ΘΕΜΑ 4

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των $21€$ ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει την πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει $3€$ και κάθε επόμενος επιβάτης να πληρώνει $0{,}5€$ περισσότερα από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε πόσο θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

(Μονάδες 4)

β) Αν, για κάθε $\nu \leq 51$ ο αριθμός $\alpha_\nu$ εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51<sup>ος</sup> επιβάτης.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των $21€$ ανά εισιτήριο.

(Δίνεται: $\sqrt{10201} = 101$) (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda=-2$ και όταν $\lambda=3$.

(Μονάδες 8)

β) i. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda=5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

(Μονάδες 3)

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

(Μονάδες 6)

γ) Αν ισχύει $|\lambda^2-4\lambda-5|=4\lambda-\lambda^2+5$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{-1,5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα σημείο του ημιάξονα $Ox$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος $(\alpha_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ της οποίας οι τρεις πρώτοι όροι είναι:

$$\alpha_1 = x,\ \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4,\ \alpha_3 = x^2 - 2 \text{, με x ακέραιο.}$$

α) Να αποδείξετε ότι $x = 3$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να είναι ίσος με $2014$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + ... + \alpha_{15}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν πάνω σε μπλουζάκια και ίδρυσαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x) = 12,5x + 120$ και τα έσοδα από την πώληση τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x) = 15,5x$ .

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός $12,5$ και τι ο αριθμός $15,5$ στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση).

(Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$ και $\lambda\neq 0$, παράμετρος.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους $C_f$, $C_g$ έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι $C_f$, $C_g$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda\neq 2$ και $x_1$, $x_2$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των $C_f$, $C_g$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε να ισχύει $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε cm) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$.

α) Μετά πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

(Μονάδες 8)

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος $y = 175m$;

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες;

(Μονάδες 5)

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i. Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$ .

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β (i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

(Μονάδες 4)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

(Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η $20^{\eta}$ κυψέλη;

(Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη συλλέγει το μέλι, από μια κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει στην αποθήκη Α.

i. Ποια είναι η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την $3^{\eta}$ κυψέλη;

(Μονάδες 6)

ii. Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-\lambda)x^2-(\lambda^2-1)x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2$^{ου}$ βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2$^{ου}$ βαθμού.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου.

(Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την $7^{η}$ μέχρι και την $14^{η}$ σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά $d$ cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm

α) Να βρείτε ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

(Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i. Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

(Μονάδες 12)

ii. Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^oC$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^oF$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.
Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^oC$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^oK$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^oC$) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($^oK$) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^oF$) είναι η

$$K = \frac{F-32}{1{,}8} + 273$$

(Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278 $^oK$ μέχρι 283 $^oK$. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^oF$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί $\rho_1$ και $\rho_2$ ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3,-1)$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί $\rho_1$ και $\rho_2$ ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2,2)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός $x$ που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

(Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του $x$.

(Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

(Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x+4|+|x-14|=18$$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2$, $7$ και $x$ αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$

(Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$

(Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = |x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

(Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Σε έναν άξονα τα σημεία Α , Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς $5$, $9$ και $x$ αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$, τότε:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό $x$ που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

(Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-4x+2-\lambda^2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Αν $x_1$ και $x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε:

i) Να βρείτε το $S=x_1+x_2$.

ii) Να βρείτε το $P=x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού $\lambda$ .

(Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,

ii) να βρείτε τον αριθμό $\lambda$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f$ διέρχεται από το σημείο $(1,2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού $\alpha$ .

(Μονάδες 7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των $f$ και $g$ τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$.

(Μονάδες 4)

ii) Για $\alpha=2$ υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των $f$ και $g$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των $f$ και $g$ είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2-\alpha x+1=0$ και στη συνέχεια ότι για $\alpha=3$, $\alpha=-2$, $\alpha=1$ έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) Να βρείτε

i) το ποσό $\alpha_\nu$ που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον ν$^o$ (νιοστό) μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

(Μονάδες 4)

ii) το ποσό $\beta_\nu$ που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον ν$^o$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

(Μονάδες 4)

iii) το ποσό $\mathrm{A}_\nu$ που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

(Μονάδες 5)

iv) το ποσό $\mathrm{B}_\nu$ που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

(Μονάδες 5)

β)

i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

(Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός $\alpha$ με $0<\alpha<1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους αριθμούς:

$$0,1,\alpha,\alpha^2,\sqrt{\alpha}\,.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

(Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1+\alpha}<1+\sqrt{\alpha}$ .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού $\mathrm{A}$ της $f$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathrm{A}$ ισχύει $f(x)=|x|-2$.

