ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2-x-1$ και $g(x)=3-x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Ζ.

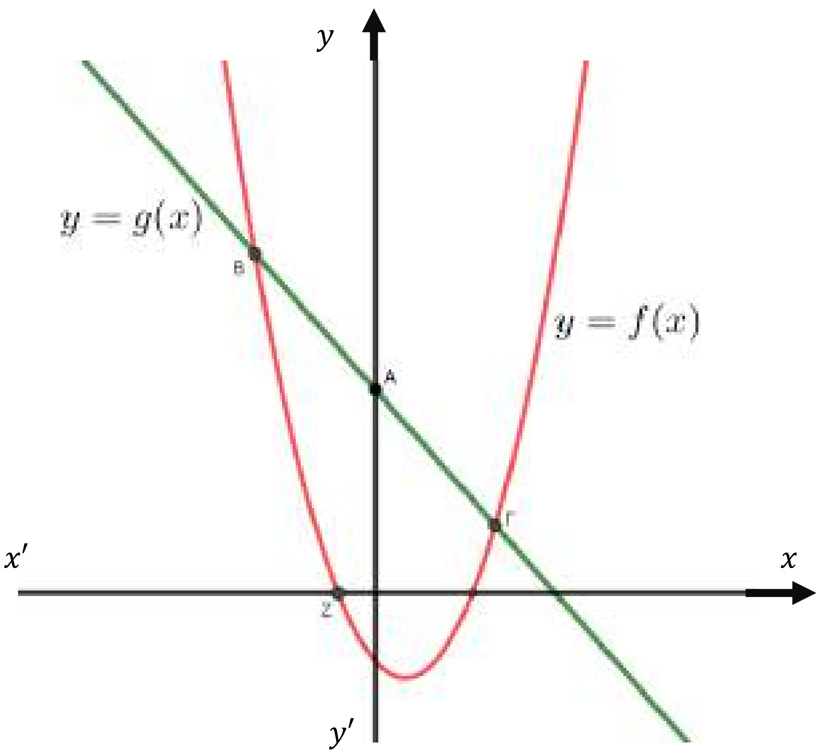
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y=f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y=g(x)$

(Μονάδες 6)

γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α, η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x-3|+4-(|6-2x|+2)$ με $x\in\mathbb{R}$.

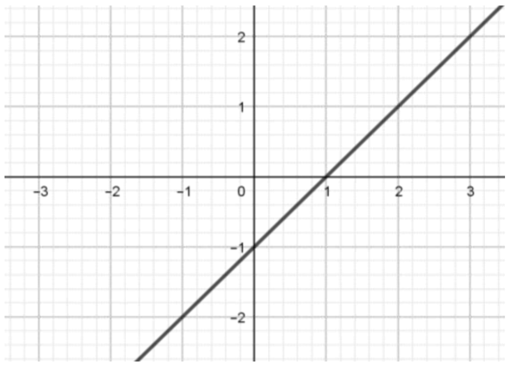
α) Να δείξετε ότι $f(x)=2-|x-3|$.

(Μονάδες 5)

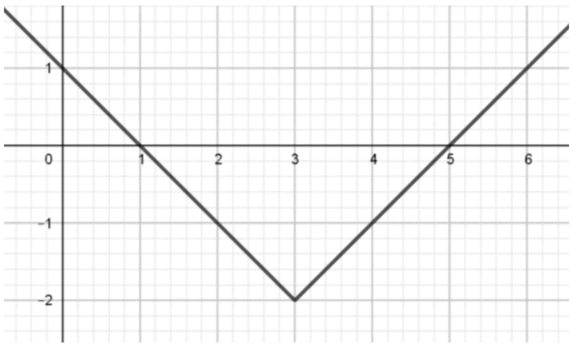
β) Αφού δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x-1, αν\ x<3 \\ 5-x, αν\ x\geq 3 \end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η γραφική παράσταση της f είναι:

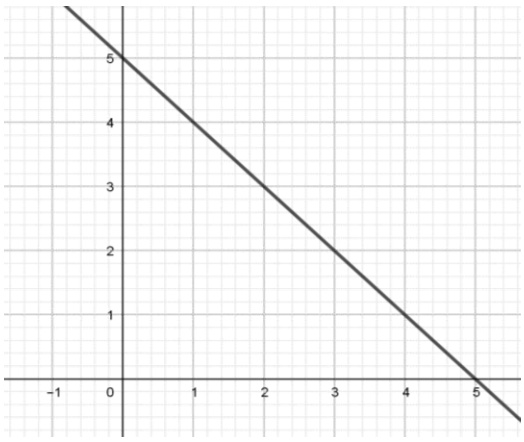
1)



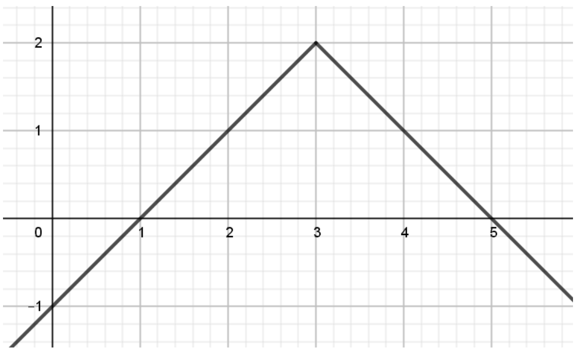
2)



3)



4)



(Μονάδες 9)

γ)

i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y=-1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2-|x-3|>-1$

(Μονάδες 5)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x-1)^2 και\ g(x) = |x-1| + 2,\ με\ \ x \in R$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x+1, x \geq 1 \\ -x+3, x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Μια δεξαμενή έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο $16m^3$, να βρείτε τις διαστάσεις της.

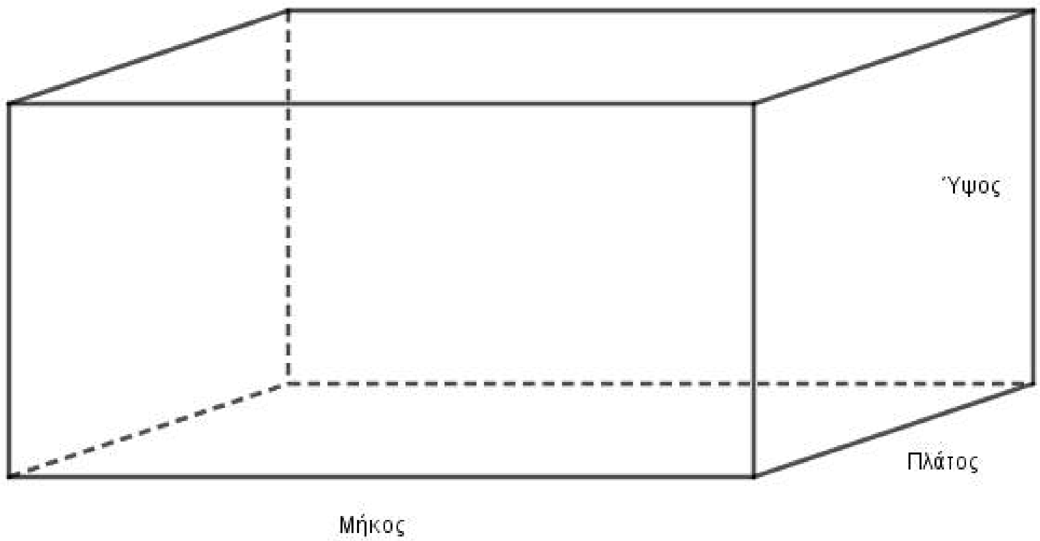
(Μονάδες 8)

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα (όπως στο παρακάτω σχήμα). Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει $16m^3$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει $10m^3$ πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_1(t) = 150 + 50t, \quad t \in [0, 5].$$

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_2(t) = 650 - 25t.$$

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;

(Μονάδες 6)

β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το $5^{ο}$ μέχρι το $10^{ο}$ λεπτό της κίνησής του; (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτέρου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

(Μονάδες 6)

δ)

i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4

Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 3 + 4)

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

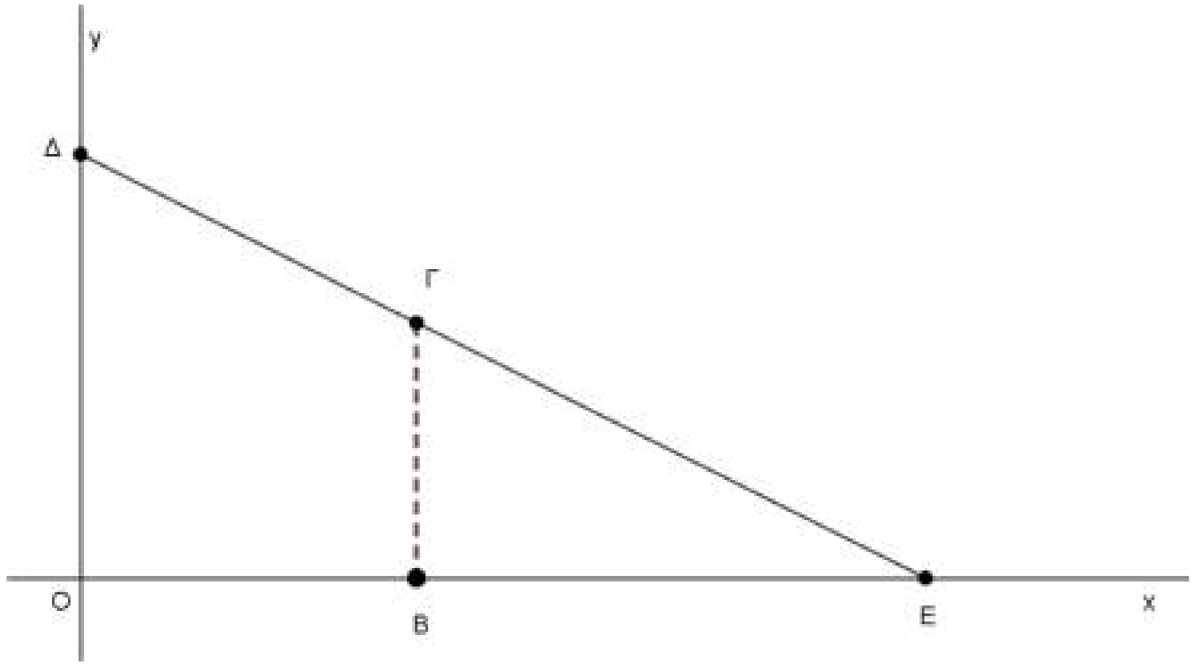
(Μονάδες 6)

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, E ένα σημείο του $x'x$ άξονα και O είναι η αρχή των αξόνων.



Η εξίσωση της ευθείας $\Delta\mathrm{E}$ είναι: $y+\dfrac{1}{2}x=4$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων E και Δ. (Μονάδες 6)

Ένα σημείο Γ(t, $y_Γ$) κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Delta\mathrm{E}$ και B ένα σημείο του x'x άξονα, τέτοιο ώστε $\mathrm{B}\Gamma$ να είναι παράλληλη στον y'y άξονα.

β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_{\Gamma}=4-\dfrac{1}{2}t$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t)=4t-\dfrac{1}{4}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΒΓΔ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 7)

δ) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με $9,75$ τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ, $\kappa \cdot \lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

(Μονάδες 10)

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, $\kappa \cdot \lambda$,(κ>0, $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$) είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$ να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ, $\kappa \cdot \lambda$.

(Μονάδες 7)

Θέμα 4

Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν α_ν το πλήθος των καθισμάτων της ν - οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_ν είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

(Μονάδες 9)

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\sqrt{3}\right)+f\left(-\sqrt{3}\right)=8$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=4$

(Μονάδες 9)

γ) Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\neq\beta$ ώστε να ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=2$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε ΑΒ=2, ΑΔ=4, ΓΔ=6, ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από την ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

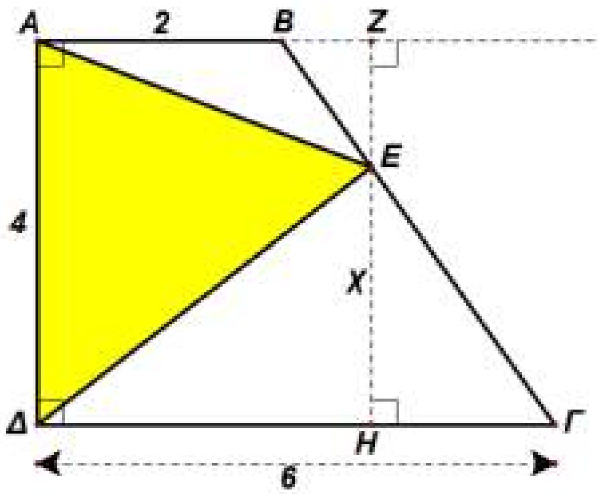
(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

(Μονάδες 7)

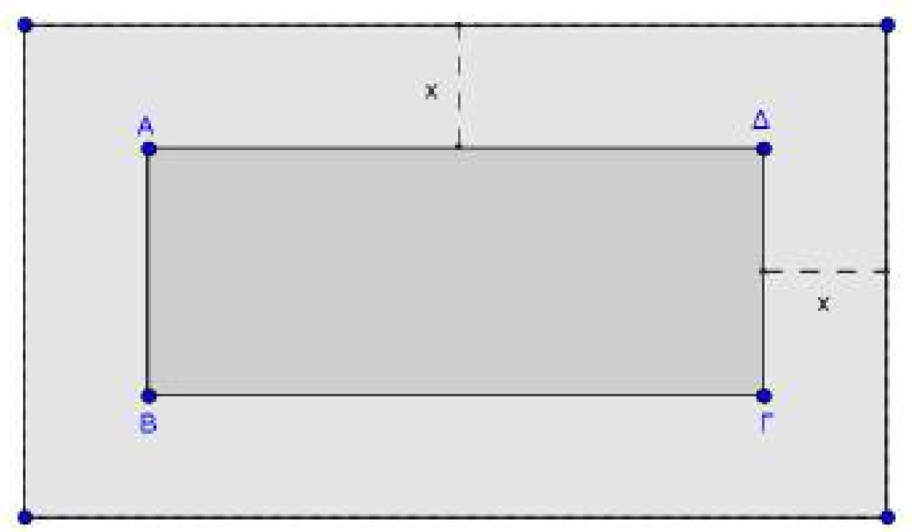
γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) \dots + f(\frac{64}{16})$.

(Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις *15m* και *25m*. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος *x* m *(x > 0),* όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 4x^2 + 80x \, , x > 0$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500\, m^2$.

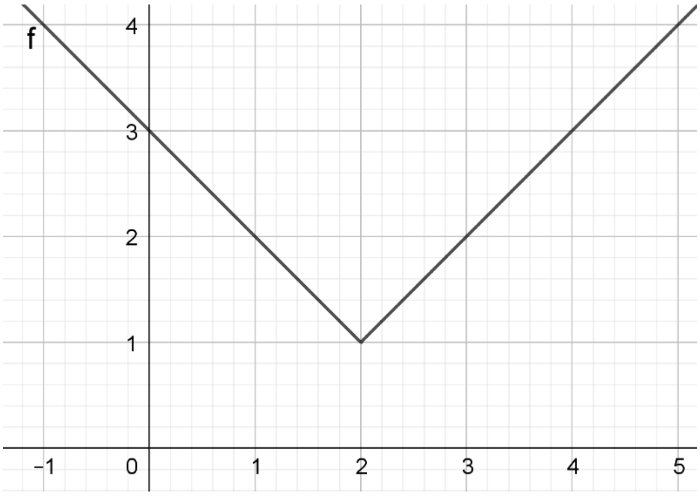
(Μονάδες 7)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500\, m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α)

i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;

(Μονάδες 4)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i).

(Μονάδες 5)

β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$;

(Μονάδες 4)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i).

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|\kappa|\, x - 2$ και η ευθεία ε: $y = 2x - \kappa^2$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ.

(Μονάδες 8)

γ) Για κ = -3 να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 5)

δ) Αν Α και Β τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (ΑΒ).

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

(Μονάδες 6)

α) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

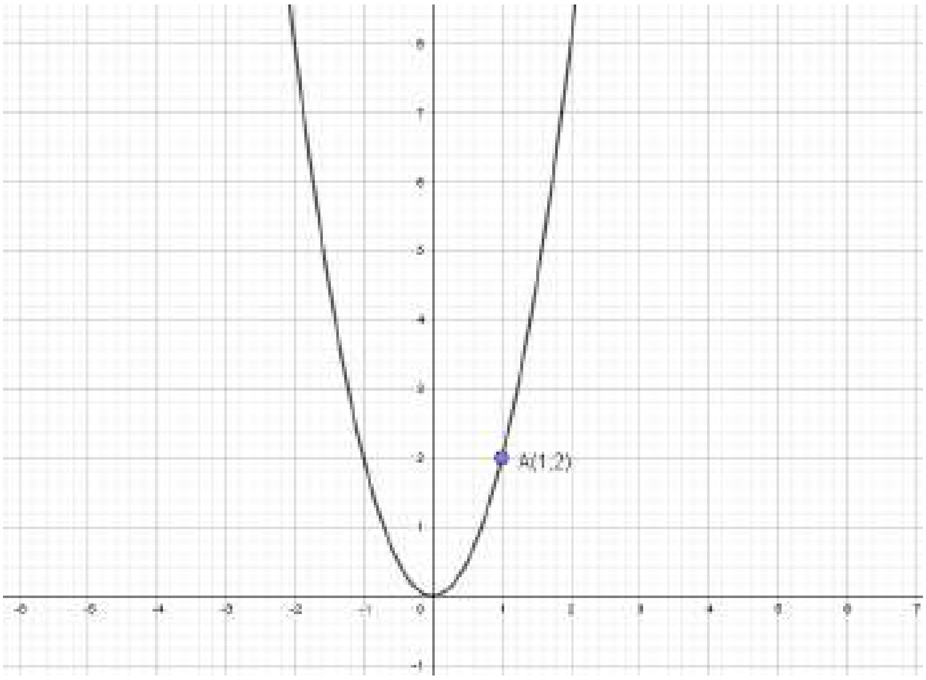
(Μονάδες 6)

δ) Αν $g(x) = 3 - x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$, $x\in\mathbb{R}$ με παράμετρο α.



α) Αν το σημείο $\mathrm{A}(1,2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $\alpha = 2$.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1,6)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

(Μονάδες4)

γ)

i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)<2x+4$.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+\frac{1}{x}$ και $g(x)=x-\frac{1}{x}$, $x\neq 0$

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=f(2)+g(2)-f\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)$$

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2=4$ για οποιοδήποτε αριθμό x με $x\neq 0$

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να αποδείξετε ότι $|\alpha|\geq 2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

(Μονάδες 8)

γ) Αν το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της (α_ν) είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) να βρείτε τον αριθμό ν.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου ($α_ν$) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $\alpha_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου ($α_ν$) είναι ίσο με $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

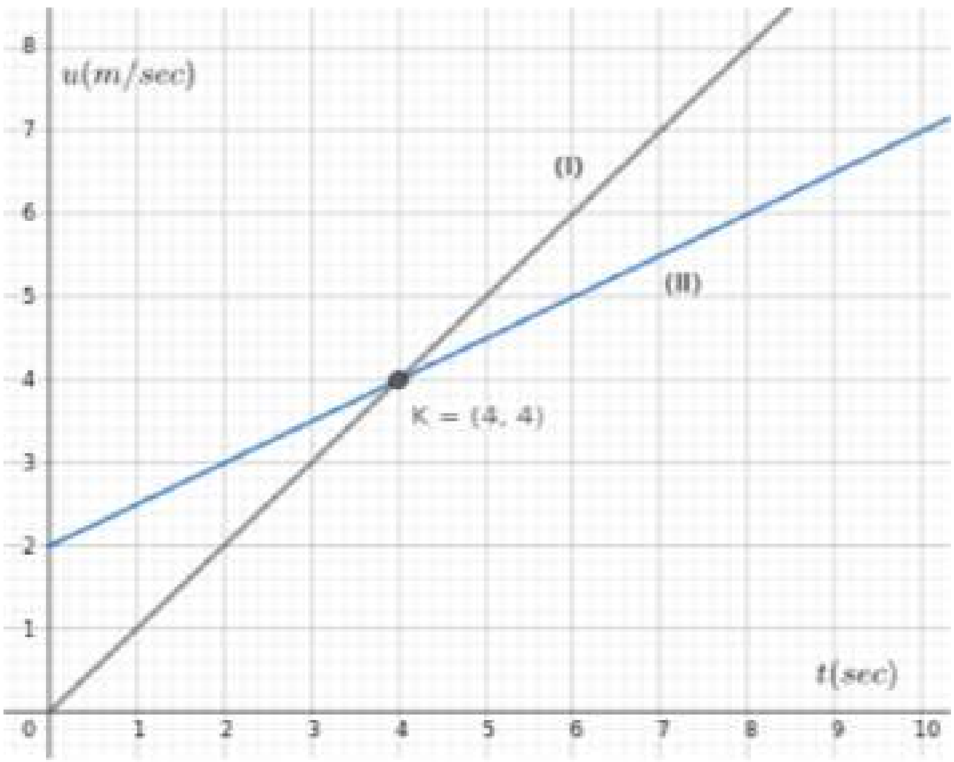
Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u=u_0+a\cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και a η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

(Μονάδες 6)

β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec. Οι παρακάτω ευθείες (I),(II) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.

i) Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;



(Μονάδες 6)

ii) Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα Α, Β κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή $t\ sec, t \in (3,5)$.

(Μονάδες 7)

iii) Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος Α, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράφει την κίνησή του.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$ $\quad και \quad$ $g(x)=|x+3|$.

Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 10)

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g.

(Μονάδες 7)

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5$, $x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $y=2x+\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x)=f(2-x)$.

(Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=f(3,52)-f(0,52)+f(3,48)-f(0,48)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta=-5$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β, ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

.	. . .	. . . . . .	. . . .	...
1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α) Να βρείτε τον $10^{ο}$ τριγωνικό αριθμό.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ!

Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α)

i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

(Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

(Μονάδες 5)

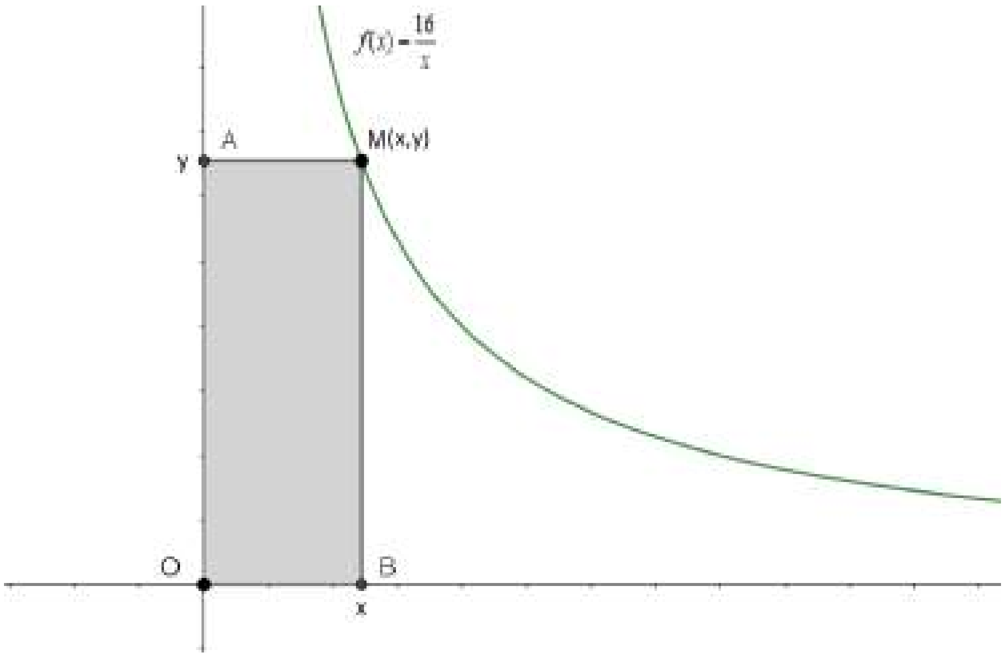
δ) Να δείξετε ότι $\alpha_\nu = \beta_{8-\nu}$ για κάθε $\nu = 1, 2, ..., 7$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{16}{x}$, $x>0$.

Ένα σημείο Μ(x,y) κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω Α και Β οι προβολές του Μ στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x)=2x+\dfrac{32}{x}$, $x>0$ όπου x η τετμημένη του Μ .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜΒ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

(Μονάδες 7)

γ) Αν Μ΄ είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜ΄Β να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το Μ΄ έχει τετμημένη 4.

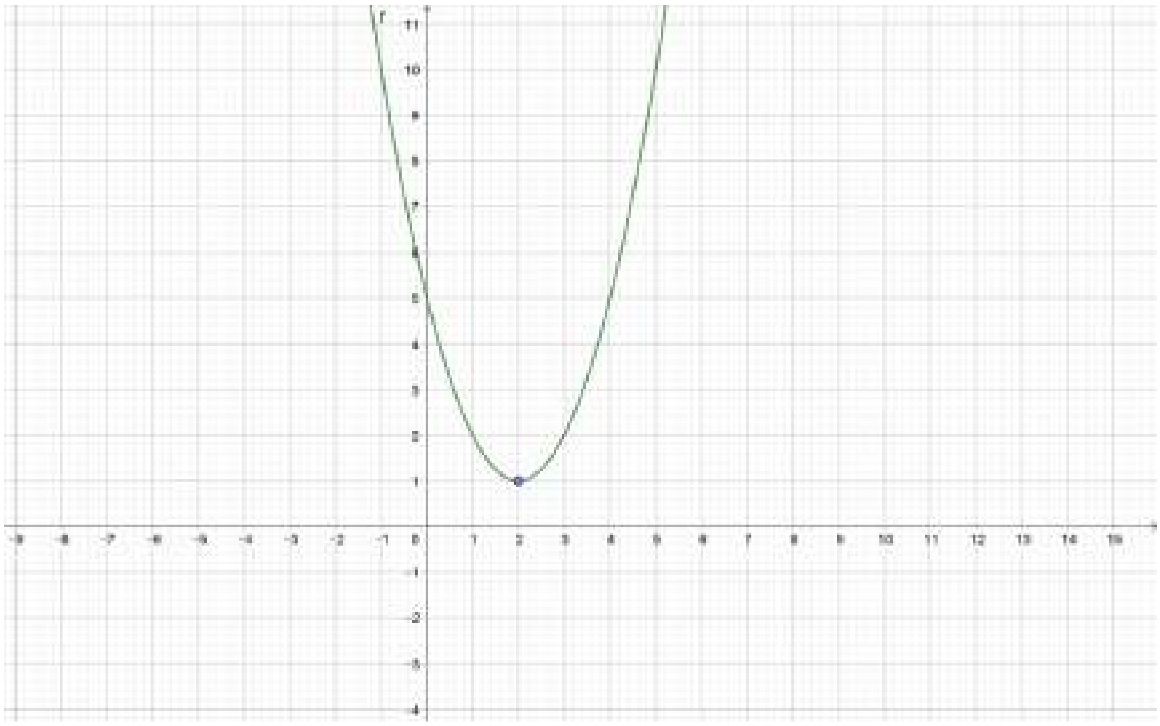
(Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο ΟΑΜ΄Β έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ, δηλαδή ότι $\Pi(x)\geq\Pi(4)$ για κάθε $x>0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 5$.



α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = 7 και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β)

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β)i.

(Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι μια ευθεία y = λ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{|x-1|-|3-3x|+|2x-4|}{2}$.

