .

Αν M και N είναι τα μέσα των IB και $I\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το AI προεκτεινόμενο διέρχεται από το , μέσο της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο $M\Lambda KN$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

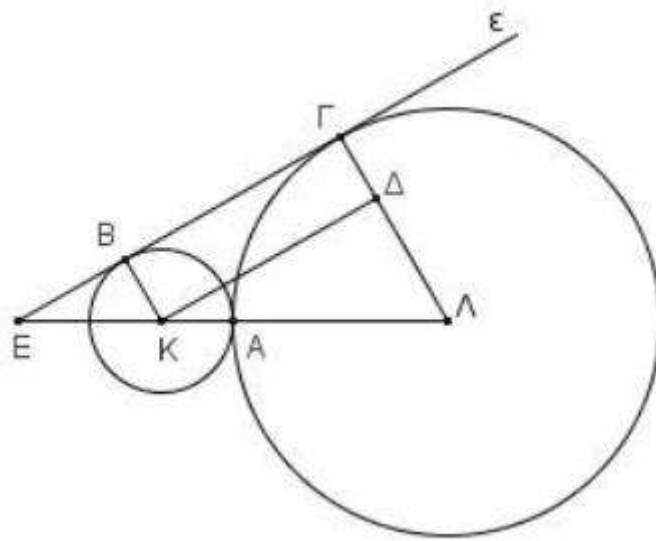


ΘΕΜΑ 4

Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Μία ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου $K\Lambda$ (προς το K) στο σημείο E . Φέρουμε από το σημείο K παράλληλο τμήμα στην (ε) που τέμνει το τμήμα $\Lambda\Gamma$ στο Δ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο, (Μονάδες 9)
- β) η γωνία $\Delta K\Lambda$ είναι 30° , (Μονάδες 8)
- γ) το τμήμα $E\Lambda = 6\rho$, όπου ρ η ακτίνα του κύκλου (K, ρ) . (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA .

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές, (Μονάδες 6)
- β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα, (Μονάδες 6)
- γ) η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $Z\Gamma$, (Μονάδες 6)
- δ) το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Έστω $AB\Gamma$ τρίγωνο και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$, τότε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π** αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την **αντίστροφη** πρόταση της **Π** και να αποδείξετε ότι ισχύει.

(Μονάδες 10)

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση **Π** και την **αντίστροφή της** ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξεία γωνία $\widehat{xOy}$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Ox στα σημεία K, A και στην Oy στα Λ, B αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AL=BK$,

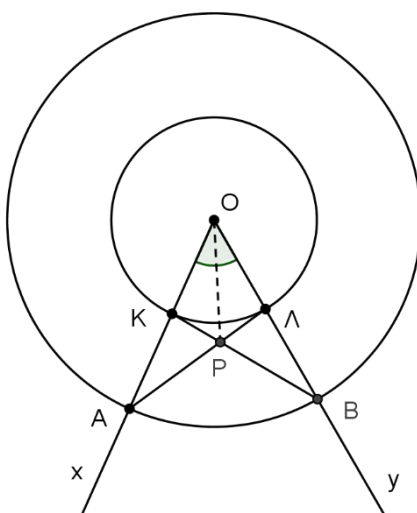
(Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής των AL και BK ,

(Μονάδες 8)

γ) η OP διχοτομεί την $\widehat{xOy}$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του ΓE . Στην προέκταση της ΓB (προς το μέρος του B) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$. Έστω ότι, η ευθεία ΔE τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και $Z\Theta \parallel B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο $A\Theta Z$ είναι ισοπλευρο.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Theta E Z$.

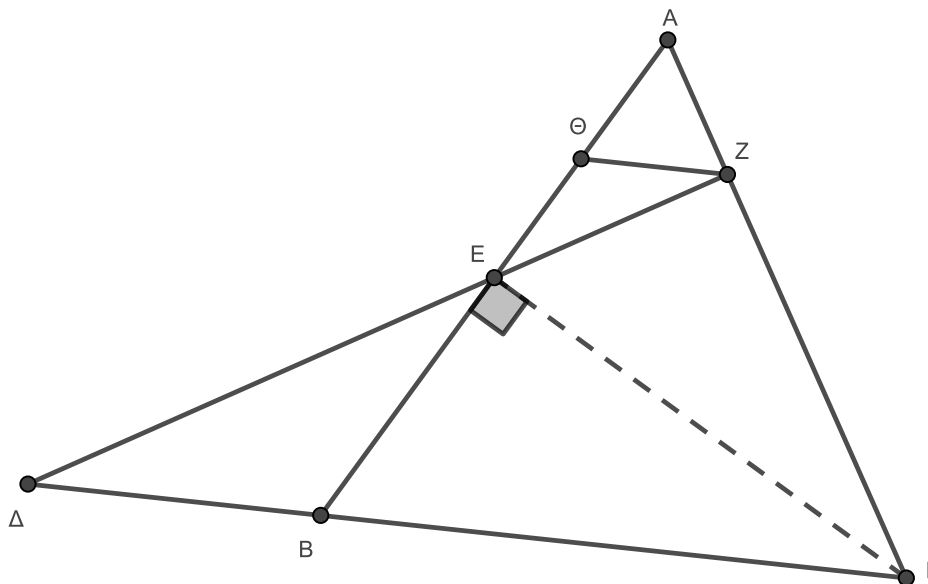
(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $AE = 2 \cdot \Theta Z$.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι $3 \cdot AB = 4 \cdot \Theta B$.

(Μονάδες 5)



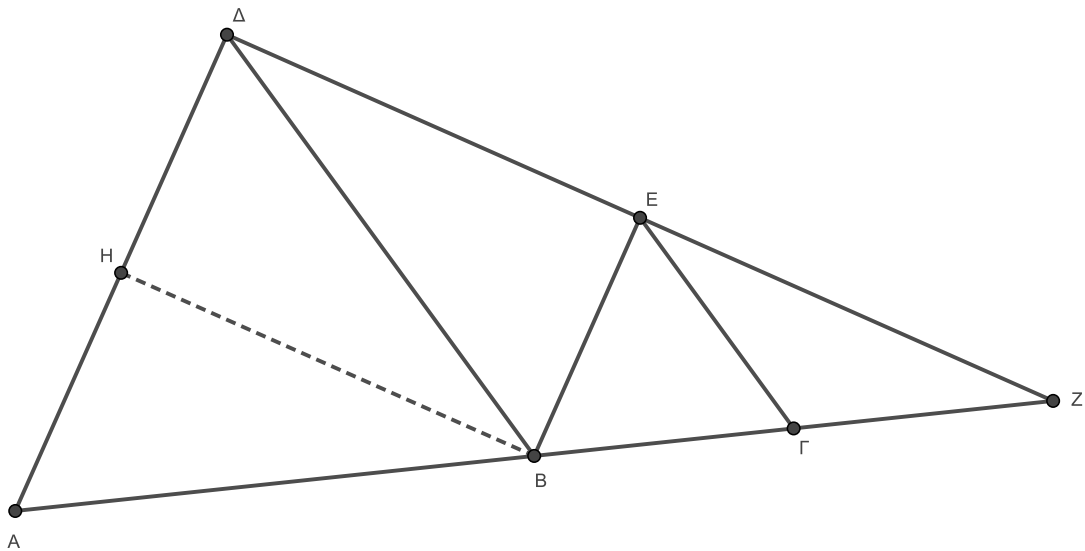
ΘΕΜΑ 4

Σε μια ευθεία (ϵ) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία A, B, Γ έτσι ώστε $AB = 2 \cdot B\Gamma$ και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$. Αν H είναι το μέσο του $A\Delta$ και η ευθεία ΔE τέμνει την ευθεία (ϵ) στο σημείο Z να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $BH\Delta E$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓZE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο $HE\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

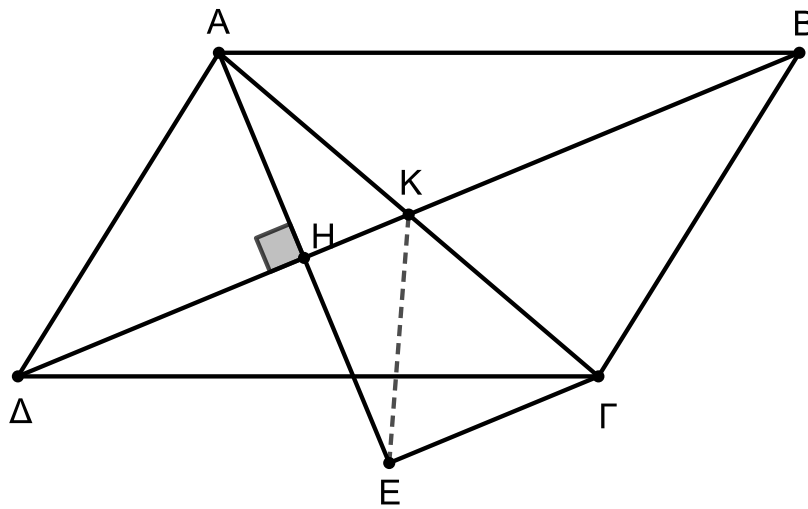
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και K το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε AH κάθετη στην $B\Delta$ και στην προέκταση της AH (προς το H) θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε:

$AH = HE$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο AKE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία $\hat{A}$ ορθή και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και σημείο E στην προέκταση της AB τέτοιο ώστε $BE = B\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $B\Delta E$.

(Μονάδες 9)

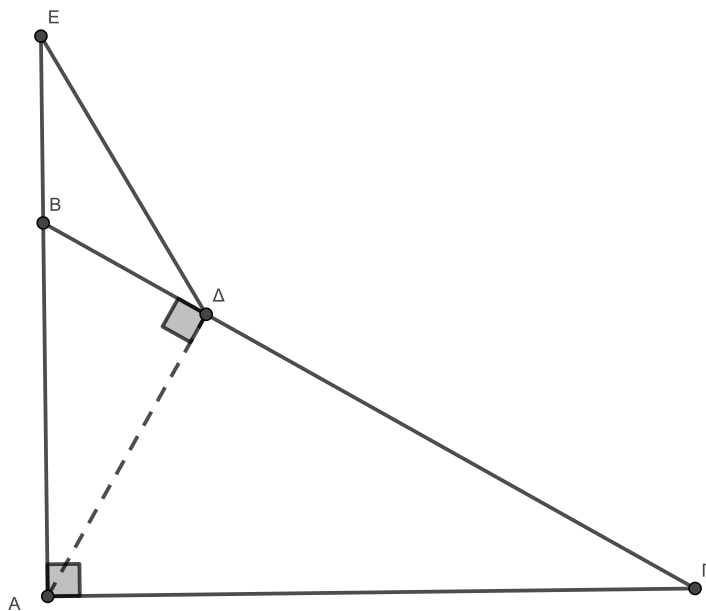
β) Να αποδείξετε ότι:

i. $BE = \frac{AB}{2}$.