(Μονάδες 9)

γ) Για $x\in\mathrm{A}$, να λύσετε την εξίσωση $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \text{ και } g(x) = \alpha x - 5, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του $\alpha$.

(Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$.

(Μονάδες 5 + 5 = 10)

ΘΕΜΑ 4

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f$, με

$$f(x) = (\lambda+1)x^2 - (\lambda+1)x + 2\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$.

(Μονάδες 3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f$.

(Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της $f$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{B}(2,0)$, να βρείτε την τιμή του $\lambda$ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

(Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f$ βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση $C_f$ της συνάρτησης $f$ δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της $C_f$ που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ σημείο της $C_f$. Αν για την τετμημένη $x$ του σημείου $\mathrm{M}$ ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f$, με

$$f(x)=\begin{cases}-x+2, & \alpha\nu \;\; x<0\\ x+2, & \alpha\nu \;\; x\geq 0\end{cases}$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης $C_f$ της $f$ με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

β)

i) Να χαράξετε τη $C_f$ και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

(Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ)

i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού $\alpha$, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη $C_f$ σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του $\alpha$ που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της $C_f$ με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f$ και $g$, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f$ και $g$.

(Μονάδες 5)

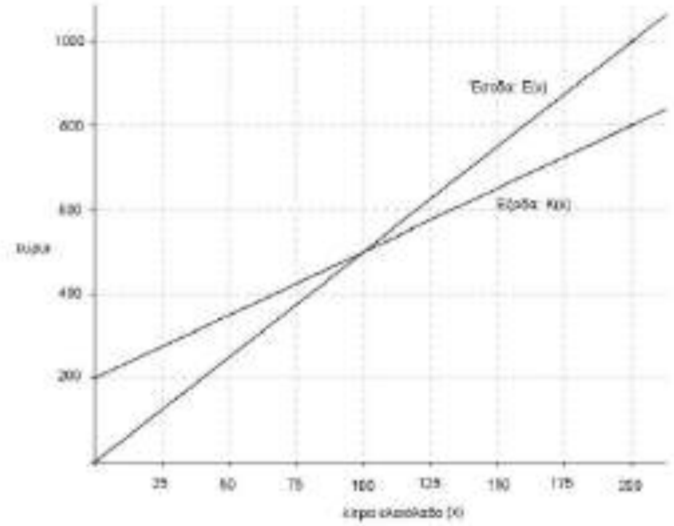
β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f$ είναι κάτω από εκείνη της $g$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της $f$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

(Μονάδες 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

(Μονάδες 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η $1^η$ σειρά έχει 16 καθίσματα και η $7^η$ σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

(Μονάδες 05)

β) Να βρείτε τον γενικό όρο της προόδου.

(Μονάδες 04)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

(Μονάδες 05)

δ) Αν στην $1^η$ σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη $2^η$ υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην $3^η$ υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη $2^η$ και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i. Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στη θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά από το ατύχημα.

(Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;

(Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1$, $x\in R$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f$, $g$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x+a$. Να δείξετε ότι:

i. Αν $a>1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f$, $h$ έχουν δύο κοινά σημεία.

ii. Αν $a<1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f$, $h$ δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4

Το σύστημα θέρμανσης και ψύξης στο σπίτι της Ελένης έχει σχεδιαστεί, ώστε να διατηρείται η θερμοκρασία στο εσωτερικό του όσο το δυνατόν πιο κοντά στους 23°C. Η Ελένη σε μια ανοιξιάτικη ημέρα σημείωσε τη θερμοκρασία $T$ μέσα στο σπίτι της σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Παρατήρησε ότι η θερμοκρασία $T$ είχε απόσταση 2°C από την επιθυμητή θερμοκρασία των 23°C.

α) Να γράψετε μία εξίσωση για τη θερμοκρασία $T$, που να αποτυπώνει αυτό που παρατήρησε η Ελένη.

(Μονάδες 4)

β) Το σύστημα θέρμανσης και ψύξης του σπιτιού επίσης έχει ρυθμιστεί, ώστε να διατηρεί την εσωτερική θερμοκρασία $T$ σε ένα εύρος «άνετων» θερμοκρασιών. Αυτό μπορεί να προκύψει από τη σχέση:

$$|T-23|\leq 5.$$

Ποιο είναι αυτό το εύρος των θερμοκρασιών $T$ που επιτρέπει το σύστημα θέρμανσης και ψύξης του σπιτιού της Ελένης;

(Μονάδες 6)