α) Να δείξτε ότι $f(x)=d(x,2)-d(x,1)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x)=0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$, $\lambda \epsilon \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \epsilon$ $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4,4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες7)

δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma$ με $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\gamma = -1$

(Μονάδες 5)

ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

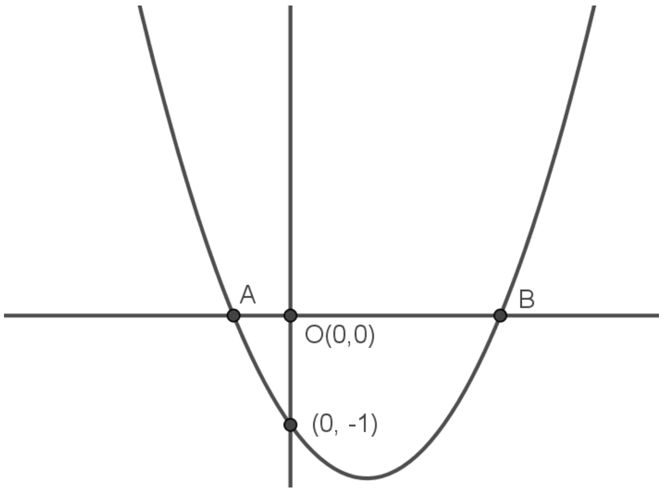
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B με συντεταγμένες $A\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0\right)$ και $B\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0\right)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά $\varepsilon\ \%$ (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι $\varepsilon\ \%$).

α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο x € με επιτόκιο $\varepsilon\ \%$, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2$ €.

(Μονάδες 7)

β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.

i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης

$$(1{,}03^2 - 1{,}02^2) \cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1{,}02^2$$

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = S_\nu = 2\nu^2 + 3\nu$, $\nu \in N$ με $\nu \geq 1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1} = 2\nu^2 - \nu - 1, \nu \geq 2$

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $a_\nu = 4\nu + 1, \nu \geq 1$

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με γενικό τύπο $\alpha_\nu = 10 + 3\nu$.

α)

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_ν) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{A}=\dfrac{-x^2+4|x|-3}{|x|-1}$ και $\mathrm{B}=\dfrac{x^2-4|x|+4}{|x|-2}$.

α) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις Α και Β;

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι Α = $3-|x|$ και Β = $|x|-2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $\mathrm{B}-\mathrm{A}<2d(x,4)-5$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις $|x-1|<2$ και $x^2-3x+2\geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,1]\cup[2,3)$.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2, με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1, \rho_2 \in(-1,1]$, είναι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

(Μονάδες 4)

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2, με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1\in(-1,1]$ και $\rho_2\in[2,3)$, είναι και ο αριθμός $\dfrac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \le \beta \le 2$ και $2 \le \alpha \le 4$.

α)

i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

(Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι $\dfrac{\beta}{\alpha} \le 1 \le \dfrac{\alpha}{\beta}$.

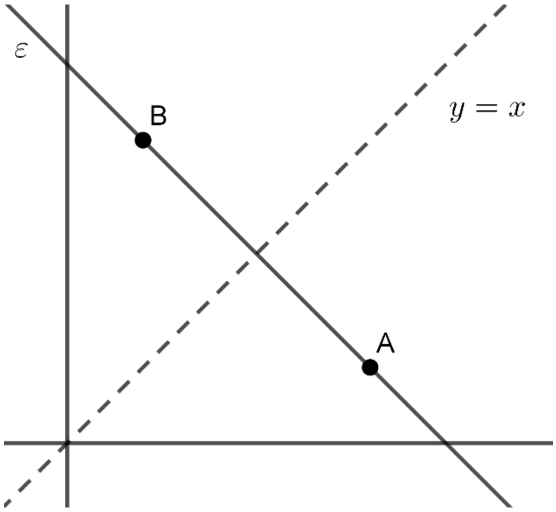
(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\dfrac{\alpha}{\beta}-1\right|$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Τα σημεία A και B είναι σημεία του 1ου τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες το σημείου B.

(Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα A κα B έχει κλίση $\alpha = -1$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2{,}4)$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B.

(Μονάδες 8)

ii. Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-6x+\lambda=0$ (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha\cdot\beta=\lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta\le 9$.

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=9$ αν και μόνο αν $\alpha=\beta$.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α, β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^7-x}{x^3-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=x^4+x^2+1$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=3$ έχει λύση στο σύνολο A.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-3$. Αν $\mathrm{A}(\alpha,0)$, $\mathrm{B}(\beta,0)$, $\Gamma(\gamma,\delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2})<0$.

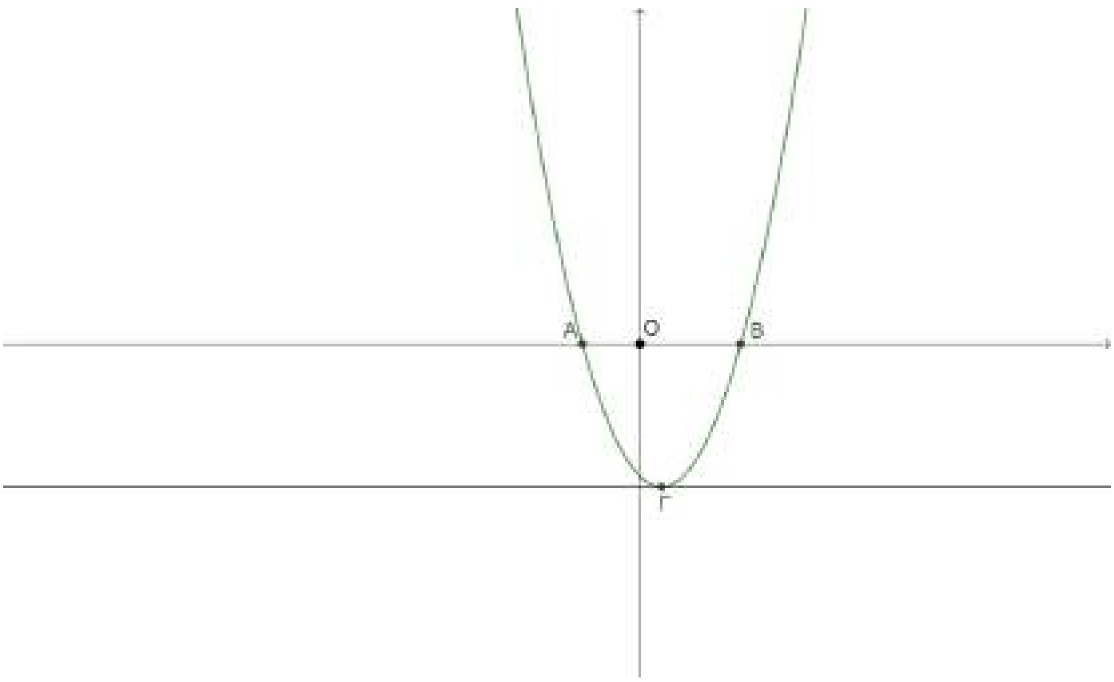
(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}<\sqrt{2}<\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

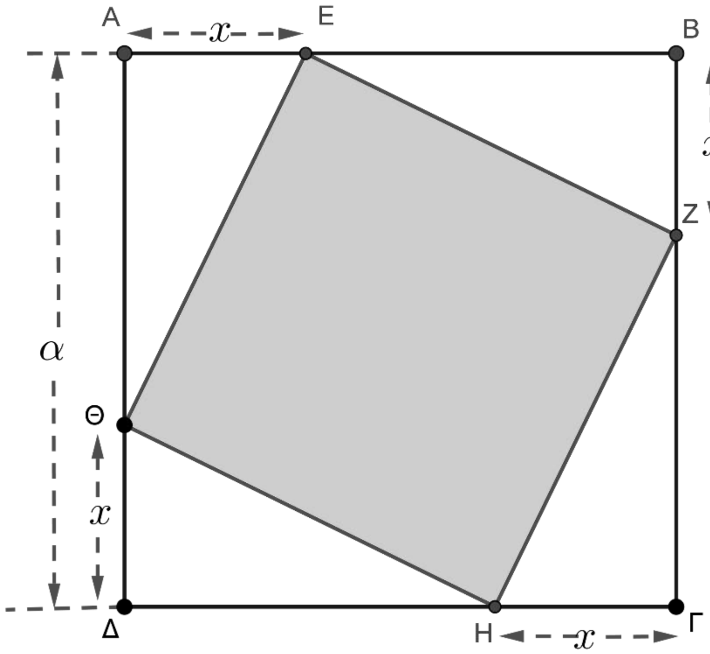
(Μονάδες 5)

iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου $ΕΖΗΘ$ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$.



α) Αν η πλευρά του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ είναι $α$ και η απόσταση των κορυφών του $ΕΖΗΘ$ από τις αντίστοιχες κορυφές του $ΑΒΓΔ$ είναι x, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του $ΕΖΗΘ$ δίνεται από τη σχέση:

$$(ΕΖΗΘ) = x^2 + (α - x)^2 \ \text{ με } \ 0 \leq x \leq α.$$

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του $ΕΖΗΘ$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού $ΑΒΓΔ$.

(Μονάδες 11)

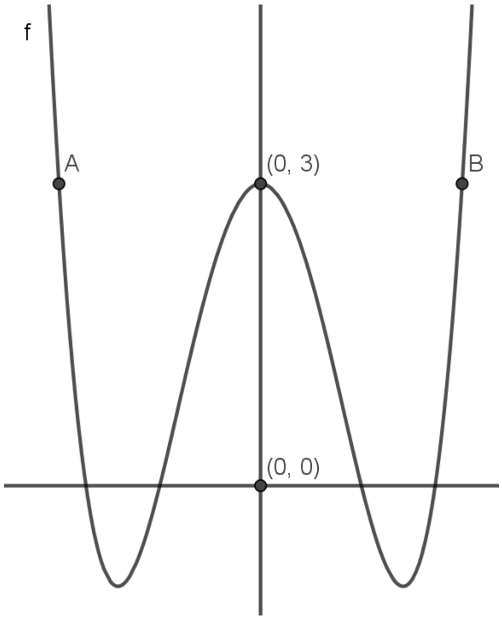
γ) Να βρείτε την πλευρά $α$ του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ αν για $x = 1$, το εμβαδόν του $ΕΖΗΘ$ είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του $ΑΒΓΔ$, δηλαδή: $(ΕΖΗΘ) = \frac{2}{3}(ΑΒΓΔ)$.

(Μονάδες 8)

(Δίνεται $\sqrt{3} \approx 1{,}73$)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^4 - 4x^2 + \gamma$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



α) Να δείξετε ότι $\gamma = 3$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $A(a^2 - 3{,}3)$ και $B(5 - 3a, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{1-2x+x^2}$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

(Μονάδες 6)

Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.

β) i. Να δείξετε ότι Α=2.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x-3|-|x-1|=2$.

(Μονάδες 5)

γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3-x$ και $g(x)=x-1$ για $1 \leq x \leq 3$.

(Μονάδες 6)

ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x)-g(x)|=2$.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις

$$|x-1| \le \sqrt{3} \quad (1) \qquad \text{και} \qquad 3-\frac{x+4}{2}<0 \quad (2)$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 5)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1).

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$.

Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 9)

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

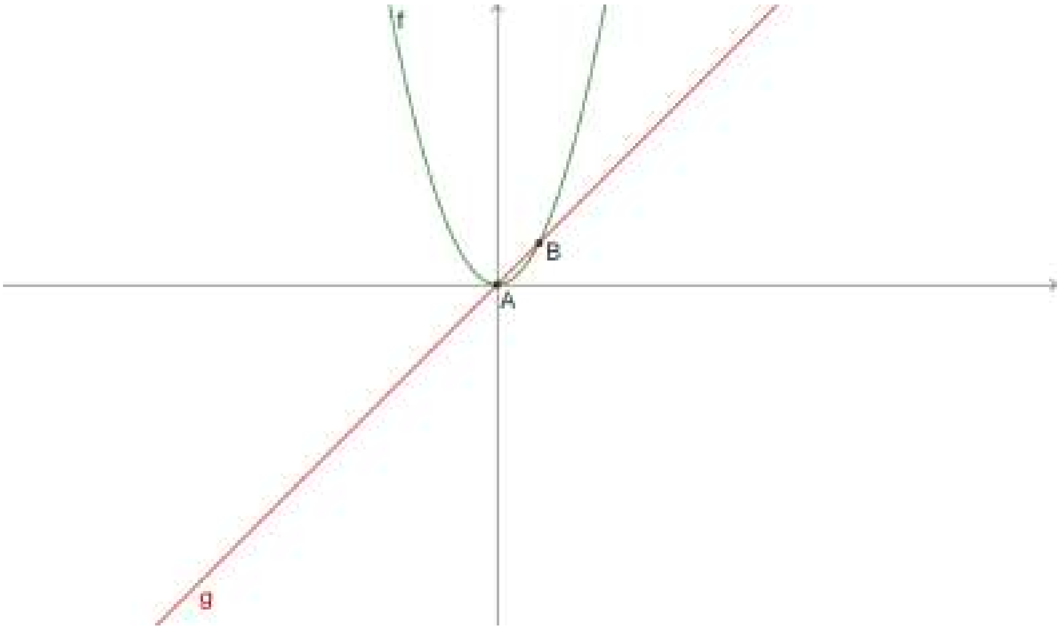
(Μονάδες 8)

ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να βρείτε την ακέραια τιμή του μ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x$ που τέμνονται στα σημεία A,B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\mathrm{A}(0,0),\mathrm{B}(1,1)$, τότε:

i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 5)

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα.

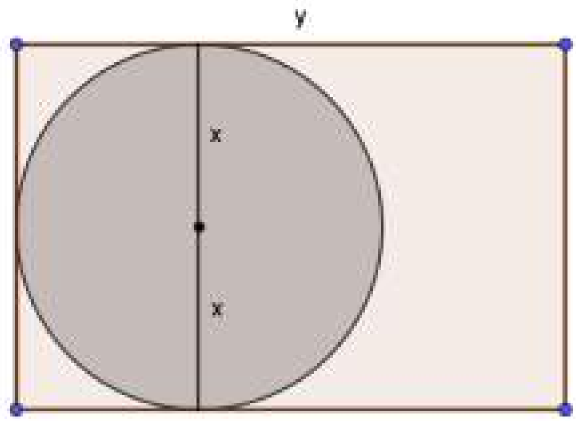
(Μονάδες 7)

γ) Αν $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2<\dfrac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α,β με $\beta\neq 0$, να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha|<|\beta|$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο με μήκος y cm και περίμετρο 10 cm. Μέσα σε αυτό δίνεται κύκλος με ακτίνα x cm, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.