(Μονάδες 8)

ii. $AE = \Gamma\Delta$.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

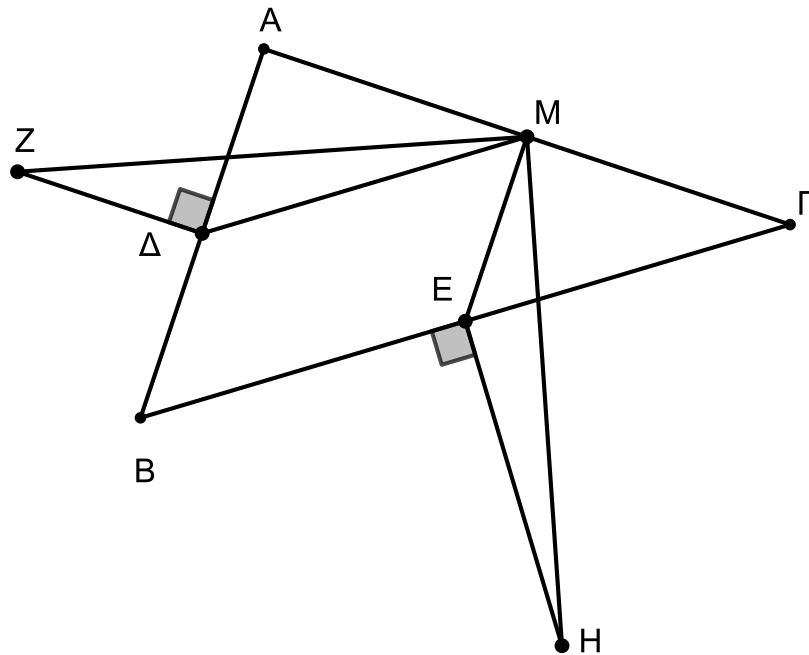
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες B και Γ οξείες και Δ , M και E τα μέσα των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των AB και $B\Gamma$ και εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$ θεωρούμε σημεία Z και H αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta Z = \frac{AB}{2}$ και $EH = \frac{B\Gamma}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τετράπλευρο $B\Delta ME$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)
- ii. Τα τρίγωνα $Z\Delta M$ και EMH είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν τα σημεία Z , Δ , E είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{A} = 90^\circ$.

(Μονάδες 10)



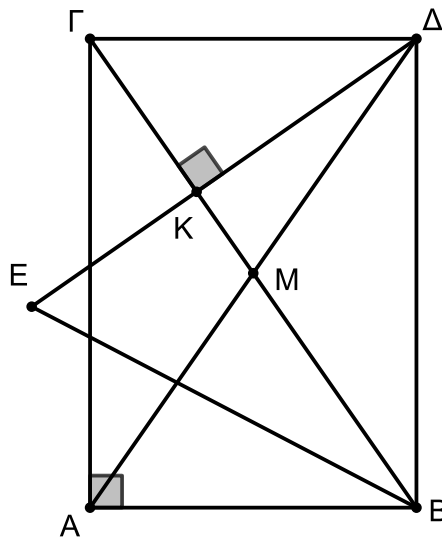
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Φέρουμε τη διάμεσο του AM την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του M) κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔK κάθετη στη $B\Gamma$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ στο E . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο (Μονάδες 8)

β) $\angle KEB = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$. (Μονάδες 8)

γ) $\Delta E = B\Delta$ (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ ισχύουν: $A\Delta = B\Gamma$, $A\Gamma = B\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AOB και $\Delta O\Gamma$ είναι ισοσκελή.

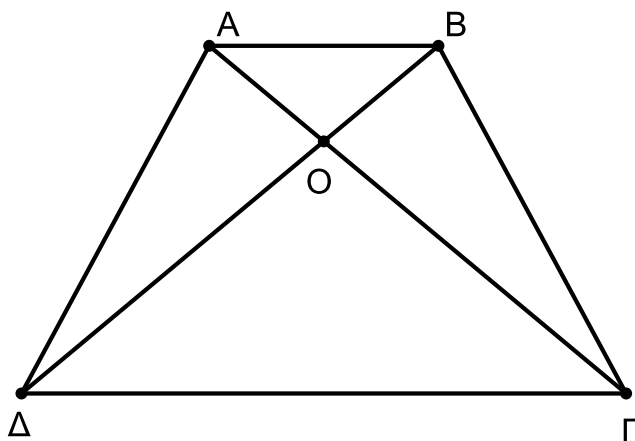
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Delta AB} = \widehat{A\Gamma B}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ με M και N τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E .

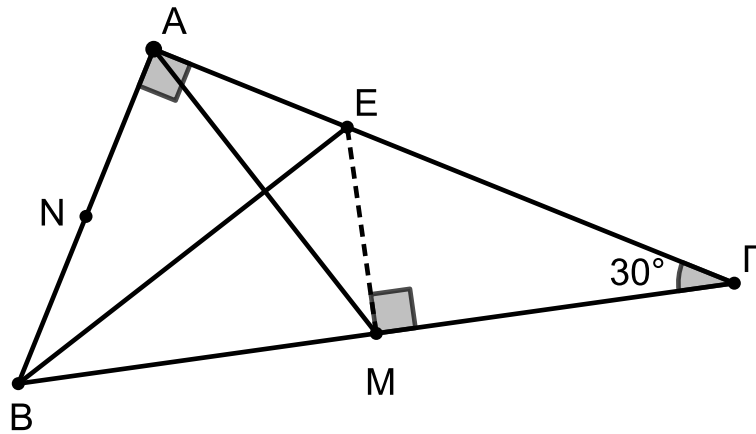
α) Να αποδείξετε ότι:

i) η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. (Μονάδες 6)

ii) $AE = \frac{\Gamma E}{2}$. (Μονάδες 6)

iii) η BE είναι μεσοκάθετος της διαμέσου AM . (Μονάδες 7)

β) Αν AD είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνει την BE στο H , να αποδείξετε ότι τα σημεία M , H και N είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)



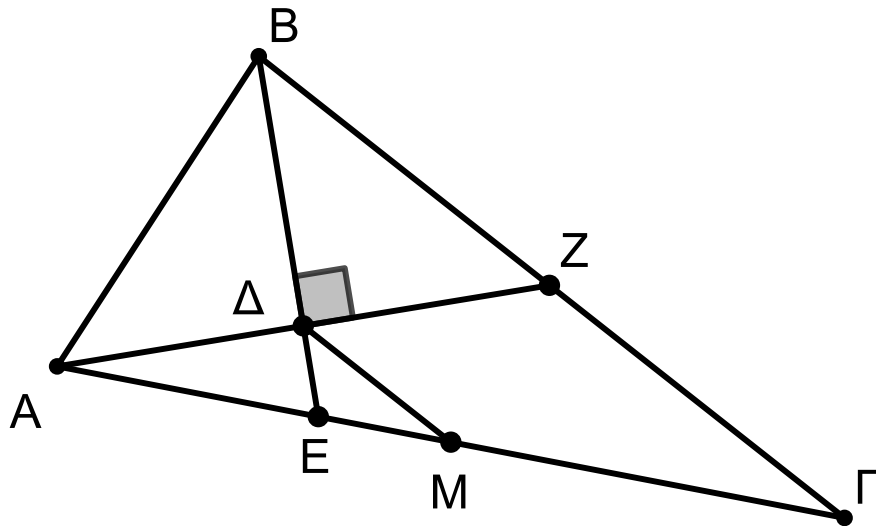
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < B\Gamma$ και η διχοτόμος BE της γωνίας $\widehat{B}$. Αν $AZ \perp BE$, όπου Z σημείο της $B\Gamma$ και M το μέσον της $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) $DM \parallel B\Gamma$ και $DM = \frac{B\Gamma - AB}{2}$. (Μονάδες 10)

γ) $\widehat{E\Delta M} = \frac{\widehat{B}}{2}$, όπου $\widehat{B}$ η γωνία του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)



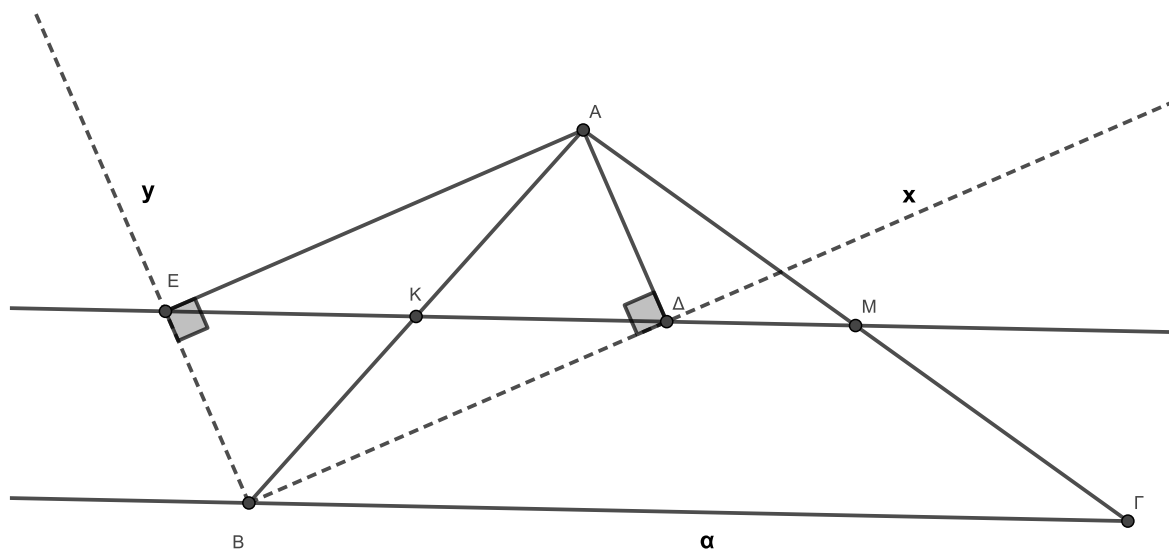
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος Bx της γωνίας $\widehat{B}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και η διχοτόμος By της εξωτερικής γωνίας $\widehat{B}$. Αν Δ και E είναι οι προβολές της κορυφής A του τριγώνου $AB\Gamma$ στην Bx και By αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $A\Delta BE$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) Η ευθεία ED είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$ και διέρχεται από το μέσο M της $A\Gamma$. (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3 \cdot \alpha}{4}$, όπου $\alpha = B\Gamma$. (Μονάδες 8)



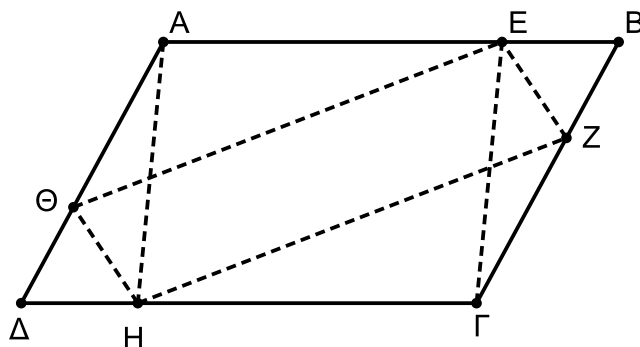
ΘΕΜΑ 4

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E, Z, H, Θ στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο. (6 μονάδες)

β) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο. (10 μονάδες)

γ) Τα τμήματα $A\Gamma, B\Delta, EH$ και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (9 μονάδες)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και σημεία K, Λ της διαγωνίου του $B\Delta$, τέτοια ώστε να ισχύει $BK = K\Lambda = \Lambda\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος, τότε και το $AK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου $AN\Gamma\Delta$, ώστε το $AK\Gamma\Lambda$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