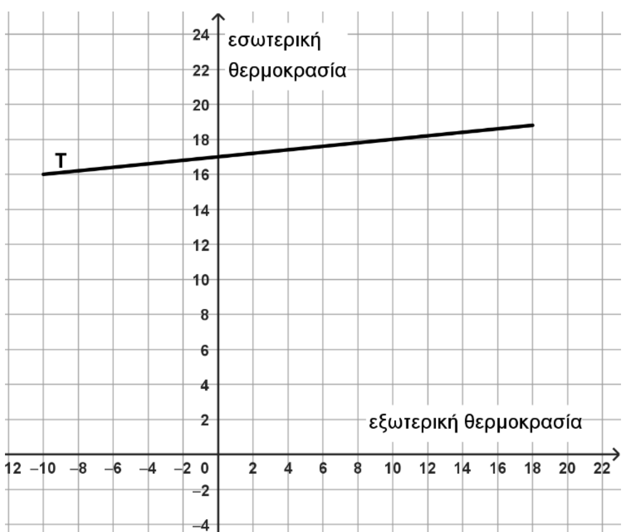
γ) Το σύστημα ψύξης έχει ρυθμιστεί, ώστε να δροσίζει το χώρο. Όταν η εξωτερική θερμοκρασία είναι $x$, η θερμοκρασία μέσα στο σπίτι δίνεται από τον τύπο

$T_1(x)=\frac{1}{3}x+17$, όπου $28°C<x\leq 40°C$.

Για ποιο εύρος εξωτερικών θερμοκρασιών το σπίτι θα διατηρείται σε μια άνετη θερμοκρασία μεταξύ 18°C και 28°C;

(Μονάδες 9)

δ) Το σύστημα θέρμανσης από την άλλη είναι αυτό που κρατάει ζεστό το σπίτι. Η γραφική παράσταση δείχνει τη θερμοκρασία $T$ μέσα στο σπίτι, όταν η εξωτερική θερμοκρασία $x$ κυμαίνεται μεταξύ $-10$°C και $18$°C .



Ποια από τις παρακάτω προτάσεις θα μπορούσε να περιγράψει λεκτικά τη συνάρτηση της γραφικής παράστασης;

1. Για κάθε έναν βαθμό Κελσίου που αυξάνεται η εξωτερική θερμοκρασία, η εσωτερική θερμοκρασία αυξάνεται κατά το $1/10$ του βαθμού.

2. Η εξωτερική θερμοκρασία αυξάνεται κατά $0{,}1$ βαθμούς Κελσίου για κάθε έναν βαθμό που αυξάνεται η εσωτερική.

3. Η εσωτερική θερμοκρασία είναι το $1/10$ της εξωτερικής.

4. Η εξωτερική θερμοκρασία είναι αυξημένη κατά $17$ βαθμούς περισσότερο από την εξωτερική αυξημένη κατά το $1/10$ της εσωτερικής.

(Μονάδες 6)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ένας μαραγκός έχει μια μικρή επιχείρηση που φτιάχνει και πουλάει ξύλινα τραπέζια. Επιθυμώντας να αυξήσει τα κέρδη του, αποφάσισε αρχικά να μελετήσει την παραγωγή και τις πωλήσεις του.

Υπολόγισε ότι, όταν πωλούνται $x$ τραπέζια, η τιμή πώλησης σε ευρώ ενός τραπεζιού είναι $p(x) = 120 - x$, με $0 \leq x \leq 100$.

α) Ποιος είναι ο τύπος που εκφράζει τα έσοδα της επιχείρησης από την πώληση $x$ τραπεζιών;