α)

i. Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος y (σε cm) του ορθογωνίου ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου είναι:

$$y = 5 - 2x\,,\ x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου (σε cm^2) δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{E}_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2\,,\ x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε cm^2) που βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη σχέση:

$$\mathrm{E} = 10x - (\pi + 4)x^2\,,\ x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

(Μονάδες 6)

γ) Αν το εμβαδό E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με $(6-\pi)$cm^2 και ο x είναι ένας ρητός αριθμός, τότε να βρείτε:

i. την ακτίνα x του κύκλου.

(Μονάδες 6)

ii. τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - \alpha x - (\alpha + 1)$, $x \in R$, με παράμετρο $\alpha \in R$.

α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

(Μονάδες 7)

β) Αν είναι $\alpha > -2$, τότε:

(i) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $\alpha + 1$.

(Μονάδες 4)

(ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης $x^2 - \alpha x - (\alpha + 1) \leq 0$ είναι ίσο με 2024.

(Μονάδες 7)

(iii) Να βρείτε το πρόσημο του $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 4)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 8)

γ) Αν είναι $f(x)=x+2,\ x\neq -1$, τότε:

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x)=x^2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x^3-2x^2+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι : $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x\in A$.

(Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=1$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y=1$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\ \alpha -\ 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\beta > 0$. Από το Μ φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και έστω Α και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το Α ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$. Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ΟΑΜΔ είναι $\left[\sqrt{2}(\beta + 1)\right]^2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-6x+8,\ x\in A$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y=3$.

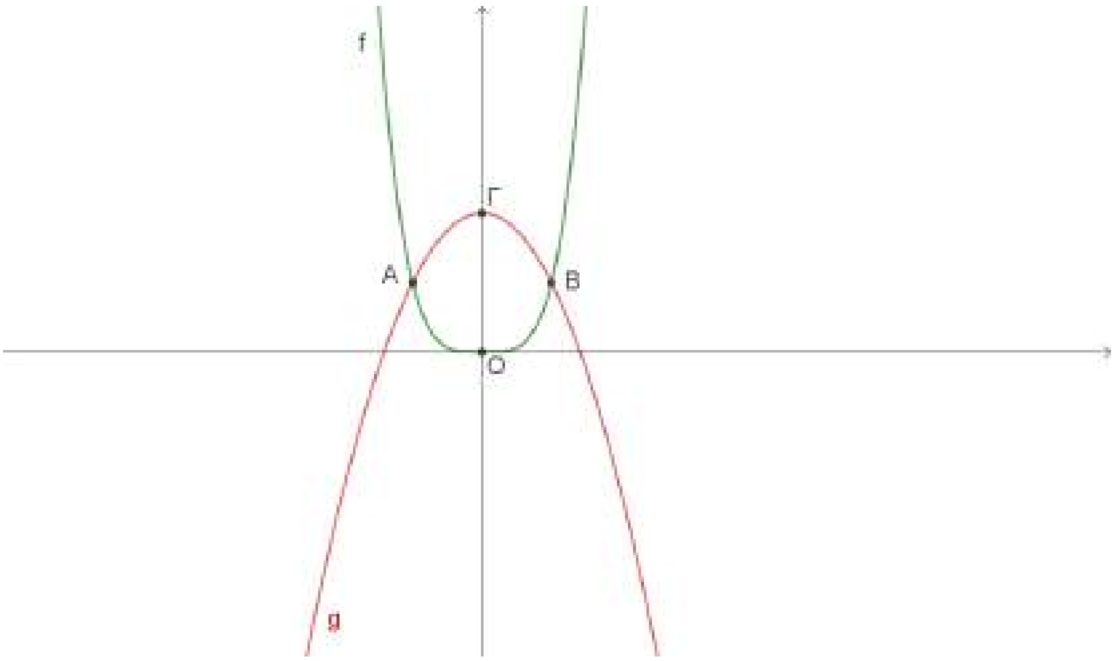
(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x)=x^4-6x-4$ τέμνει την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^4$ και $g(x)=2-x^2$. Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f, g ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ.

(Μονάδες 9)

Αν $A(-1,1), B(1,1), \Gamma(0,2)$

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

(Μονάδες 6)

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση σας στο ερώτημα β).

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+4, & x\in[0,6] \\ 16, & x\in(6,9] \\ 25-x, & x\in(9,12] \end{cases}$$

και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:

i. Διατηρείται σταθερή.

ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου.

(Μονάδες 4+7=11)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\mu x-2,\ \mu\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x=-2$ και $x=3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ ενώ ο $x=1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2),\ f(1),\ f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ.

(Μονάδες 7)

ii. Για $\mu=\frac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Κ = $\frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β, έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ και η ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι αν $0<\alpha<1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

(Μονάδες 10)

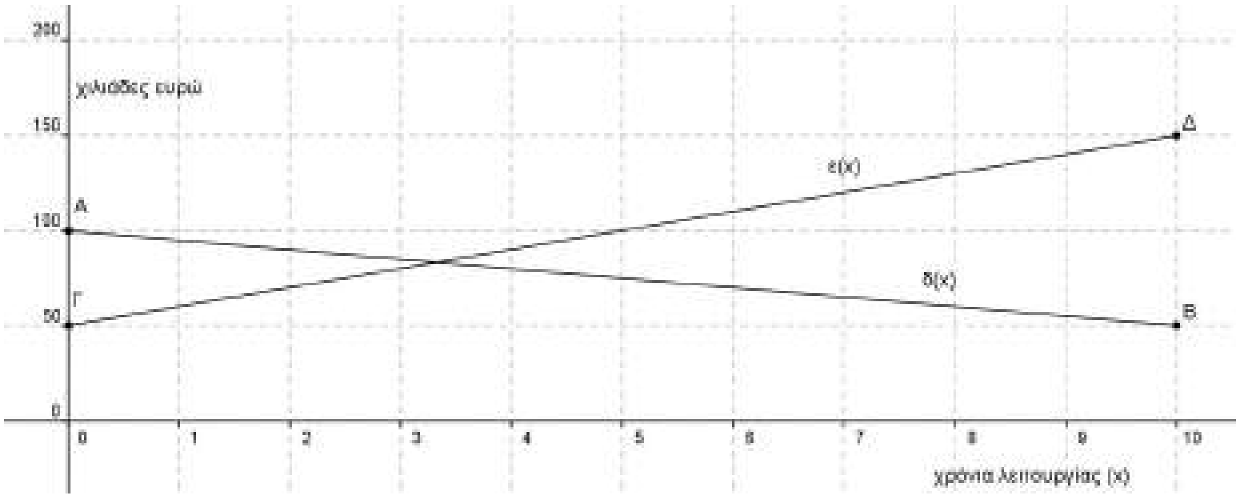
γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)|\leq\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Η ευθεία $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

(Μονάδες 4)

β)

i. Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

(Μονάδες 15)

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in R$.

Να βρείτε:

i. Το σύνολο Α που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 10)

ii. Την πραγματική τιμή του λ, αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

(Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4

Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός α γράφεται στη μορφή $a=2k+1$, k ακέραιος.

α) Να γράψετε τους αριθμούς 3,5,7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

(Μονάδες 6)

β) i) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.

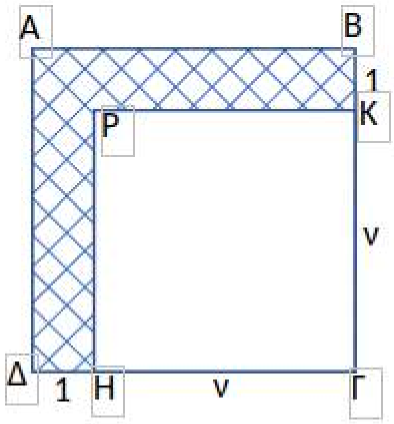
(Μονάδες 6)

ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

(Μονάδες 6)

γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ είναι τετράγωνα με (ΓΗ)=(ΓΚ)=ν και (ΒΚ)=(ΔΗ)=1. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου ν.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = \alpha x + \beta$, όπου $\alpha\,,\beta$ σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in R$. Θεωρούμε τα σημεία Α και Β της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, των οποίων οι προβολές στους άξονες x΄x, y΄y είναι τα σημεία Η,Δ και Κ,Ε αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΗΚ και ΔΕ έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{3}{2}$

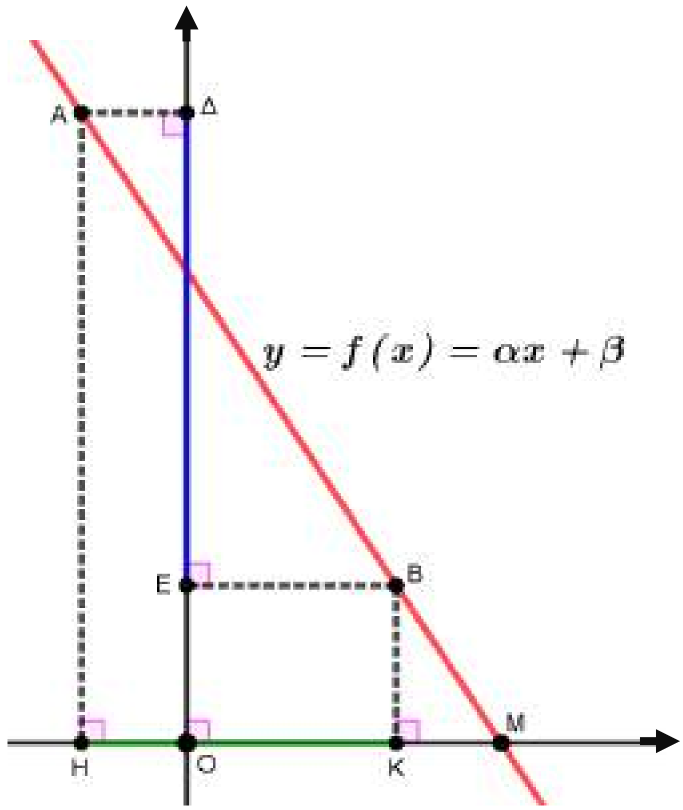
(Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο Μ έχει τετμημένη 6, να αποδείξτε ότι $\beta = 9$.

(Μονάδες 7)

γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΚ έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο Ε και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}$.

α)

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y=1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ, πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

Έστω ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ, η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

(Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον τύπο $E(x)=\frac{4}{3}(x-25)$.

(Μονάδες 7)

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε;

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50;

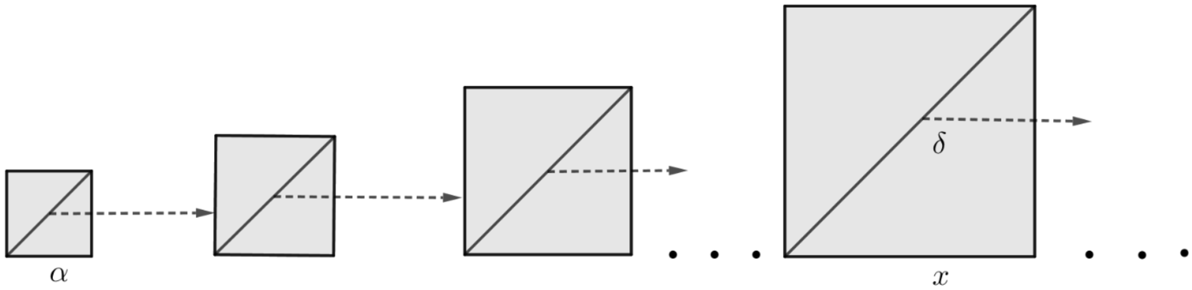
(Μονάδες 8)

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α, σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α)

i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x, να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $\alpha_\nu = \alpha^2 2^{\nu-1}$.

(Μονάδες 7)

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με $8\ \tau.\mu.$, να βρείτε:

i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

(Μονάδες 8)

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν $255\ \tau.\mu.$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| \leq 3$ (1).

(Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-1|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-1| \leq 3$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4(\lambda + \frac{1}{\lambda})x + 16 = 0 \text{ όπου } \lambda > 0 .$$

α) Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \dfrac{\alpha+\alpha^2}{2}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ανίσωση $|x-1|\leq 3$.   (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).

(Μονάδες 8)

δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2-3x+2,\ \ x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α,β με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει

$$\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)\left(\beta^2-3\beta+2\right)<0\ .$$

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha-1$ και $\beta-2$ είναι ομόσημοι .

(Μονάδες 10)

ii. Να δείξετε ότι $\left|(\alpha-1)(\beta-2)\right|=(\alpha-1)(\beta-2)$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90°$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε x+y=10.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E(x)} = \frac{1}{2}(10\mathrm{x} - \mathrm{x}^2)$ με $\mathrm{x} \in (0,10)$.

(Μονάδες 8)

β) i. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{E(x)} \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $\mathrm{x} \in (0,10)$.

(Μονάδες 7)

ii. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

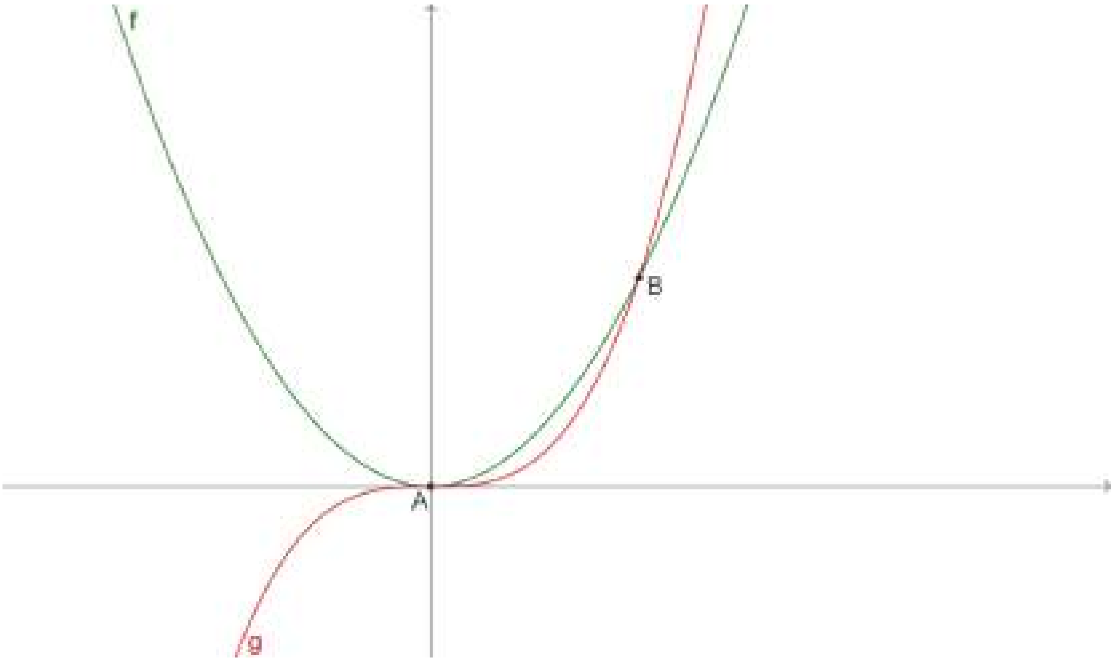
(Μονάδες 6)

γ) Αν x=5, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τρίγωνου ως προς τις πλευρές του;

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x^3$ που τέμνονται στα σημεία A,B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B.