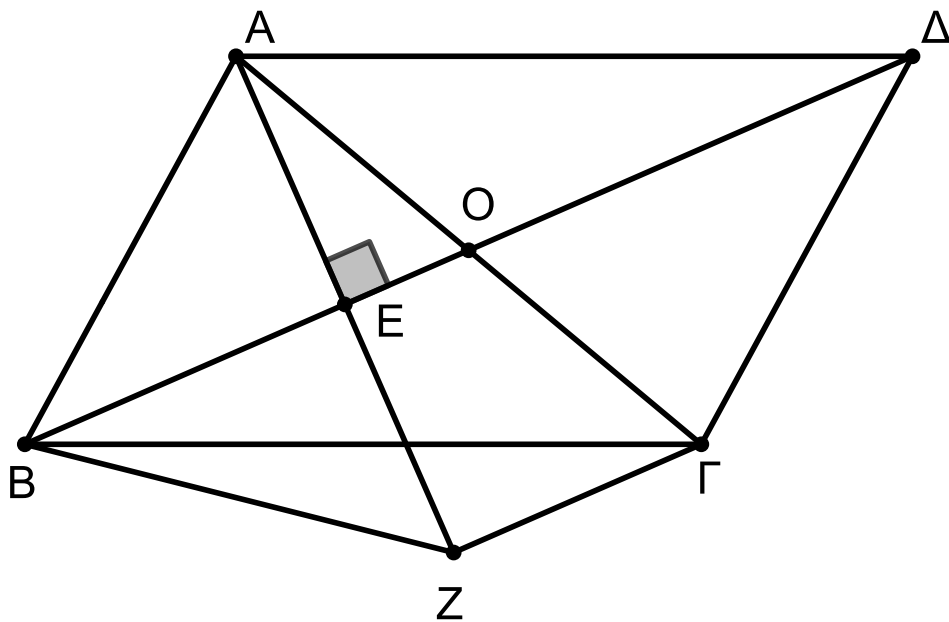
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB < A\Delta$ και έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων του $A\Gamma$ και $B\Delta$. Φέρνουμε την AE κάθετη στην διαγώνιο $B\Delta$. Αν το Z είναι το συμμετρικό του A ως προς την διαγώνιο $B\Delta$ και δεν συμπίπτει με το σημείο Γ , τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) $Z\Gamma = 2OE$. (Μονάδες 9)

γ) Το $B\Delta Z\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ = ΑΒ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα ΔΖ = ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)

ii. Τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε $ΚΛ \parallel ΔΒ$ και $ΚΛ = \frac{3}{2}ΔΒ$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

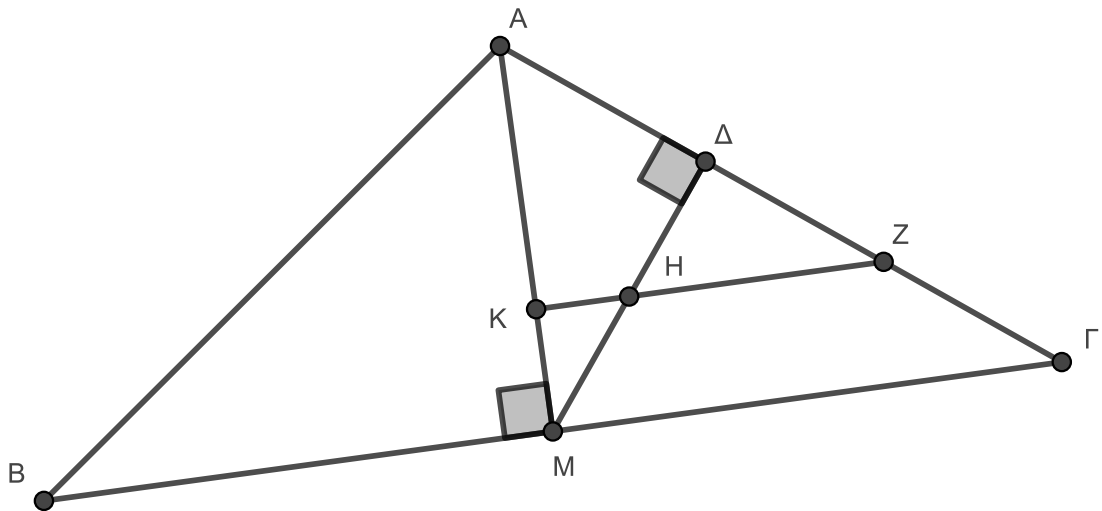
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του AM . Φέρουμε $M\Delta$ κάθετη στην $A\Gamma$ και θεωρούμε H το μέσο του τμήματος $M\Delta$. Από το H φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις AM και $A\Gamma$ στα σημεία K και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 9)

β) $MZ \parallel B\Delta$ (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία AH είναι κάθετη στη $B\Delta$. (Μονάδες 8)

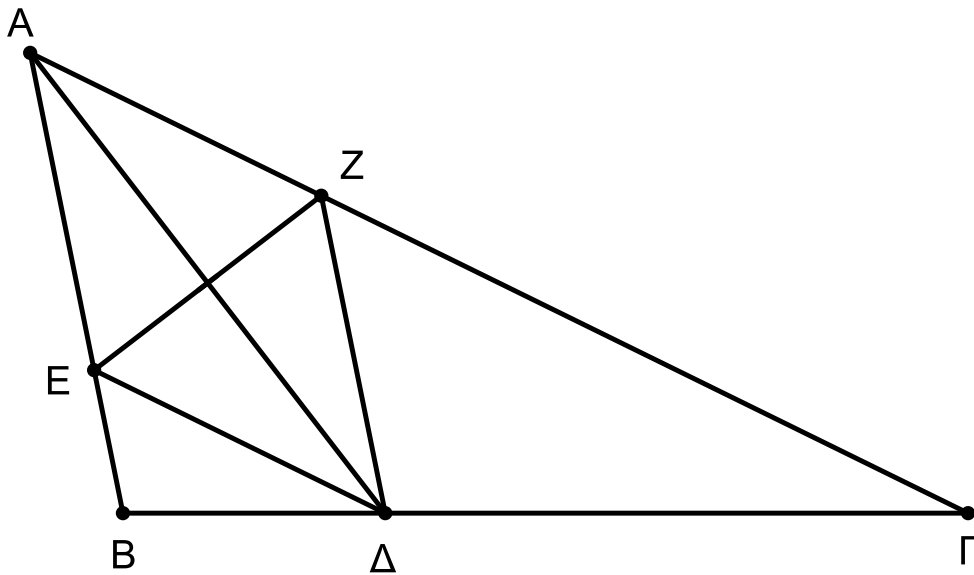


ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και AD η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει $AD = \Delta\Gamma$. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}B$ και η ΔZ παράλληλη στην AB .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα $E\Delta$ και $A\Gamma$ είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)
- β) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- γ) Τα τμήματα AD και EZ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνία $\widehat{B} = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη $A\Delta$ και ΓE που τέμνονται στο H . Φέρνουμε KZ διχοτόμο της γωνίας $\widehat{EHA}$ και ΘH κάθετο στο ύψος $A\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Για το τμήμα ZE ισχύει $ZH = 2EZ$.

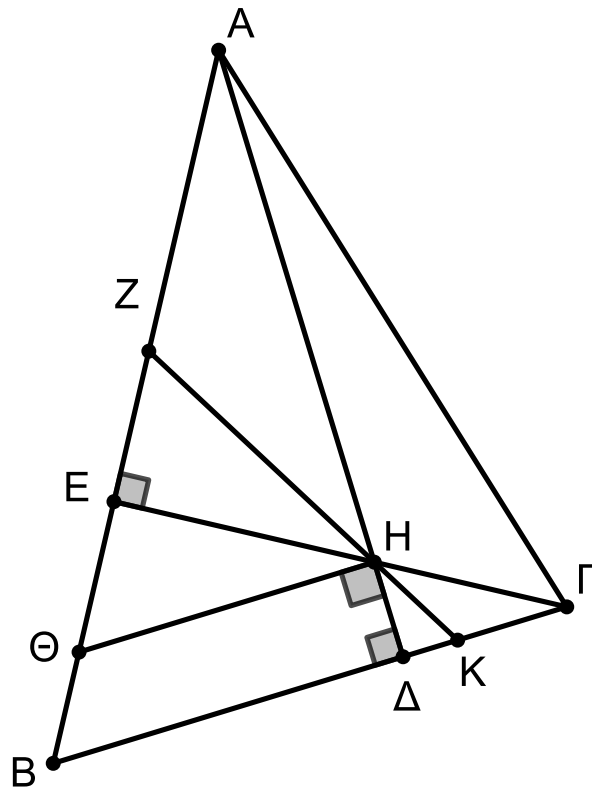
(Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΘZH είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΘHKB είναι ισοσκελές τραπέζιο.

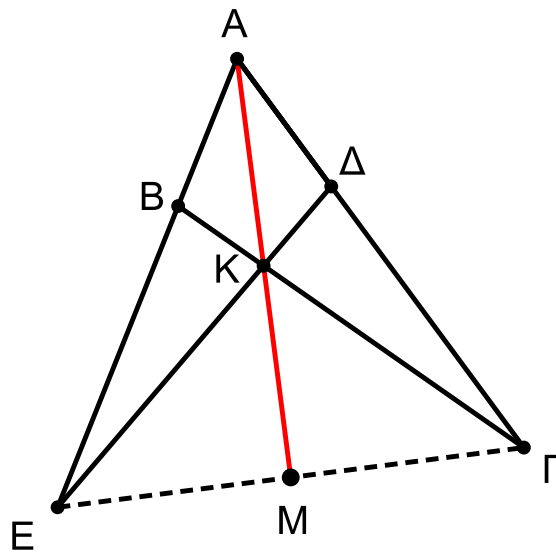
(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE = A\Gamma$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$. Αν τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και η προέκταση της AK τέμνει την $E\Gamma$ στο M , τότε να αποδείξετε ότι:

- α) $B\Gamma = \Delta E$ (Μονάδες 6)
- β) $BK = K\Delta$ (Μονάδες 7)
- γ) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A . (Μονάδες 6)
- δ) Η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

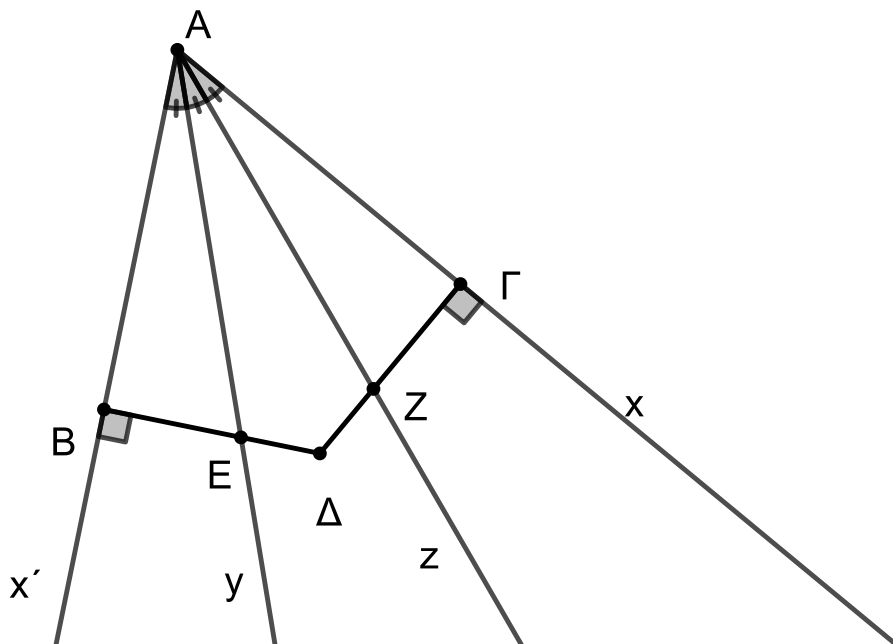
Στις πλευρές Ax' και Ax γωνίας $x'\hat{A}x$ θεωρούμε σημεία B και Γ ώστε $AB = A\Gamma$. Οι κάθετες στις Ax' και Ax στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο Δ .