(Μονάδες 8)

Έστω $\mathrm{A}(0,0),\mathrm{B}(1,1)$.

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει ότι $x^3<x^2$.

(Μονάδες 6)

γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi=3,1415...$ να δείξετε ότι

i. $(\pi-3)^3<(\pi-3)^2$.

(Μονάδες 3)

ii. $\pi^3-10\pi^2+33\pi-36<0$.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 4

Για τις ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και $2\mathrm{x}-1$, όπου $x>\frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν Ε της μακέτας σε συνάρτηση του x.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

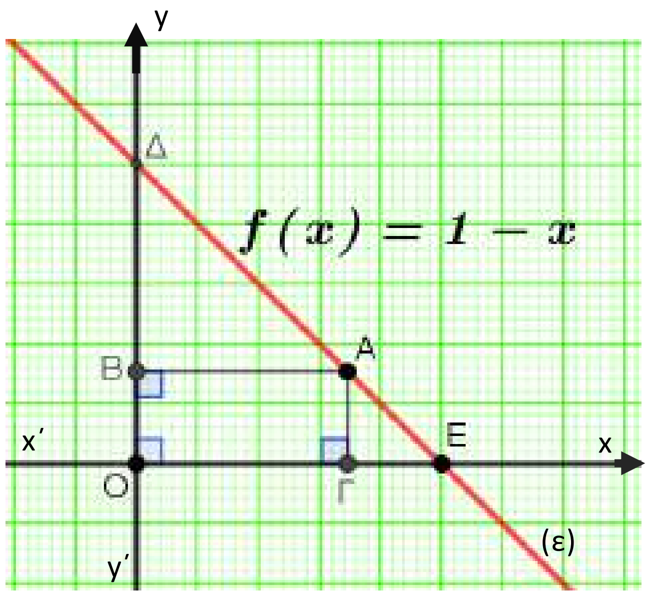
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Πότε ισχύει το ίσον;

(Μονάδες 8)

β) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση (ε) της συνάρτησης $f(x) = 1 - x,\ x \in R,$ η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο Α, με τετμημένη α, κινείται επί της ευθείας (ε) και μεταξύ των σημείων Δ και Ε. Φέρνουμε από το Α καθέτους στους άξονες και έστω Β και Γ τα σημεία τομής με $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.



i. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΟΓ.

(Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου ΑΒΟΓ είναι $\frac{1}{4}$. Για ποια θέση του σημείου Α επιτυγχάνεται αυτή η τιμή;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$. Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.

α) Να λύσετε την ανίσωση $-2 \leq g(x) \leq 0$.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \leq 2$.

(Μονάδες 7)

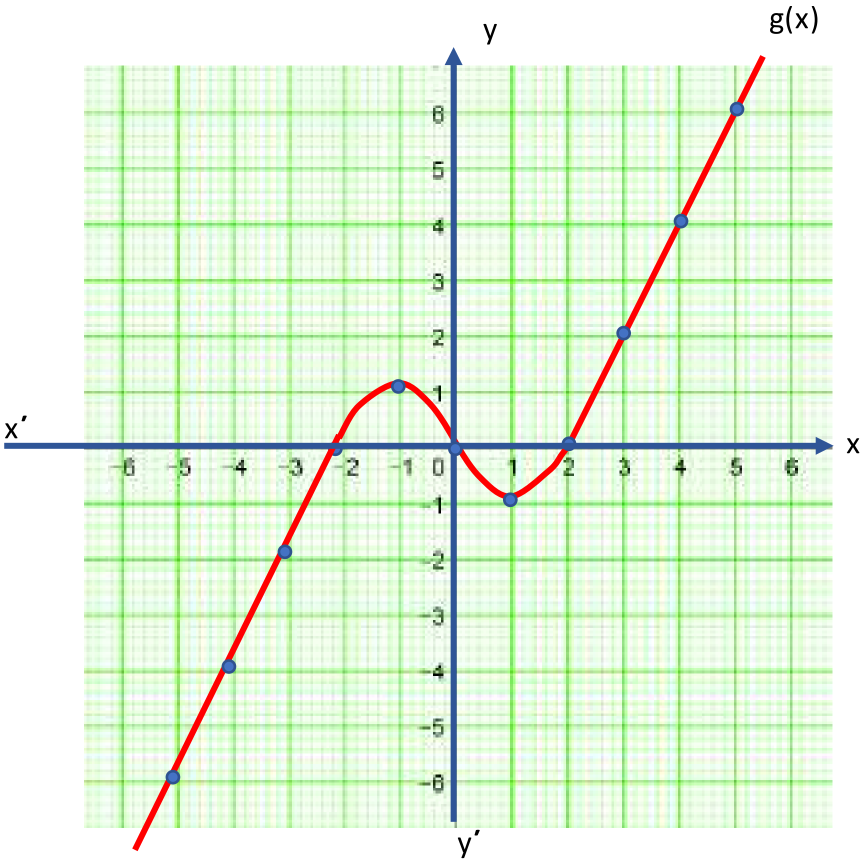
γ)

i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x) = \frac{4}{5}$ και $g(x) = -1$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;

(Μονάδες 6)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;

(Μονάδες 6)

δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^{o} αυτοκίνητο;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta,\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$.

(Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γi), να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}.$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x-12}}\right]^3 \cdot (x^2 - 16)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{3\sqrt{x^2-8x+\lambda}}{x-4}+2,$ για $x\neq 4$ και $\lambda\geq 16.$

α) Να βρείτε το $\lambda\geq 16$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο της $M(0,-1)$.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\lambda=16$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}-1, & x<4\\ 5, & x>4\end{cases}$.

(Μονάδες 7)

ii. Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f.

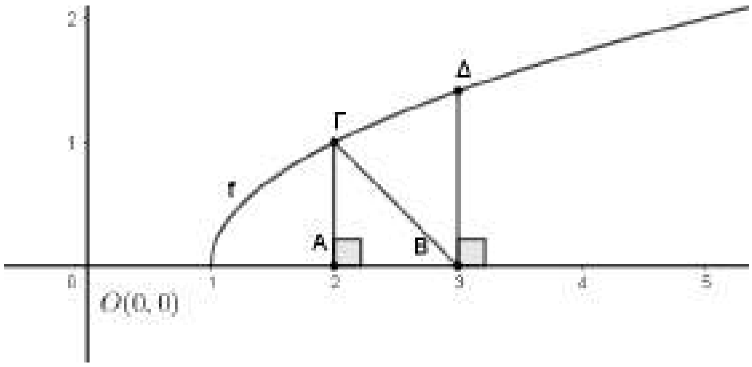
(Μονάδες 5)

iii. Για $x<4$, να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f των οποίων η απόστασή τους από το σημείο $A(-1,-1)$ είναι 10 μονάδες μήκους.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x-\alpha}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.



α) Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

γ)

i. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ είναι $(2,1)$ και $(3,\sqrt{2})$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος $B\Gamma$.

(Μονάδες 4)

iii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(2-\lambda^2, \mu)$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α) Αν τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των λ, μ.

(Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το σημείο A βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του λ.

(Μονάδες 6)

γ) Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$

i. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A ,B.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου O η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ».

Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ…

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23^{η} φορά το γράμμα Β.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200^{η} θέση στην παραπάνω διαδοχή.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 7x + κ, κ \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι $κ = 10$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω $A(α, f(α))$ και $B(β, f(β))$, $α < β$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

i. Να αποδείξετε ότι $α < \frac{2α + 3β}{5} < β$

(Μονάδες 6)

ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη $x_o = \frac{2α + 3β}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

γ) Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A} = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A.

(Μονάδες 5)

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi + 9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi + 9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου $\pi = 3{,}1415...$.

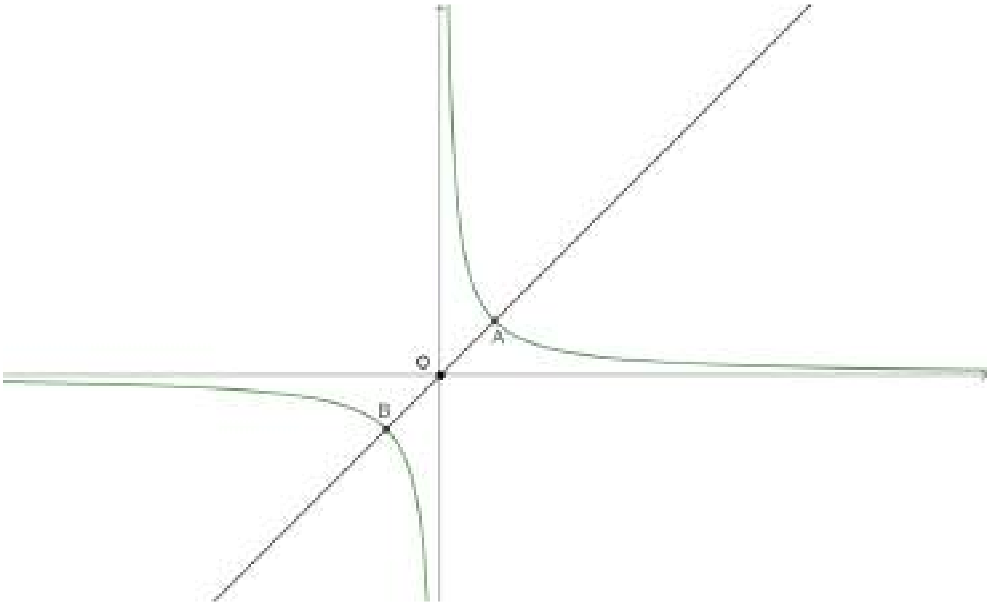
(Μονάδες 9)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $(|\alpha| + 3)^2 - (|\alpha| + 3) - 12 < 0$, να δείξετε ότι $\alpha \in (-1{,}1)$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και η ευθεία AB με εξίσωση $y=x$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A,B και να δείξετε ότι το $\mathrm{O}(0,0)$ είναι το μέσο του AB.

(Μονάδες 9)

Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της f.

β) Να δείξετε ότι και το συμμετρικό M' του M ως προς το Ο(0,0) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

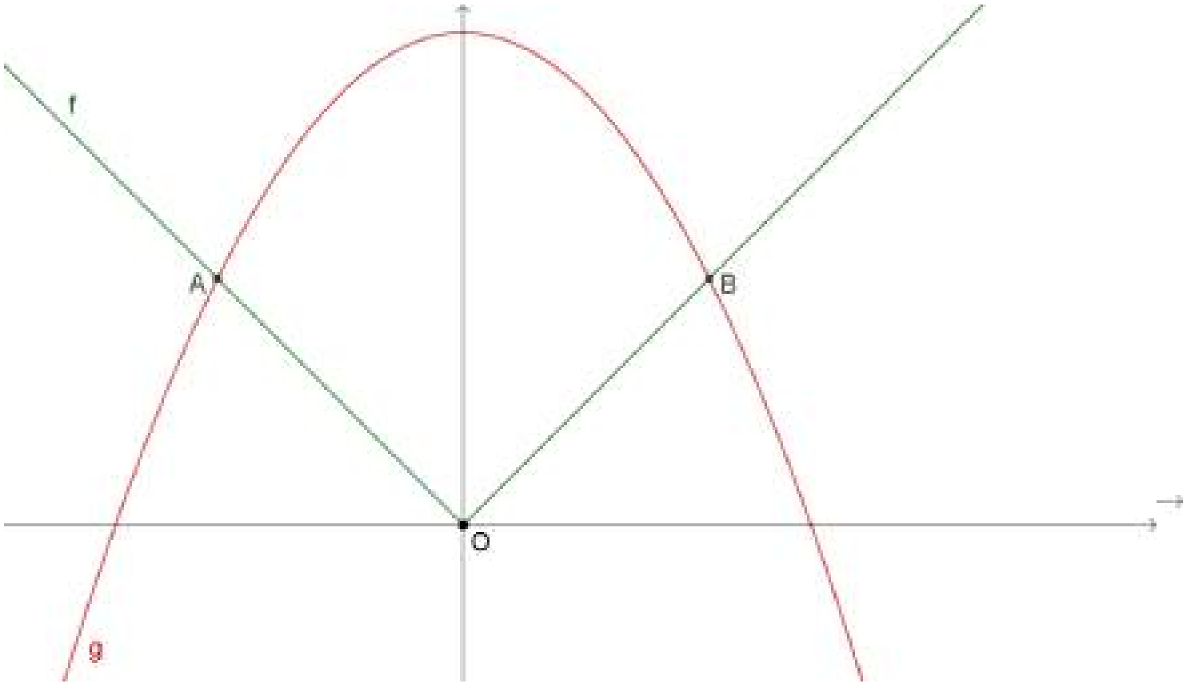
(Μονάδες 8)

γ) Αν $\mathrm{A}(1,1),\mathrm{B}(-1,-1)$, $\mathrm{M}'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(\mathrm{AB})\le(\mathrm{MM}')$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(\mathrm{AB})=(\mathrm{MM}')$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=|x|$ και $g(x)=2-x^2$. Τα A,B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f,g.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\mathrm{A}(-1,1)$ και $\mathrm{B}(1,1)$,

i.Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι : $f(x)<g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x)<g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi).

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να δείξετε ότι το κόστος για ν καλεσμένους είναι $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$. (1)

(Μονάδες 9)

β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1).