Αν οι ημιευθείες Ay και Az χωρίζουν τη γωνία $x'\hat{A}x$ σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις $B\Delta$ και $\Delta\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο EAZ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το Δ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $x'\hat{A}x$. (Μονάδες 8)

γ) Οι γωνίες $\Gamma B\Delta$ και $\Gamma A\Delta$ είναι ίσες. (Μονάδες 9)



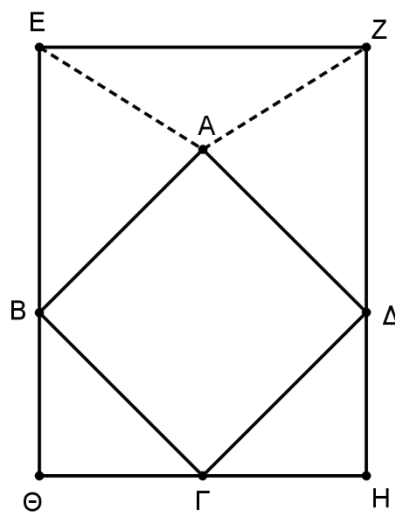
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο EZHΘ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Ένας παίκτης τοποθετεί μια μπάλα στο σημείο A το οποίο ανήκει στη μεσοκάθετη της EZ. Όταν ο παίκτης χτυπήσει τη μπάλα αυτή ακολουθεί τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$ χτυπώντας στους τοίχους του μπιλιάρδου ΕΘ, ΘΗ, ΖΗ διαδοχικά. Για τη διαδρομή αυτή ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ η γωνία $\widehat{ABE}$) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία $\widehat{B\Gamma\Theta}$) και η κάθε μια απ' αυτές είναι 45° .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα EAB και ZAD είναι ίσα. (Μονάδες 9)
- ii. Η διαδρομή ABΓΔ της μπάλας είναι τετράγωνο. (Μονάδες 8)

β) Αν η AZ είναι διπλάσια από την απόσταση του A από τον τοίχο EZ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου AEZ. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $\widehat{B} = 2 \cdot \widehat{\Gamma}$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{B}$, η οποία τέμνει το $\Delta\Gamma$ στο K και η κάθετη από το K προς το $B\Gamma$ το τέμνει στο M .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 10)

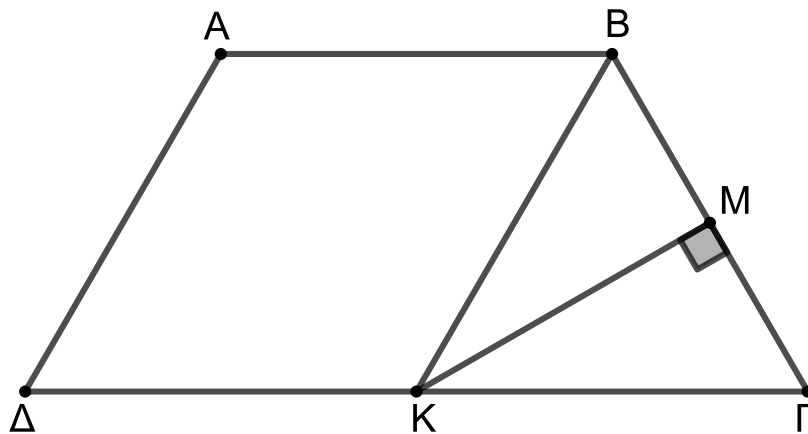
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

ii. Το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$.

(Μονάδες 7)

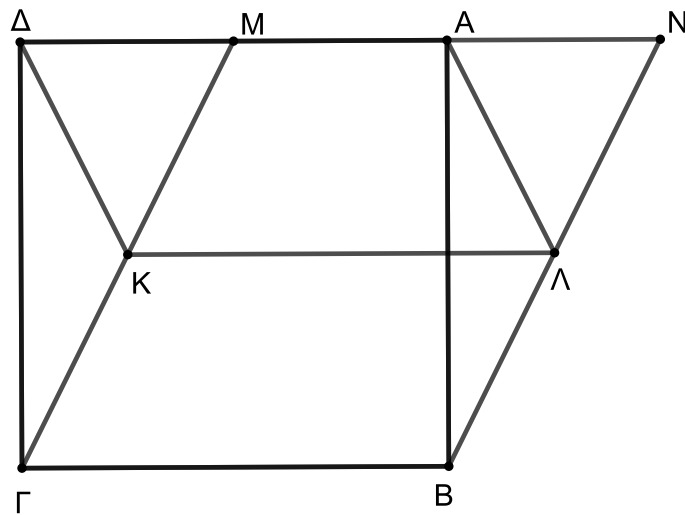


ΘΕΜΑ 4

Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς ΔA . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔA (προς την πλευρά του A) κατά τμήμα $AN = \frac{A\Delta}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓM και BN και θεωρούμε τα μέσα τους K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- β) Το τετράπλευρο $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
- γ) Το τετράπλευρο $AMK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ και $\widehat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε σημείο Z στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) τέτοιο ώστε $\Gamma Z = B\Gamma$. Αν E είναι σημείο της AB , τέτοιο ώστε $E\Gamma = \Gamma B$, να αποδείξετε ότι:

α) η γωνία BEZ είναι ορθή, (Μονάδες 8)

β) το τετράπλευρο $AE\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, (Μονάδες 8)

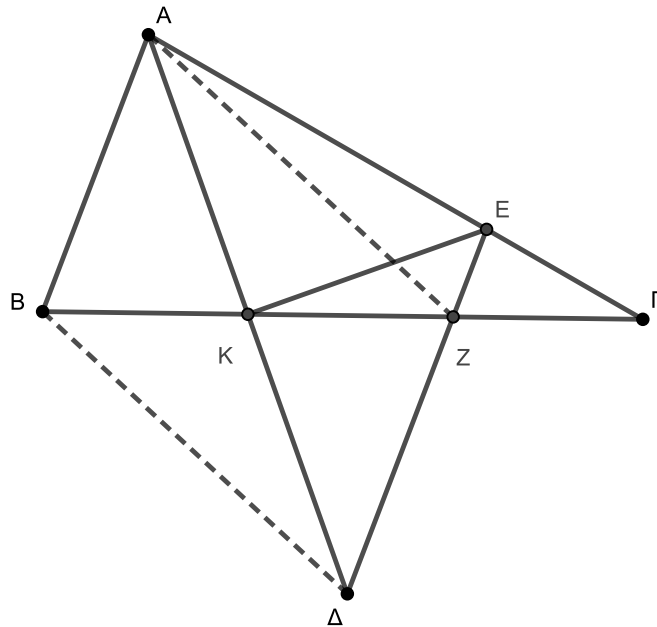
γ) το τετράπλευρο $A\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με AK διχοτόμο της γωνίας A . Στην προέκταση της AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- β) Η EK είναι μεσοκάθετος της AD . (Μονάδες 6)
- γ) Τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- δ) Το τετράπλευρο $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην προέκταση του ύψους του AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$.

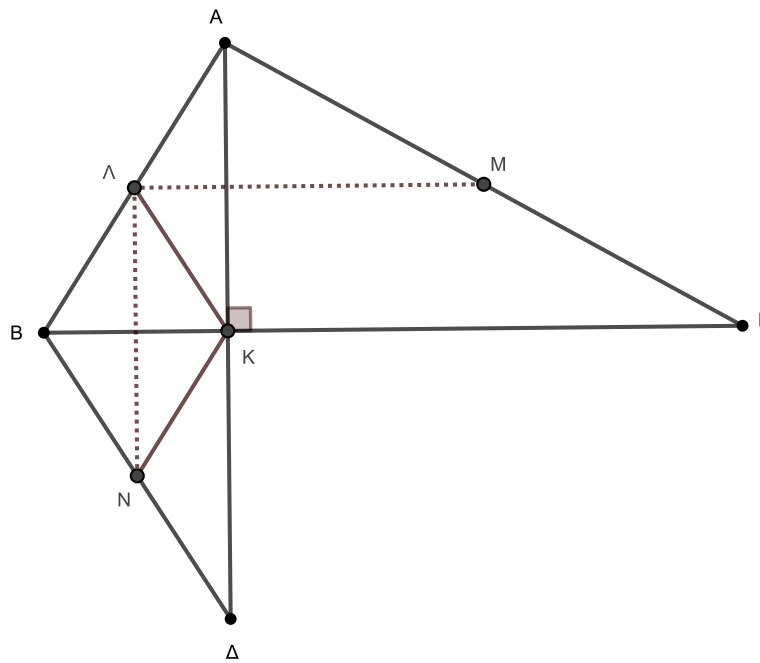
Έστω Λ , M , N τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο $B\Lambda K N$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ) $\Lambda M \perp \Lambda N$ (Μονάδες 9)



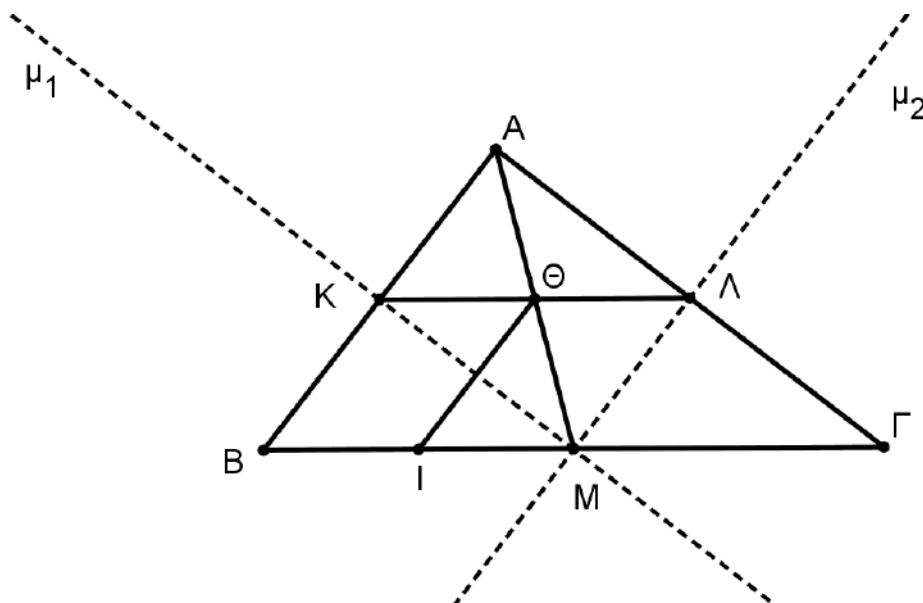
ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τις μεσοκαθέτους μ_1, μ_2 των πλευρών του AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνονται στο μέσο M της $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. (Μονάδες 5)
- ii. Το τετράπλευρο $ΑΛΜΚ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)
- iii. $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$, όπου Θ το σημείο τομής των AM και $ΚΛ$. (Μονάδες 6)

β) Αν I σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $BI = \frac{B\Gamma}{4}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Theta IB$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



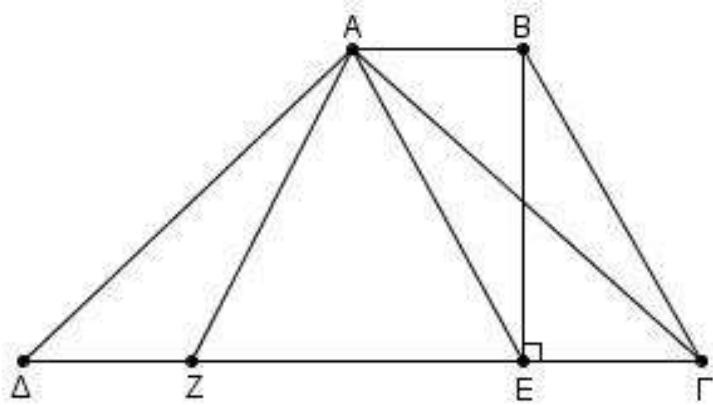
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma = 4AB$ και $B\Gamma = 2AB$. Θεωρούμε σημείο Z της $\Gamma\Delta$, ώστε $\Delta Z = AB$. Αν η γωνία Γ είναι 60° και BE το ύψος του τραpezίου, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ZAE είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Τα τρίγωνα ΔAZ και ΓAE είναι ίσα. (Μονάδες 9)

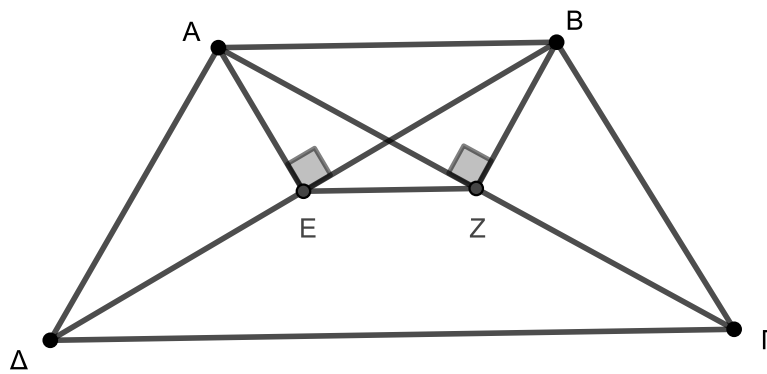


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma = AB$. Φέρουμε τμήματα AE και BZ κάθετα στις διαγώνιες $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα σημεία Z και E είναι μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)
- β) $AE = BZ$. (Μονάδες 8)
- γ) Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)
- δ) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ . (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

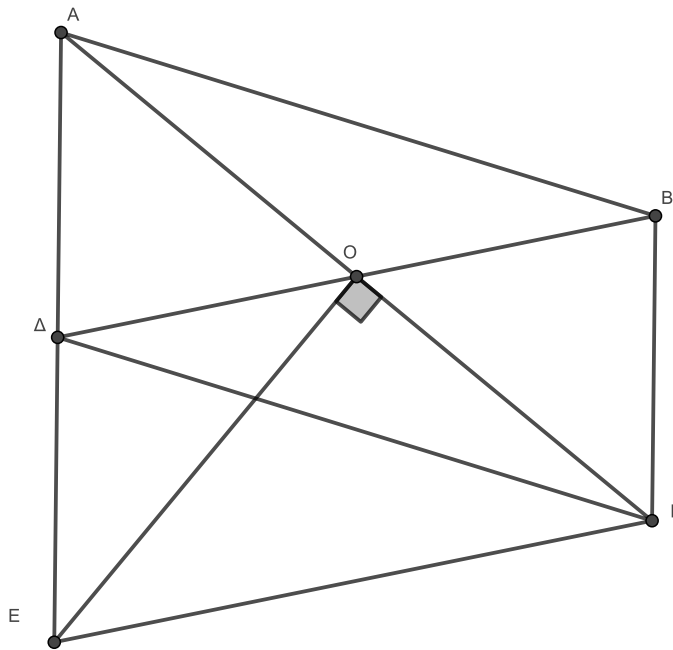
Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην $A\Gamma$ στο κέντρο του O , αυτή τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ σε σημείο E τέτοιο ώστε $DE=AD$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)



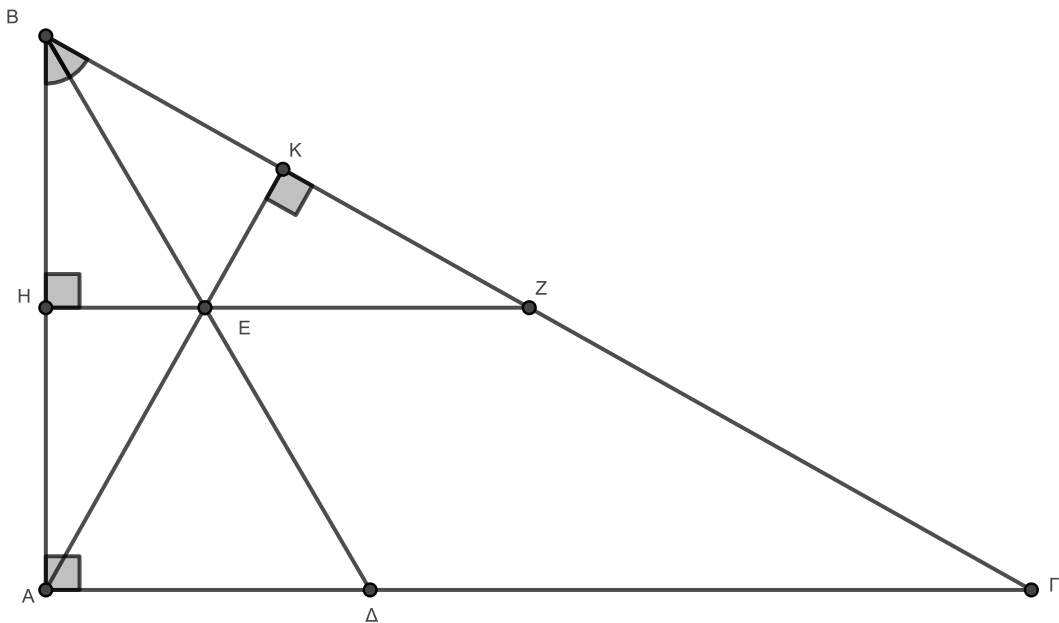
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Delta$ διχοτόμο και AK ύψος, που τέμνονται στο E .
Η κάθετη από το E στην AB τέμνει τις AB και $B\Gamma$ στα H και Z αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. τα τρίγωνα EHA και EKG είναι ίσα. (Μονάδες 6)
- ii. το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- iii. η $B\Delta$ είναι κάθετη στην AZ . (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η GE είναι διχοτόμος της γωνίας Γ . (Μονάδες 6)



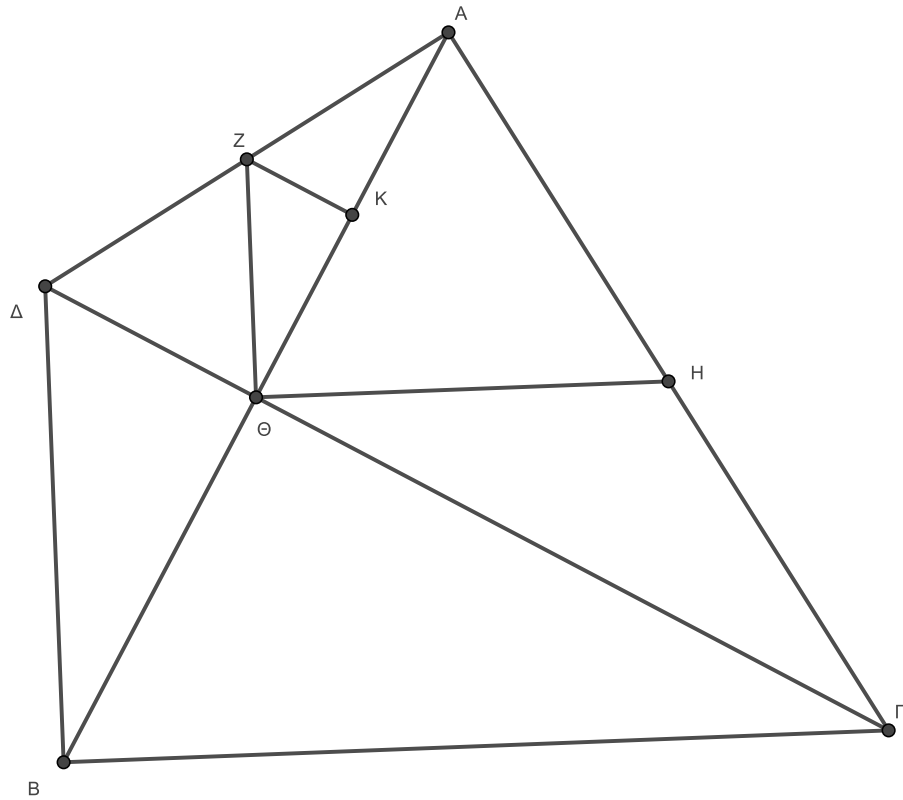
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Με βάση την AB κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta B$, εκτός του τριγώνου $AB\Gamma$, με γωνία $\widehat{\Delta} = 120^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Z και H των πλευρών $A\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η $\Delta\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του AB . (Μονάδες 8)

β) Αν η $\Delta\Gamma$ τέμνει την AB στο Θ , να αποδείξετε ότι η γωνία $Z\widehat{\Theta}H$ είναι ορθή. (Μονάδες 9)

γ) Αν η ZK είναι η κάθετη στην AB από το σημείο Z , να αποδείξετε ότι $ZK = \frac{A\Delta}{4}$. (Μονάδες 8)

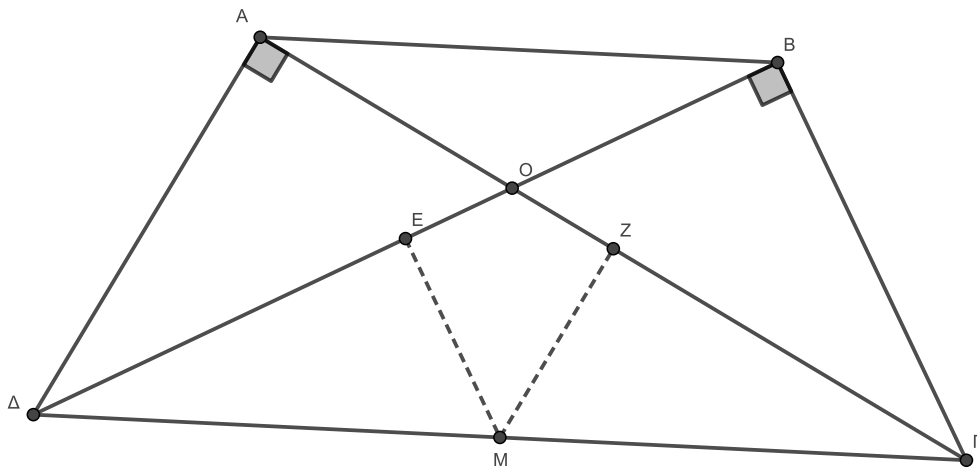


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην $A\Delta$ και η $B\Delta$ είναι κάθετη στην $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα M , E και Z των $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $ME = MZ$. (Μονάδες 6)
- β) Η MZ είναι κάθετη στην $A\Gamma$. (Μονάδες 6)
- γ) Τα τρίγωνα $M\Delta E$ και $M\Gamma Z$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- δ) Η OM είναι μεσοκάθετος του EZ . (Μονάδες 6)