(Μονάδες 5)

ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1+\sqrt{2}$ και $\beta = 1-\sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = \alpha^2 - \beta^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{B} = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

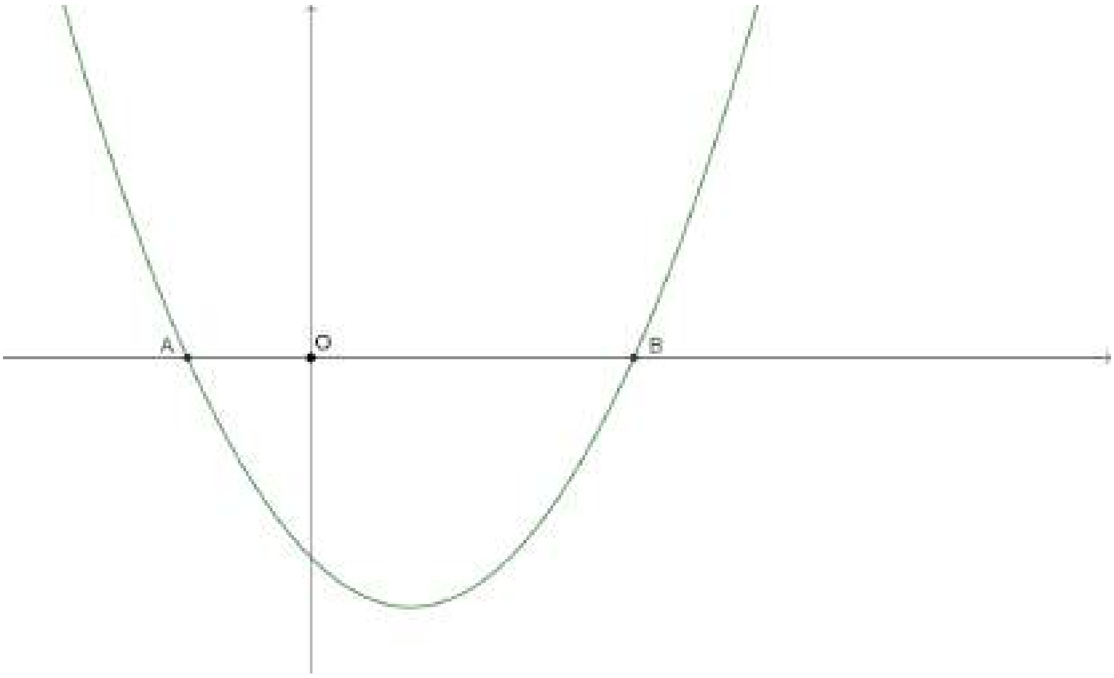
(Μονάδες 8)

γ) Αν $\mathrm{A} = 4\sqrt{2}$ και $\mathrm{B} = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-1$.



Αν $A(\omega,0)$, $B(\phi,0)$

α) Να δείξετε ότι :

i. $\omega+\phi=1$.

(Μονάδες 4)

ii. $\omega\cdot\phi=-1$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(OB)>(OA)$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι $\beta>\phi$.

(Μονάδες 6)

δ) Να δείξετε ότι $\phi<\frac{5}{3}$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Έστω μία αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά $\omega=3$. Αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $\Delta=[2,8]$ υπάρχουν ακριβώς 3 διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (α_ν),

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός μηδέν είναι όρος της (α_ν).

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τους 3 διαδοχικούς όρους της (α_ν) που υπάρχουν στο $\Delta=[2,8]$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha_6=14$,

i. να βρείτε τον α_1.

(Μονάδες 6)

ii. να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της (α_ν) που πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 186.

(Δίνεται $\sqrt{4489}=67$)

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $|x-4|-|x-2|=2$.

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

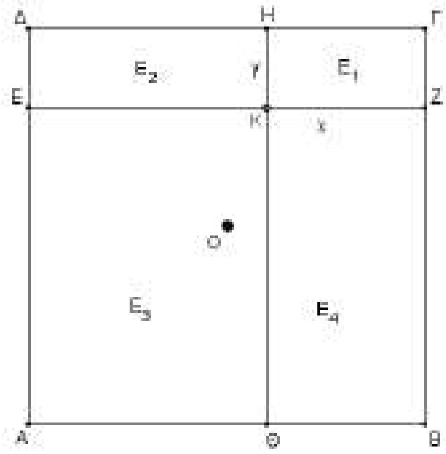
β) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο $(-\infty, 2]$ και μόνο αυτοί.

(Μονάδες 8)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x-4|-|x-2|=2$, τότε να δείξετε ότι $x^2-6x+8\geq 0$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4



Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες ΕΖ και ΗΘ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x, y \in (0, 6)$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των x, y.

(Μονάδες 8)

β)Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$.

(Μονάδες 6)

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα ΕΖ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο Ο του τετραγώνου.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 7)

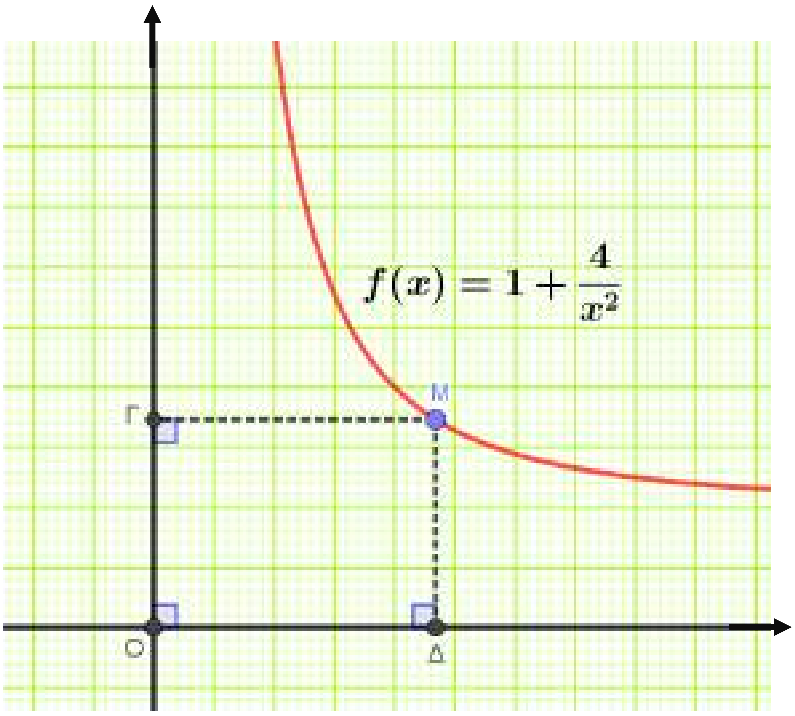
γ) Έστω $\alpha > 0$ η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου Μ της γραφικής παράστασης της f. Αν ονομάσουμε E το εμβαδόν του ορθογωνίου $ΟΓΜΔ$ του σχήματος, να αποδείξετε ότι

i. $E = \alpha + \frac{4}{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

ii. $E \geq 4$.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

α)

i. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$.

(Μονάδες 7)

β)

i. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του αριθμού x.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18.$$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Στην Α’ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας, η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται τον Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η Α’ τάξη έχει 90 μαθητές.

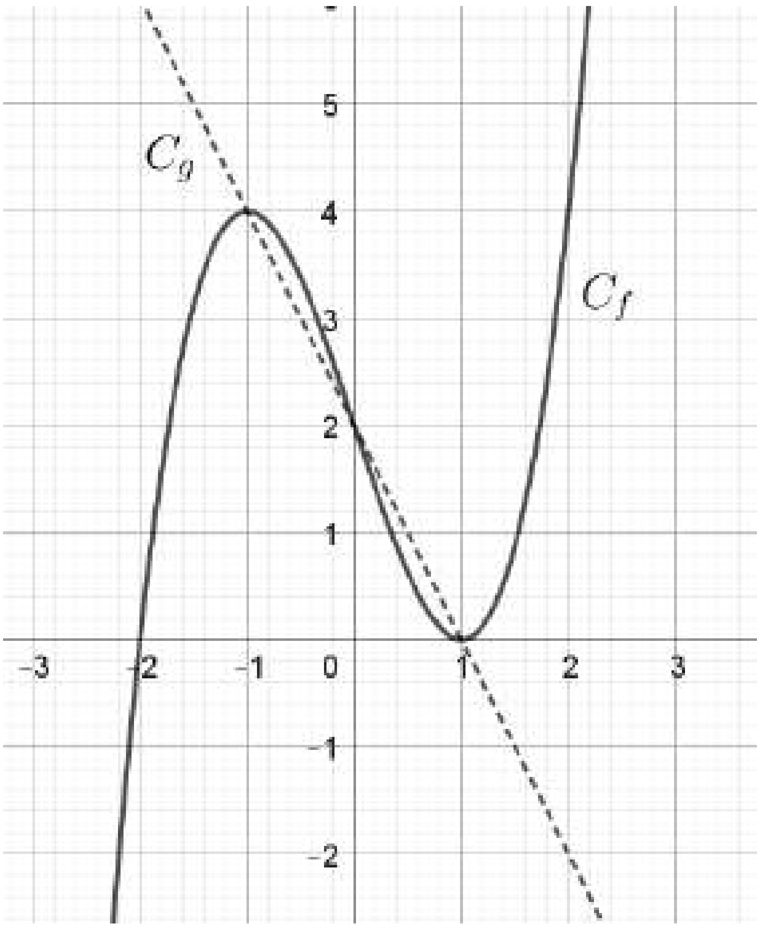
(Μονάδες 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες θα δημιουργηθούν.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = -2x + 2$,

(Μονάδες 6)

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$ και $f(1)$,

(Μονάδες 6)

γ) τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g,

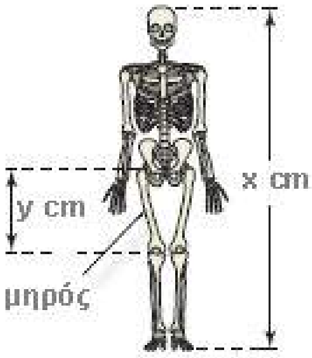
(Μονάδες 6)

δ) τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Άνδρας: $y = 0,45x - 31$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $38,5$ cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

(Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $42,8$ cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Οι αριθμοί : $x^2+5,\quad x^2+x,\quad 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x.

(Μονάδες 6)

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο $4^{ος}$ όρος της προόδου, να βρείτε:

i. Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

ii. Τον πρώτο όρο της προόδου.

(Μονάδες 6)

iii. Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+...+\alpha_{24}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3^{ος} όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8^{ος} όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να βρείτε τον 1^{ο} όρο α_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 9)

Αν $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$,

β) Να υπολογίσετε τον 31^{ο} όρο της προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \ldots + (\alpha_{31} + 31)$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 40cm$. Αν $x\,cm$ είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α) $0 < x < 20$.

(Μονάδες 4)

β) Το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $\mathrm{E}(x) = 20x - x^2$.

(Μονάδες 8)

γ) Για το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $\mathrm{E}(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$.

(Μονάδες 6)

δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $40\,cm$, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς $10\,cm$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α) Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 4$ και η διαφορά είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$.

(Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i. Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2-\left(\alpha^2-1\right)x-\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta=\left(\alpha^2+1\right)^2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης, ως συνάρτηση του α.

(Μονάδες 10)

Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\rho_1=\alpha$ και $\rho_2=-\dfrac{1}{\alpha}$,

γ) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε $\left|\rho_1-\rho_2\right|=2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους, κ.α.).

Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηναίο κόστος $\mathrm{K}(\nu)$ της επιχείρησης, εάν γεμίζει ν τόνερ το μήνα.

(Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει τα μηναία έσοδα $\mathrm{E}(\nu)$ της επιχείρησης από την πώληση ν τόνερ το μήνα.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i. να μην έχει ζημιά.

(Μονάδες 7)

ii. να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=-x^2+2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2{,}999)\cdot f(-1{,}002).$$

(Μονάδες 7)

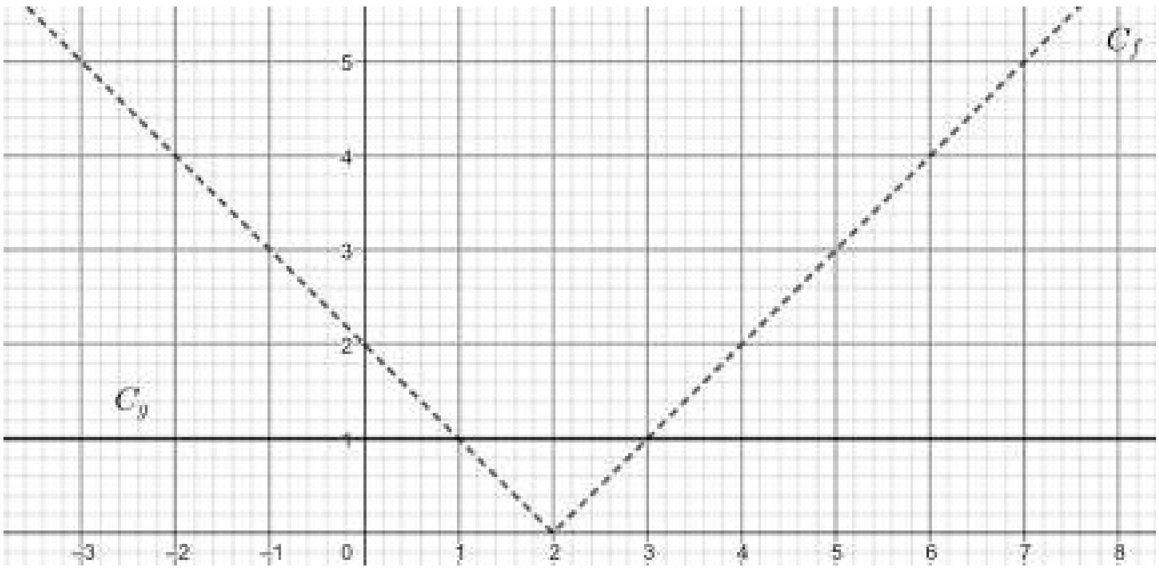
γ) Αν $-3<\alpha<3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2+2|\alpha|+3$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x)=|x-2| \quad \text{και} \quad g(x)=1,\ x\in\mathbb{R}.$$



α) Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος, να βρείτε

i. τα σημεία τομής των C_f και C_g.