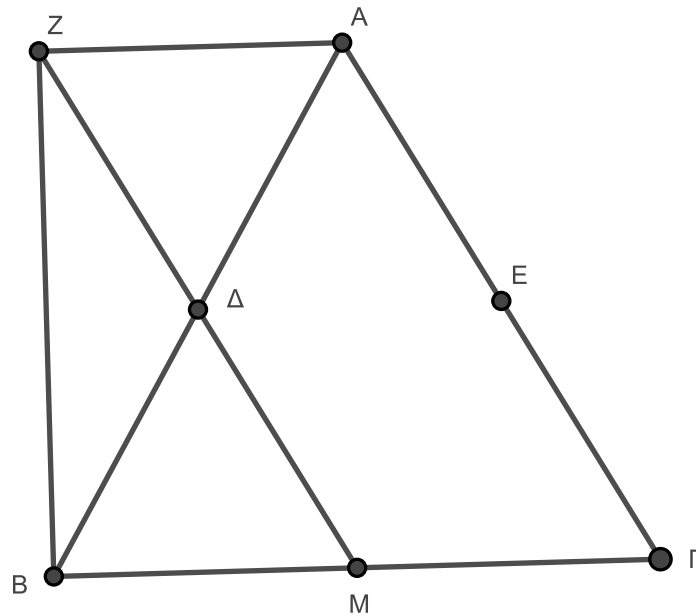


ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E και M των AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Στην προέκταση του $M\Delta$ (προς το Δ) θεωρούμε τμήμα $\Delta Z = \Delta M$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $BM\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 6)
- β) Το τετράπλευρο $ZA\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)
- γ) Τα τμήματα ZE και AD τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται. (Μονάδες 7)
- δ) Η BZ είναι κάθετη στη ZA . (Μονάδες 6)



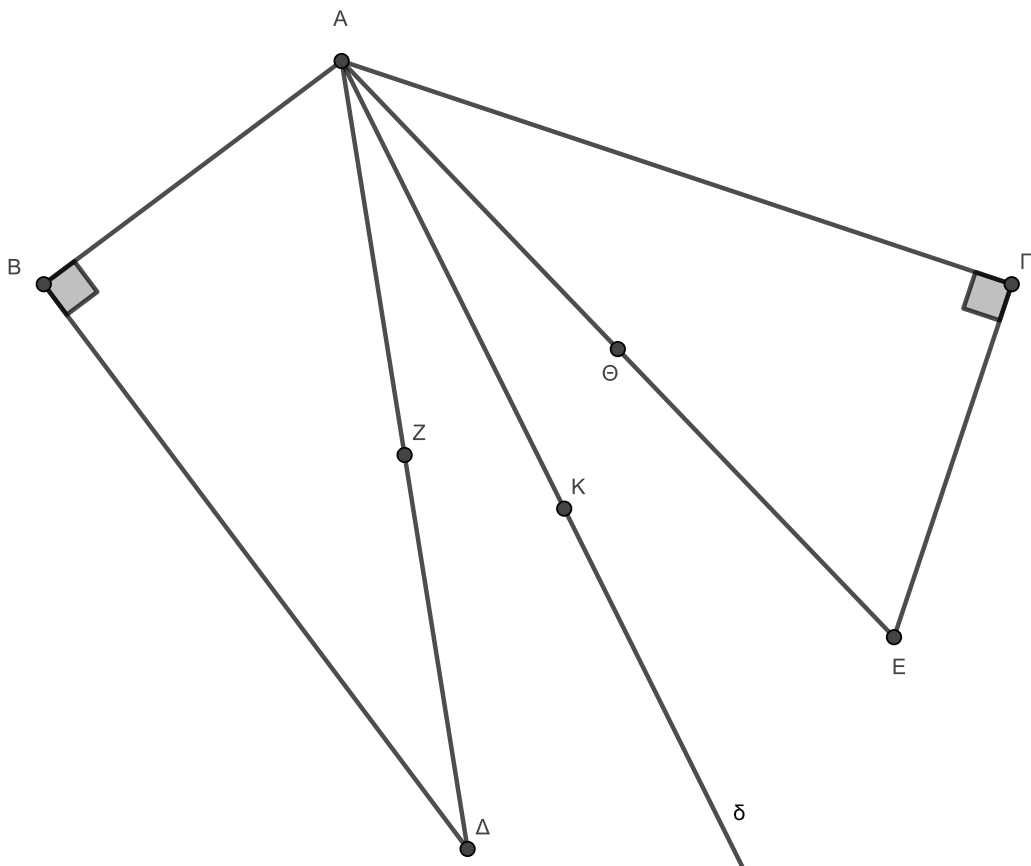
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα $B\Delta$ κάθετο στην AB με $B\Delta = A\Gamma$ και τμήμα ΓE κάθετο στην $A\Gamma$ με $\Gamma E = AB$. Θεωρούμε τα μέσα Z και Θ των $A\Delta$ και $A\Gamma$ καθώς και τη διχοτόμο $A\delta$ της γωνίας $\Delta\hat{A}E$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta = A\Gamma$. (Μονάδες 9)

β) Αν K τυχαίο σημείο της διχοτόμου $A\delta$, να αποδείξετε ότι ισαπέχει από τα μέσα Z και Θ . (Μονάδες 9)

γ) Αν το K είναι σημείο της διχοτόμου $A\delta$ τέτοιο ώστε $KZ = AZ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZK\Theta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Φέρνουμε τμήμα $A\Delta$ κάθετο στην AB και τμήμα AE κάθετο στην $A\Gamma$ με $A\Delta = AE$. Θεωρούμε τα μέσα Z , H και M των ΔB , $E\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $AE\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- ii. Το τρίγωνο ZAH είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- iii. Η AM είναι μεσοκάθετος του ZH . (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $AE\Gamma$ έγραψε τα εξής:

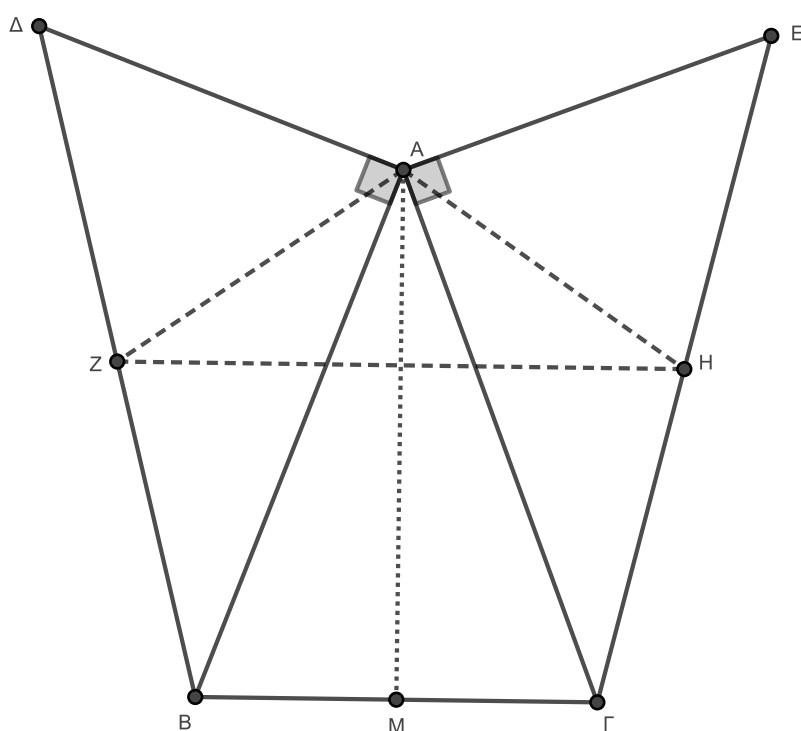
« 1. $A\Delta = AE$ από υπόθεση

2. $AB = A\Gamma$ πλευρές ισοσκελούς τριγώνου

3. $\widehat{\Delta AB} = \widehat{EAG}$ ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος. Μπορείς να το εντοπίσεις; (Μονάδες 5)

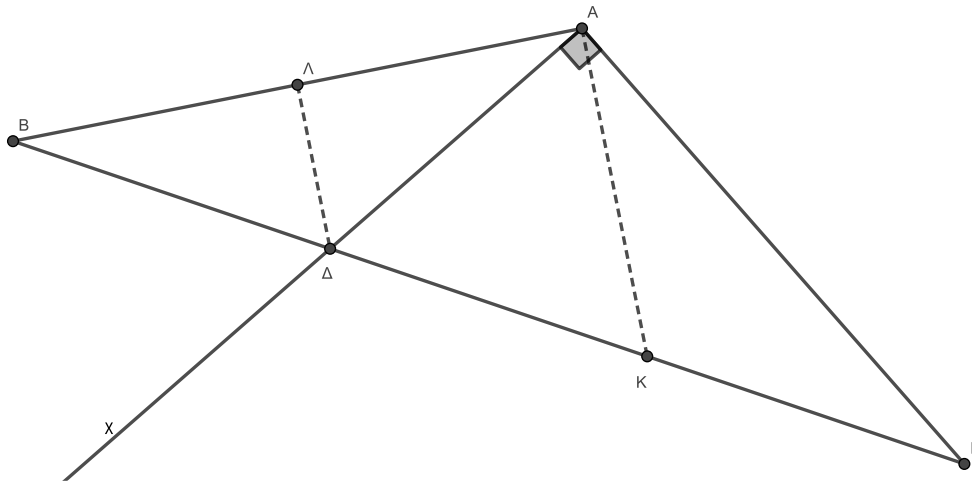


ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $ΒΑΓ$ με $\hat{A} = 120^\circ$. Φέρουμε ημιευθεία Ax κάθετη στην $ΑΓ$ στο A , η οποία τέμνει τη $ΒΓ$ στο Δ . Έστω Λ το μέσο του $ΑΒ$ και K το μέσο του $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $A\Delta B$ είναι ισοσκελές (Μονάδες 8)
- β) $\Delta\Gamma = 2 \cdot B\Delta$ (Μονάδες 8)
- γ) $\Lambda\Delta \parallel AK$ (Μονάδες 5)
- δ) $AK = 2 \cdot \Lambda\Delta$ (Μονάδες 4)



ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM τέτοια ώστε $AM=AB$. Φέρουμε το ύψος του AK και το προεκτείνουμε (προς το K) κατά τμήμα $K\Delta=AK$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά τμήμα $ME=AM$.