(Μονάδες 5)

ii. τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g.

(Μονάδες 5)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα αi) και αii).

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η παράσταση $\mathrm{A}=\dfrac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$ τότε:

i. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

(Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)^2 - 4$ και $g(x) = |x-1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2 - 2x - 8.$$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\kappa = -\frac{8889}{4444}$, η τιμή της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, ποιο είναι το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(Μονάδες 4)

β)

i. Αν $\beta \neq 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

(Μονάδες 7)

ii. Πως αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$;

(Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μια ημέρα, η εταιρία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0{,}20x$$

Όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μια ημέρα, ταξίδεψε $400\ Km$;

(Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα ταξίδεψε ένας πελάτης ο οποίος για μια ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ;

(Μονάδες 5)

γ) Μια άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 80 + 0{,}10x$$

όπου, όπως και προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

(Μονάδες 10)

δ) Αν

$$f(x) = 60 + 0{,}20x \quad \text{και} \quad g(x) = 0{,}80 + 0{,}10x$$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α κα Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή κάθε μιας από τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα το ερωτήματος γ).

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1) \quad \text{με παραμέτρους } \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$, τότε:

i. $\beta^2 - 4\gamma > 0$.

(Μονάδες 3)

ii. Η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 6)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x) - 2} \leq 2$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa + 1)^2$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός.

(Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i. Να βρείτε την τιμή του κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.

(Μονάδες 8)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 72 είναι όρος της προόδου.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0$$

α) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β.

(Μονάδες13)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{K}=|\alpha-1|+|1-\beta|.$$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2-14x+8=0 \qquad (1)$$

και

$$8x^2-14x+3=0 \qquad (2)$$

(Μονάδες10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \qquad (3) \qquad \text{και} \qquad \gamma x^2+\beta x+\alpha=0 \qquad (4),$$

με $\alpha\cdot\gamma\neq 0$.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha\cdot\gamma\neq 0$, τότε

i. $\rho\neq 0$.

(Μονάδες 5)

ii. $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4).

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+1\geq \frac{5}{2}x$ (1).

(Μονάδες10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ,λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

i. Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των αριθμών κ,λ.

(Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι $|\kappa-\lambda|\geq \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν:

$\alpha_3 = 4,\ \alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$, $\nu = 1,2,3,...$ είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

(Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (α_ν) και S'_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_ν) αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}.$$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

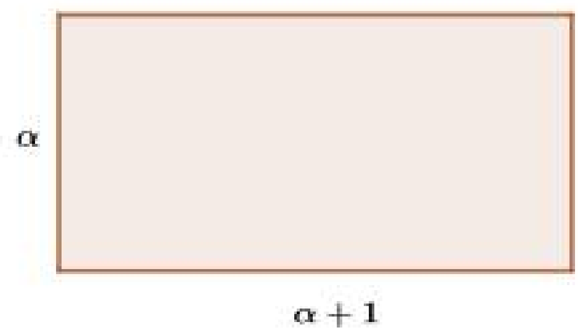
α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + x - 6 < 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$.

(Μονάδες 5)

γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο με πλευρές α και $\alpha + 1$.



Ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1$. Αν για τον εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $\mathrm{E} < 6$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

(Μονάδες 7)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x του οποίου η απόσταση από το 4 πάνω στο άξονα των πραγματικών είναι μικρότερη από 2.

i. Να δείξετε ότι $3x-4>0$.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού x από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

(Μονάδες 5)

iii. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x-3, & x>2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$.

(Μονάδες 7)

γ)

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 4)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=2x-\alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $|\alpha - 2| < 1$ και $|\beta - 3| \leq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 < \alpha < 3$.

(Μονάδες 4)

β) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο β.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $2\alpha - 3\beta$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $\frac{\alpha}{\beta}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι αριθμοί $2, x, 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τον αριθμό x, ώστε οι $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

(Μονάδες 7)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος $2,5,8,11,...$ και (β_ν) η γεωμετρική πρόοδος $2,4,8,16,...$, τότε να βρείτε:

i. Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν).

(Μονάδες 5)

ii. Την τιμή του ν, ώστε για το άθροισμα S_ν του γi) ερωτήματος να ισχύει:

$$2 \cdot (S_\nu + 24) = \beta_7 .$$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο μήκους α , πλάτους β και εμβαδού E . Οι αριθμοί α,E,β , με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E .

(Μονάδες 10)

β) Αν $\mathrm{E}=1$ και $\alpha+\beta=10$,

i. να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες α και β .

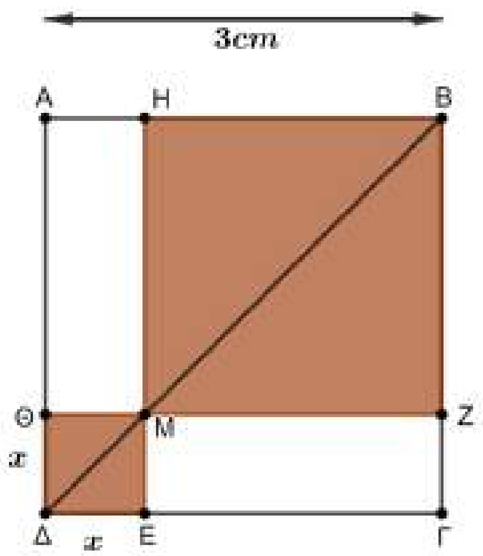
(Μονάδες 5)

ii. να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ πλευράς $ΑΒ = 3cm$ και τυχαίο σημείο $Μ$ που κινείται στη διαγώνιο $ΒΔ$ εσωτερικά (δηλαδή το Μ δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγωνίου).



α) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν $Ε$ των σκιασμένων τετραγώνων $ΗΒΖΜ$ και $ΘΜΕΔ$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Ε(x)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι $Ε(x) = 2x^2 - 6x + 9$, να αποδείξετε ότι $Ε(x) \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0,3)$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια θέση του $Μ$ πάνω στη $ΒΔ$ το εμβαδόν $Ε(x)$ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία ταξί με το όνομα «RED» χρεώνει τον πελάτη 1 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και $0,6$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Μια άλλη εταιρεία ταξί με το όνομα «YELLOW» χρεώνει τον πελάτη 2 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και $0,4$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α)

i. Αν $f(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «RED» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

$x\ (km)$	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

(Μονάδες 3)

ii. Αν $g(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «YELLOW» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

$x\ (km)$			
$g(x)$ (ευρώ)	2	$3,2$	$4,8$

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας «RED» είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

δ) Αν δυο πελάτες A και B μετακινηθούν με την εταιρεία «RED» και ο πελάτης A διανύσει 3 χιλιόμετρα περισσότερα από τον B, να βρείτε πόσα περισσότερα χρήματα θα πληρώσει ο A σε σχέση με τον B.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ($\hat{\mathrm{A}} = 90°$) με κάθετες πλευρές $\mathrm{AB} = x$ και $\mathrm{A\Gamma} = y$, έτσι ώστε $x + y = 10$.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathrm{E}(x)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι $\mathrm{E}(x) = \frac{1}{2}\left(-x^2 + 10x\right)$, να δείξετε ότι $\mathrm{E}\left(x\right) \leq \frac{25}{2}$, για κάθε $x \in \left(0,10\right)$.

(Μονάδες9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $x \in \left(0,10\right)$ ώστε το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ να γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$. Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 5x - 6 < 0$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $\mathrm{K} = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0$, με $\lambda\in(0,2)$.

α) Να βρείτε

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $\mathrm{E}\le 1$, για κάθε $\lambda\in(0,2)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in(0,2)$ για την οποία το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1. Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ και } g(x) = x + \alpha \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης ως συνάρτηση του λ.

(Μονάδες 7)

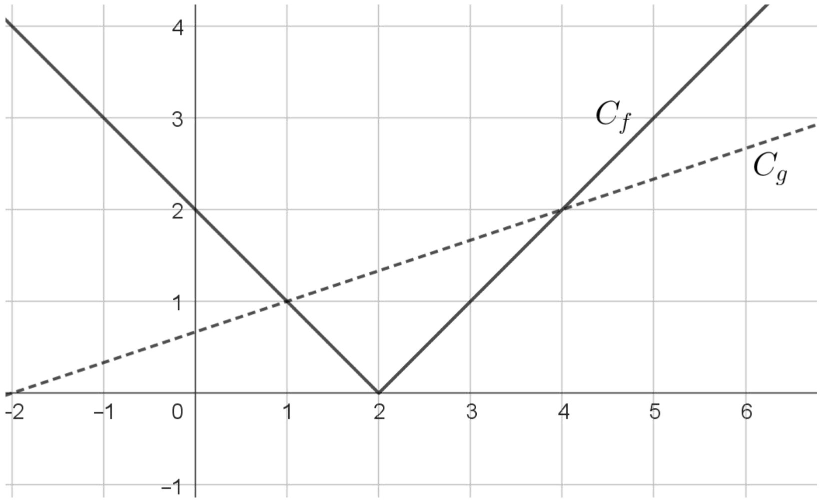
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με:

$$f(x) = |x-2| \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \qquad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$



α) Με βάση το σχήμα, να εκτιμήσετε την τιμή των συντεταγμένων των σημείων τομής γραφικών παραστάσεων C_f και C_g.

(Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς η παράσταση:

$$K = \sqrt{3|2-x| - (x+2)}.$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Το ποσό που θα πληρώσει (σε ευρώ) ένας κάτοικος μιας πόλης A ο οποίος καταναλώνει x κυβικά μέτρα νερού σε ένα χρόνο, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}0,5x+12, & \text{αν } 0\le x\le 30\\ 0,7x+6, & \text{αν } x>30\end{cases}.$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει κάποιος αν:

i. έλλειπε από το σπίτι του και δεν έχει καταναλώσει καθόλου νερό,

(Μονάδες 2)

ii. έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού,

(Μονάδες 3)

iii. έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη B, το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x)=12+0,6x, \text{ για } x\ge 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά μέτρα νερού. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης B, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\alpha < x_1 < x_2 < \beta,$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που προκύπτει από τη σχέση:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \qquad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός x είναι ο -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος αριθμός λ;

(Μονάδες 4)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ο 20, ποιος είναι ο εισαγόμενος αριθμός x;

(Μονάδες 6)

γ)

i. Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή:

$$4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0.$$

(Μονάδες 2)

ii. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

(Μονάδες 6)

iii. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο εξαγόμενος αριθμός λ.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ίσες ρίζες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < x_2$,

(Μονάδες 4)

ii. να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου και να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right), f(x_2+1).$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-3x-4=0$ (1)

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α,β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

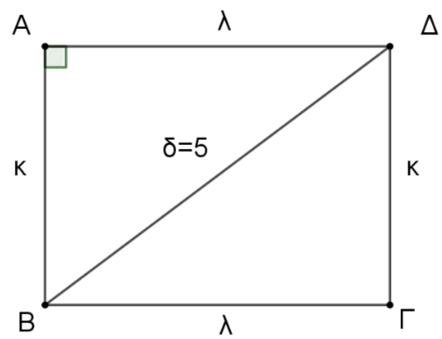
(Μονάδες 7)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ του οποίου η περίμετρος είναι $\Pi = 14\ cm$ και μια διαγώνιος $\delta = 5\ cm$.



α)

i. Με χρήση της ταυτότητας $(\kappa+\lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$, να δείξετε ότι για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E = 12\ cm^2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 7x + 12 = 0$.

(Μονάδες 7)

iii. Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 14\ cm$ πρέπει να έχει εμβαδόν $\mathrm{E} \leq \frac{49}{4}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$: (1) με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι η $\Delta = (2\lambda - 4)^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ .

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$, όπου $x \in R$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξτε ότι $\beta = -1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\beta = -1$

(i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

(Μονάδες 5)

(ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

(Μονάδες 7)

(iii) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $x^2-\lambda x+1$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\lambda^2-4$.

(Μονάδες 05)

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με

$f(x)=\lambda x-\lambda+2$ και $g(x)=x^2-\lambda+3$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

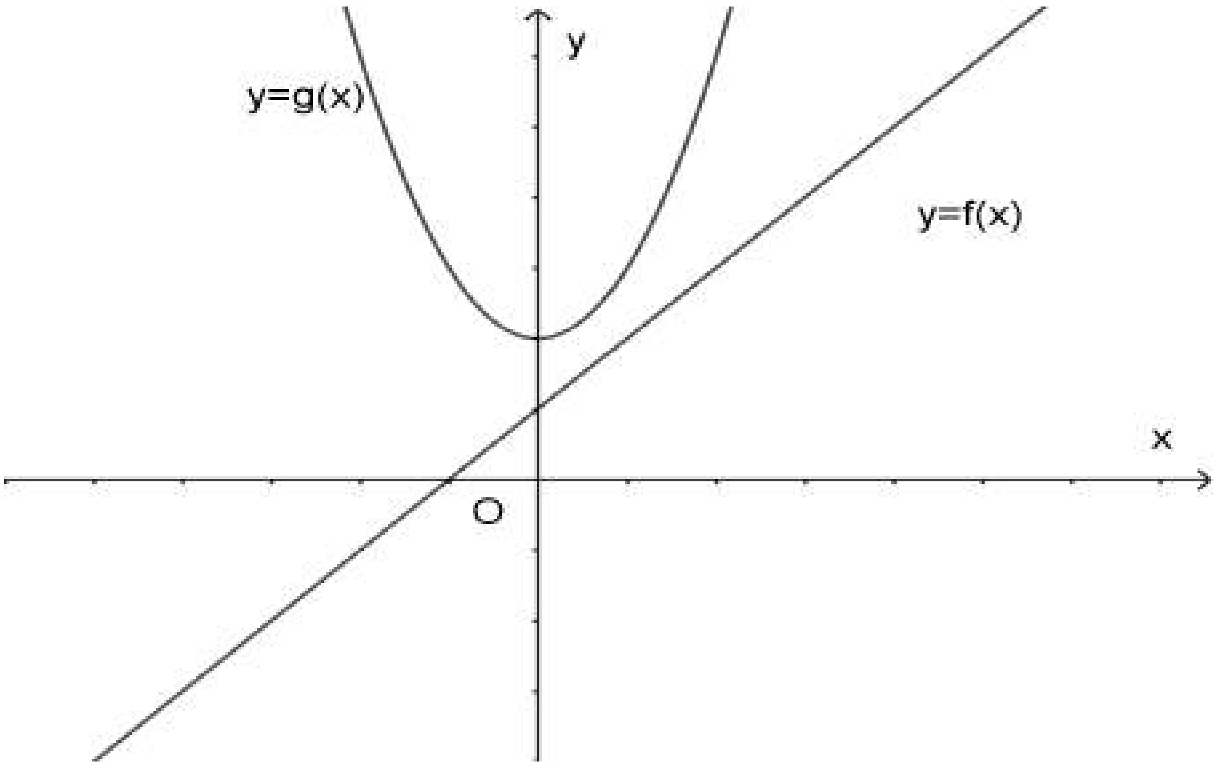
i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση από την οποία μπορούμε να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^2-\lambda x+1=0$.

(Μονάδες 05)

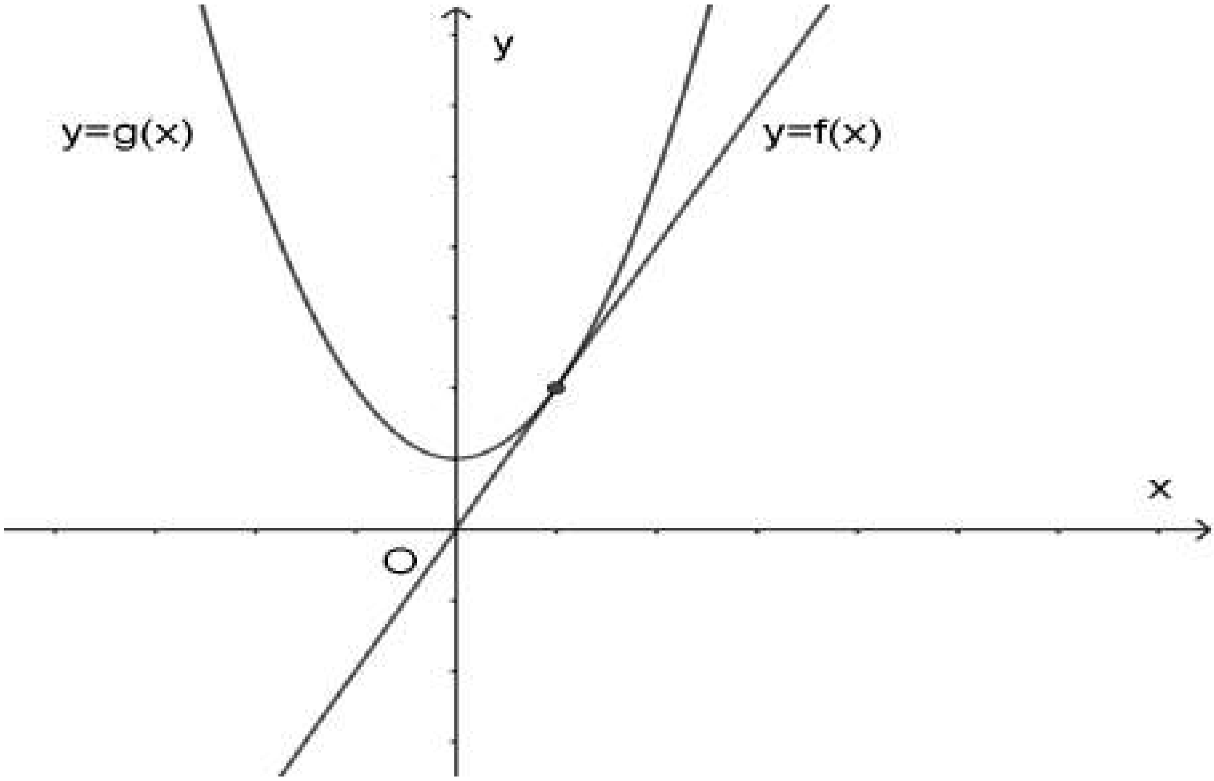
ii. Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ.

Με δεδομένο ότι $\lambda\in\{1,2,4\}$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ σε καθένα από τα σχήματα, δικαιολογώντας την απάντηση σας.

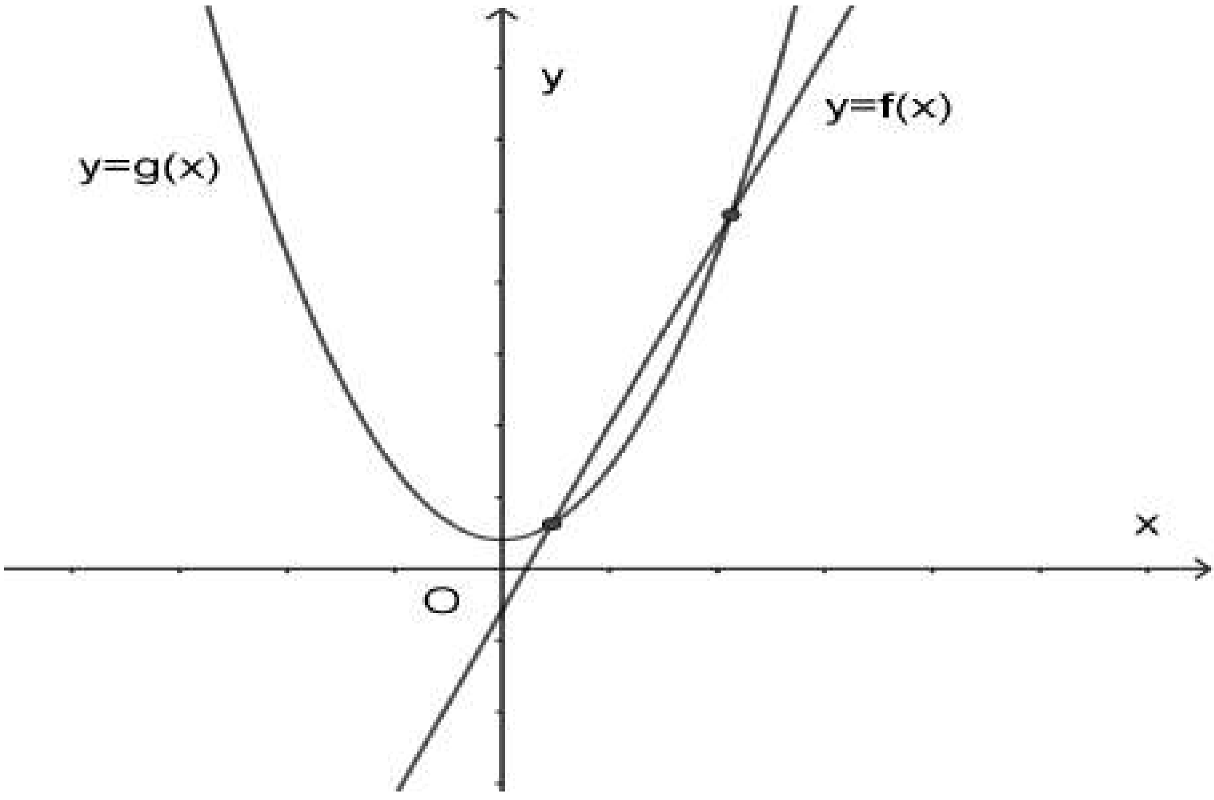
(Μονάδες 15)



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20$.

(Μονάδες 05)

β) Θεωρούμε την συνάρτηση f, που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο

$f(x) = x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5$.

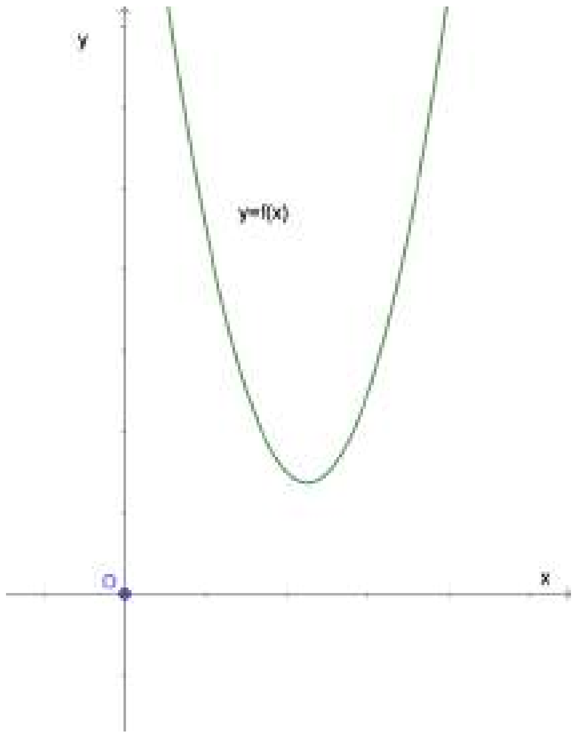
Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ.

i. Για τα δύο πρώτα σχήματα δίνεται ότι η παράμετρος $\lambda \in \{-2, 4\}$. Να βρείτε σε ποια τιμή του λ αντιστοιχεί το καθένα από τα σχήματα αυτά, δικαιολογώντας την απάντηση σας.

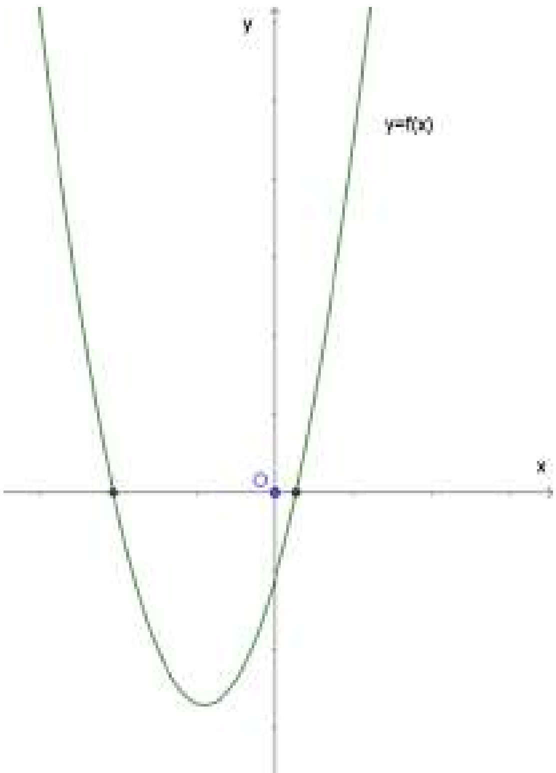
(Μονάδες 10)

ii. Για το σχήμα 3 να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\lambda \in \mathbb{R}$, δικαιολογώντας την απάντηση σας.

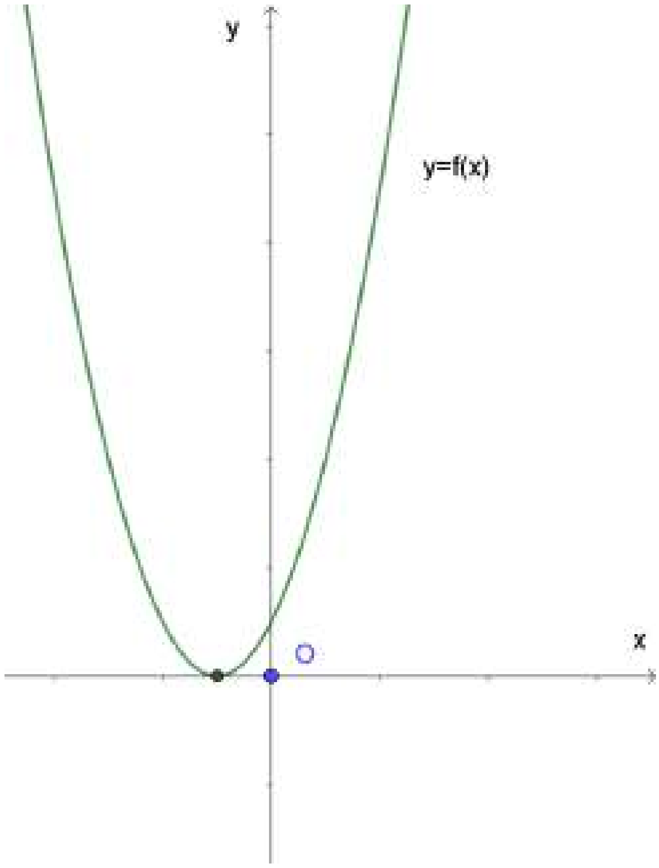
(Μονάδες 10)



Σχήμα 1



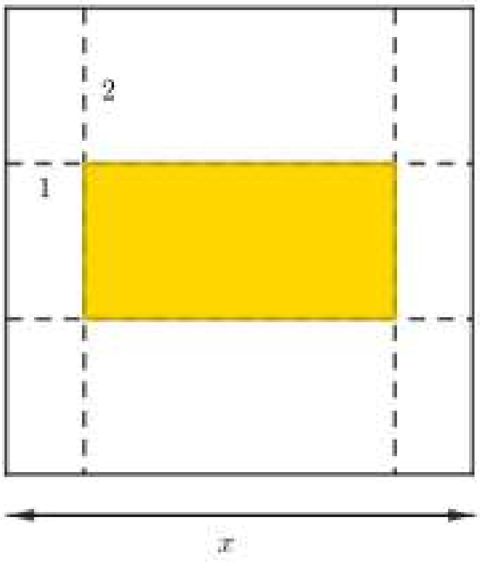
Σχήμα 2



Σχήμα 3

ΘΕΜΑ 4

Για μια επαγγελματική κάρτα επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $x\ cm$ $(5 \le x \le 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων (με κίτρινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα) περιβάλλεται από περιθώρια $2\ cm$ στο πάνω και στο κάτω μέρος της και $1\ cm$ δεξιά και αριστερά.



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$\mathrm{E}(x) = (x-2)(x-4),\ 5 \le x \le 10\ .$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $35\ cm^2$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24\ cm^2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες υπάρχουν 51200 βακτήρια , και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

(Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($\nu \leq 5$).

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

(Μονάδες 6)

ii. Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν.

(Μονάδες 6)

iii. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

(Μονάδες 7)