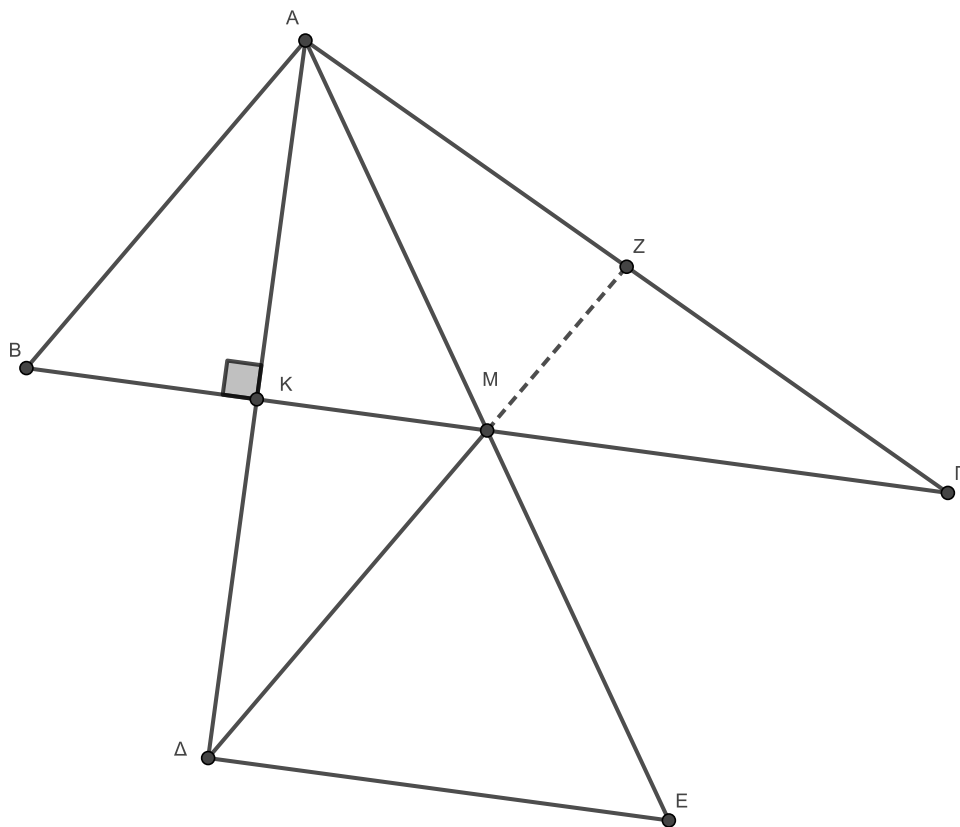
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E \perp A\Delta$ και $\Delta E=2KM$. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο $AB\Delta M$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)

δ) Η προέκταση της DM τέμνει το $A\Gamma$ στο μέσον του Z . (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

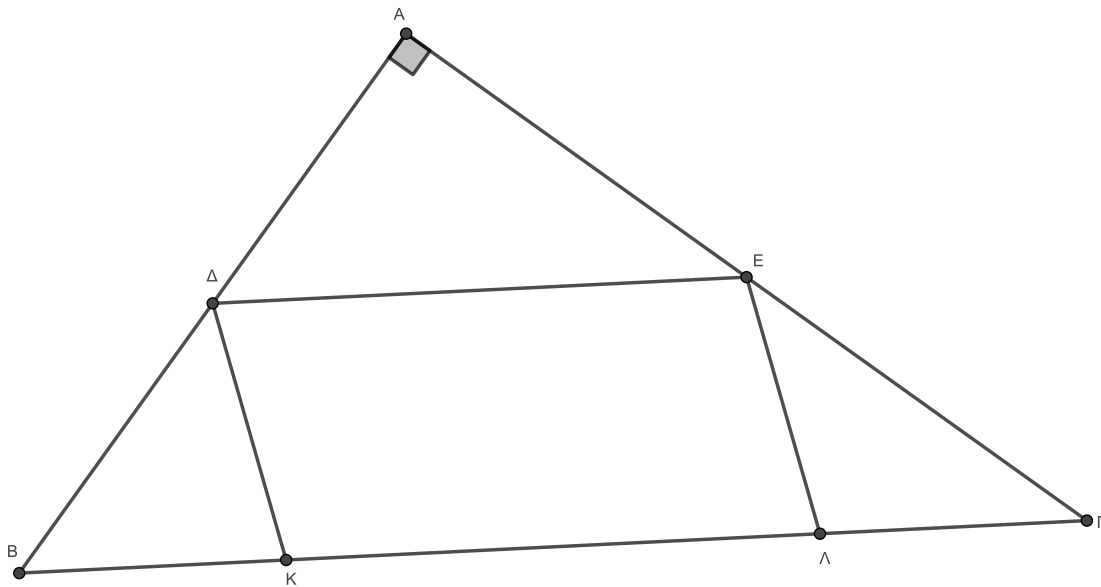
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 90^\circ$ και Δ και E τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στο τμήμα $B\Gamma$ θεωρούμε σημεία K και Λ ώστε $\Delta K = KB$ και $E\Lambda = \Lambda\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{\Delta K \Lambda} = 2 \cdot \widehat{B}$ και $\widehat{E \Lambda K} = 2 \cdot \widehat{\Gamma}$. (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο $\Delta E \Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) $\Delta E = 2 \cdot \Delta K$. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB > A\Gamma$), $A\Delta$ το ύψος του και M το μέσο του AB . Η προέκταση της $M\Delta$ τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = \hat{E}$.

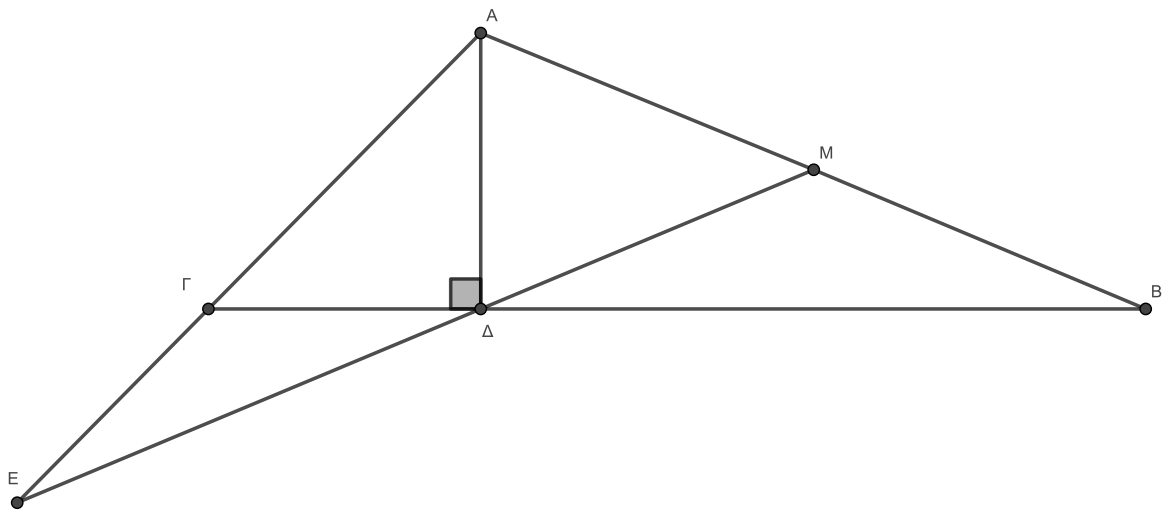
(Μονάδες 8)

β) $\hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{B} = \hat{A\hat{M}\Delta}$.

(Μονάδες 10)

γ) $\Gamma E < A\Gamma$.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, AD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και M το μέσον της AB . Η κάθετη από το M στην AD τέμνει το $A\Gamma$ στο E . Η παράλληλη από το B στο $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της AD στο K και την προέκταση της EM στο Λ .

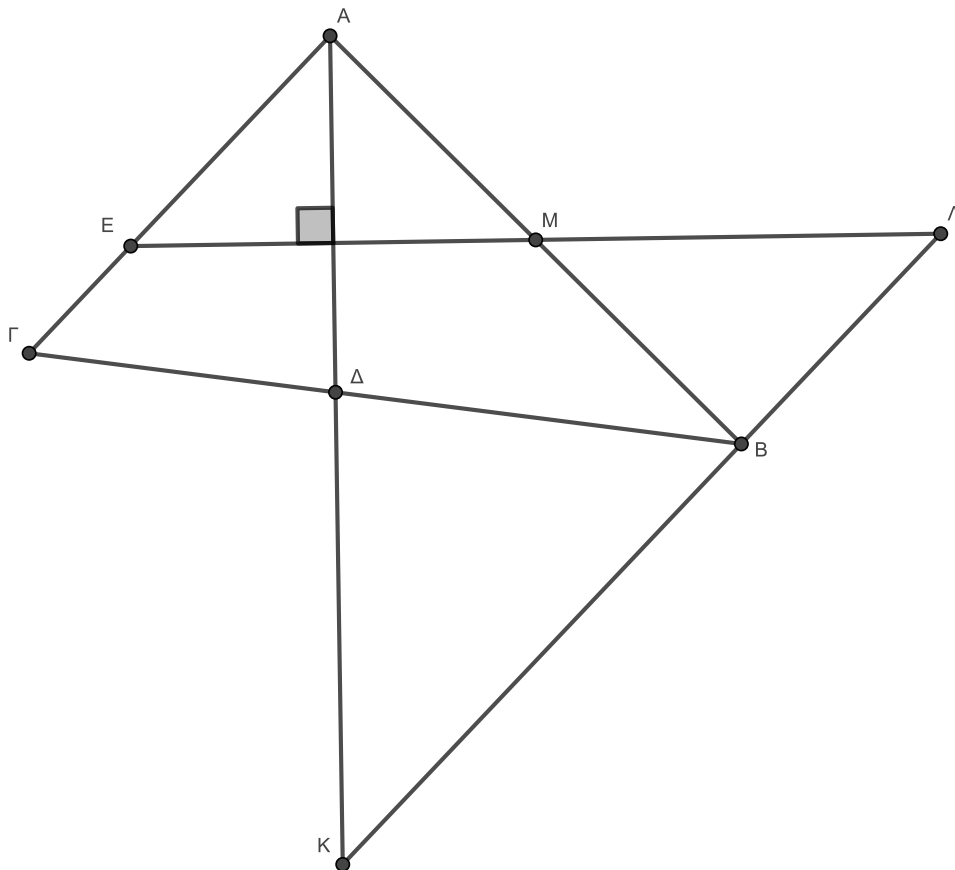
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα AEM , $MB\Lambda$ και ABK είναι ισοσκελή.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο $A\Lambda BE$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και AD διάμεσος. Στο τμήμα AD θεωρούμε τυχαίο σημείο K από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα KZ και KE κάθετα στις AB και AG αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $KB\Gamma$ και KZE είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ZE\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής στην πορεία της λύσης του έδωσε το εξής επιχείρημα:

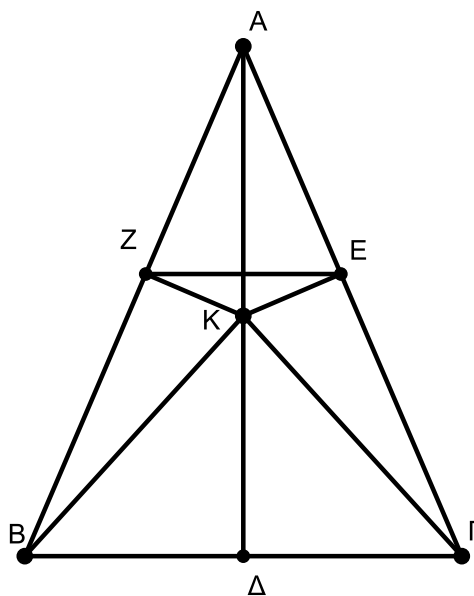
«Το τμήμα AD είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ και μεσοκάθετος του $B\Gamma$. Οπότε και το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα ABK , AGK έχουν:

1. $BK = K\Gamma$
2. $\hat{B}AK = \hat{G}AK$ επειδή AK διχοτόμος της $\hat{A}$.
3. $\hat{ABK} = \hat{AGK}$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία –Πλευρά- Γωνία διατηρώντας τις πλευρές BK και $K\Gamma$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ , E και Z είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) οι γωνίες $\widehat{H\Delta Z}$ και $\widehat{H\hat{E}Z}$ είναι ίσες . (Μονάδες 8)

γ) οι γωνίες $\widehat{E\hat{\Delta}Z}$ και $\widehat{E\hat{H}Z}$ είναι ίσες. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

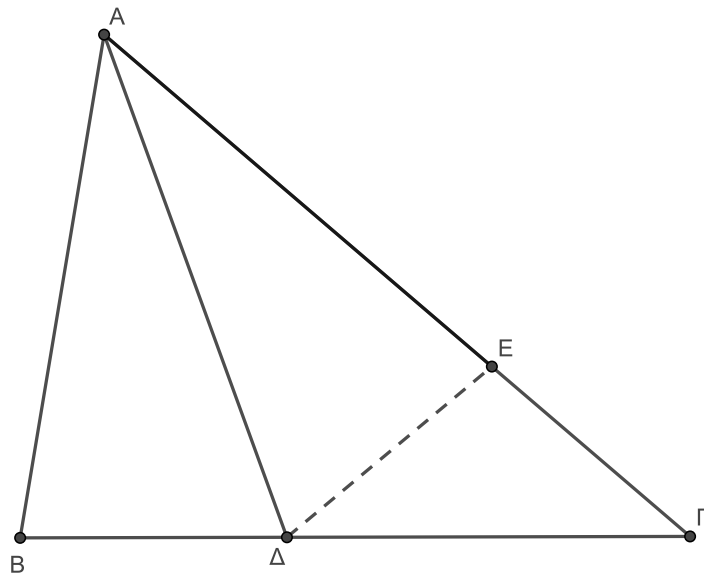
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = AB$.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος BE . (Μονάδες 9)

γ) αν το ύψος από την κορυφή B του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο H τότε η ευθεία EH είναι κάθετη στην AB . (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$ με $\Gamma\Delta = AB$ (A, Δ εκατέρωθεν της $B\Gamma$).

Να αποδείξετε ότι:

α) $AM \parallel \Gamma\Delta$.

(Μονάδες 6)

β) η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$.

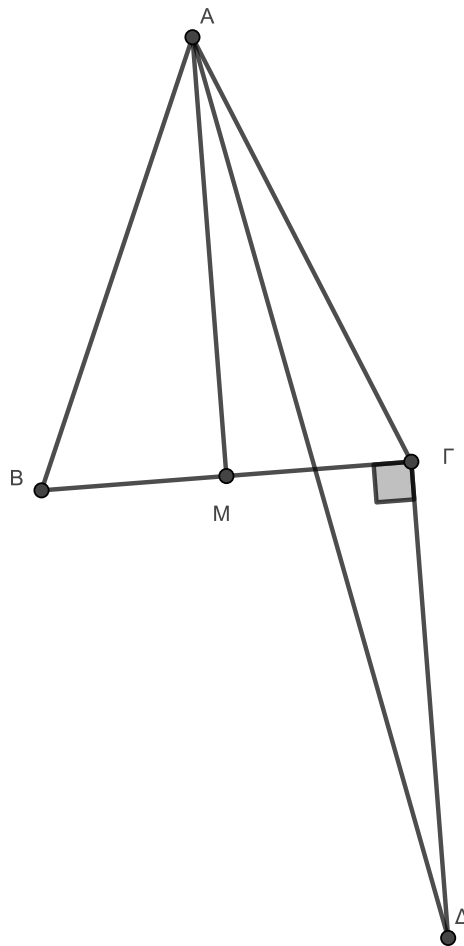
(Μονάδες 7)

γ) $\Delta\hat{A}\Gamma = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$.

(Μονάδες 7)

δ) $A\Delta < 2 AB$.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Από το B φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο AM της γωνίας A , η οποία τέμνει την AM στο H και την $A\Gamma$ στο Δ . Στην προέκταση της AH (προς το H) θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $AH = HZ$ και έστω Θ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι

α) το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι ρόμβος.

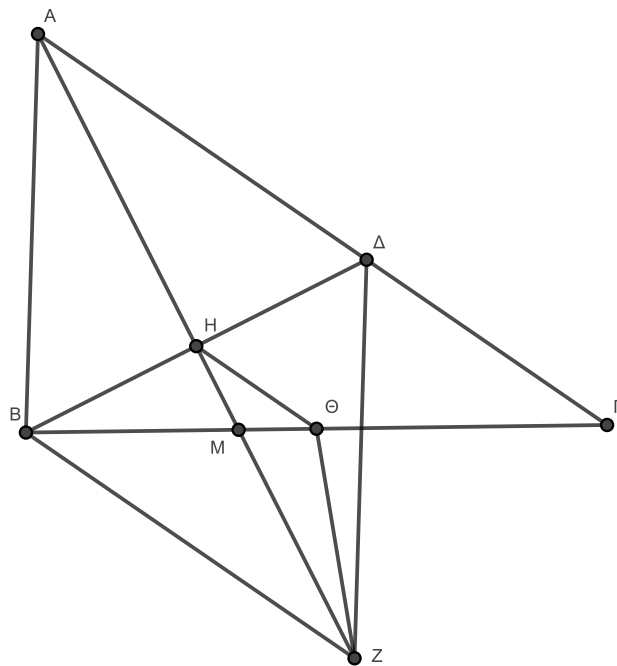
(Μονάδες 9)

β) $H\Theta \parallel BZ$.

(Μονάδες 9)

γ) $H\Theta = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ.

(Μονάδες 5)

- ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.

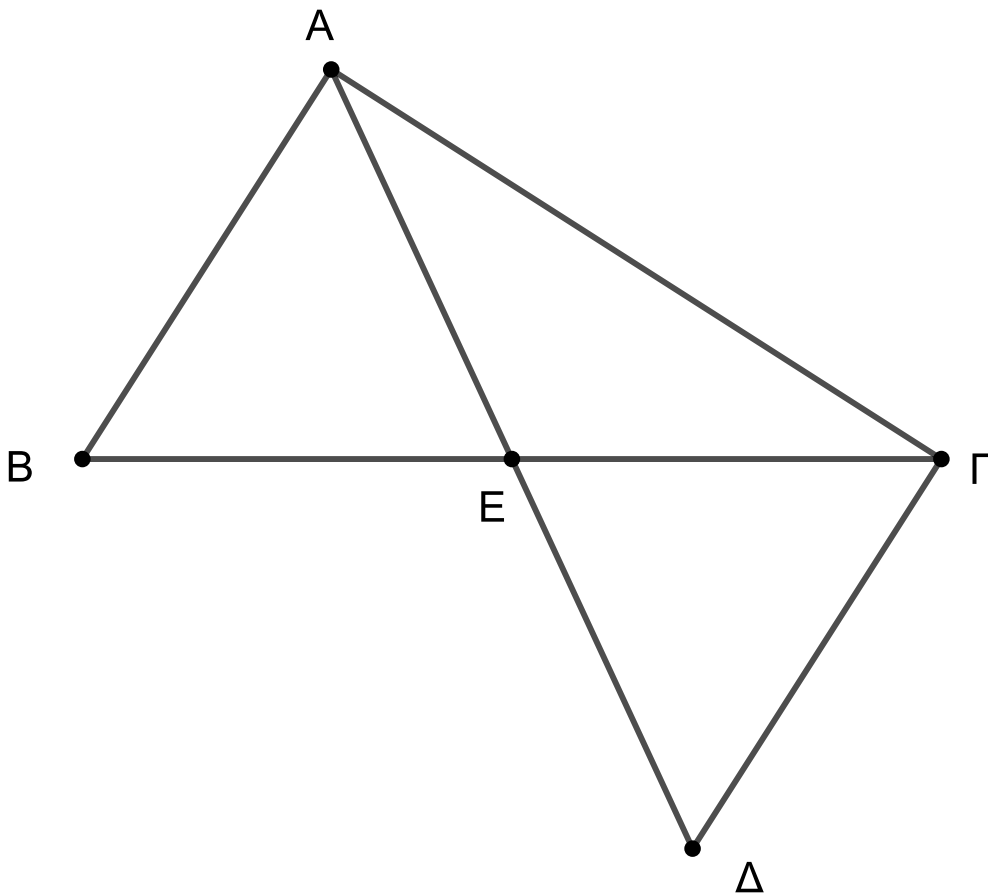
(Μονάδες 5)

- iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > A\Delta$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του AP , BE , $\Gamma\Sigma$ και ΔT (όπου P, E στην $\Delta\Gamma$ και Σ, T στην AB) τέμνονται στα σημεία K, Λ, M και N όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.

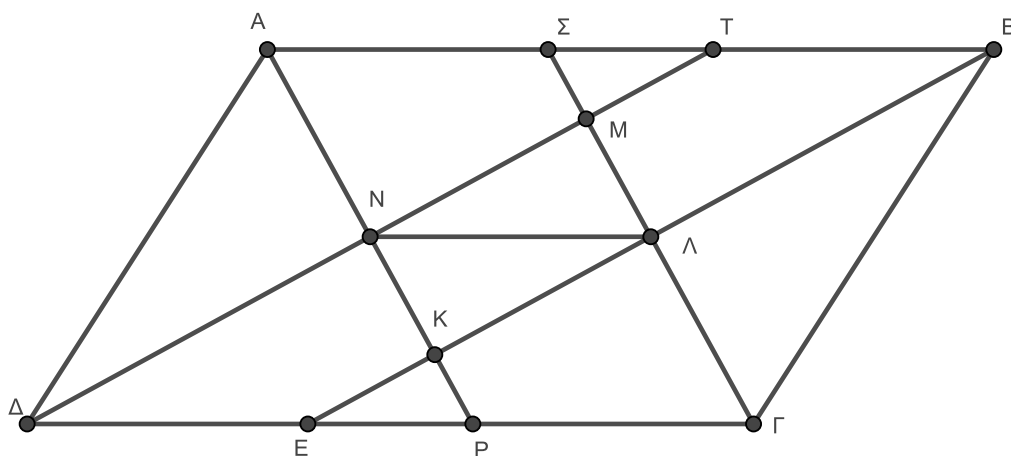
(Μονάδες 8)

γ) $\Lambda N \parallel AB$

(Μονάδες 5)

δ) $\Lambda N = AB - A\Delta$

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A\Gamma=B\Gamma$). Η μεσοκάθετη ε της $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του B) στο σημείο M και την $A\Gamma$ στο Z . Στην προέκταση της $M\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $\Gamma E=BM$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Ναδειχτεί ότι τα τρίγωνα $A\Gamma E$ και $\Gamma B M$ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Ναδειχτεί ότι το τρίγωνο $A M E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