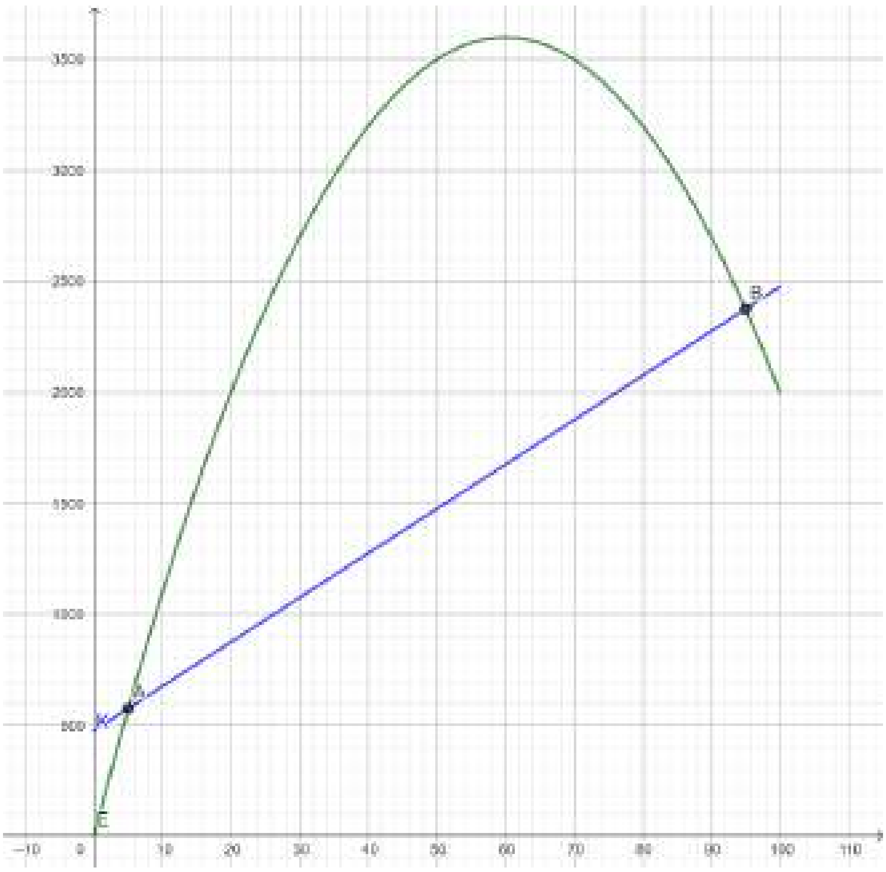
(Μονάδες 3)

Στη συνέχεια βρήκε επίσης ότι το μηνιαίο κόστος παραγωγής $K(x)$ σε ευρώ, όταν παράγει $x$ τραπέζια, προκύπτει από τη σχέση: $K(x) = 20x + 475$.

β) Να δώσετε μια ερμηνεία για το τι εκφράζει ο αριθμός 20 και τι ο αριθμός 475 στον τύπο του $K(x)$.

(Μονάδες 4)

γ) Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των εσόδων $E(x)$ και του μηνιαίου κόστους παραγωγής $K(x)$ ως συνάρτηση της πώλησης $x$ τραπεζιών.



i. Να παρατηρήστε τις γραφικές παραστάσεις και να δώσετε μια λεκτική ερμηνεία για το τι παριστάνουν τα σημεία $A(5{,}575)$ και B(95, 2375) στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 6)

ii. Πότε η επιχείρηση έχει κέρδος και πότε έχει ζημία; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

(Μονάδες 6)

iii. Να εξηγήσετε γιατί δεν μπορεί η επιχείρηση να παράγει και να πουλήσει $110$ τραπέζια.

(Μονάδες 6)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ένα είδος γρήγορα αναπτυσσόμενων τοξικών φυκιών εμφανίζεται την 1η Απριλίου, σε μια λίμνη ως αποτέλεσμα της προβληματικής διαχείρισης της γύρω περιοχής (κοντινά αγροκτήματα με απόβλητα και ένα εγκαταλελειμμένο ορυχείο υδραργύρου). Τα φύκια εμφανίζονται αρχικά σε μία μικρή ποσότητα $\alpha$, χωρίς να γίνουν αμέσως αντιληπτά. Αρχίζουν να αναπτύσσονται και να καλύπτουν την επιφάνεια της λίμνης με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε μέρα να καλύπτουν τη διπλάσια επιφάνεια από εκείνη που κάλυπταν την προηγούμενη ημέρα. Εάν συνεχίσουν να αναπτύσσονται με αυτόν τον ρυθμό, η επιφάνεια $\Lambda$ της λίμνης θα καλυφθεί πλήρως στις 30 Απριλίου, θέτοντας σε κίνδυνο όποιον οργανισμό ζει κοντά ή μέσα στη λίμνη.

α) Να γράψετε μία σχέση που να περιγράφει την επιφάνεια $\Lambda_9$ της λίμνης που έχει καλυφθεί από τα φύκια στις 9 Απριλίου και μία σχέση που να περιγράφει την επιφάνεια της λίμνης που έχει καλυφθεί από τα φύκια οποιαδήποτε ημέρα $\nu$ του Απριλίου.

(Μονάδες 6)

β) Ποιο μέρος της λίμνης έχει καλυφθεί από τα φύκια στις 26 Απριλίου; Να εξηγήσετε πώς καταλήξατε στην απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Ποια ημέρα τα φύκια θα έχουν καλύψει τη μισή λίμνη; Να εξηγήσετε πώς καταλήξατε στην απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

δ) Στις 29 Απριλίου βιολόγοι φτάνουν στη λίμνη και προσπαθούν να την καθαρίσουν από τα φύκια, όμως δεν καταφέρνουν να τα αφαιρέσουν εντελώς όλα. Εκτιμούν ότι το $0,5\%$ της συνολικής επιφάνειας της λίμνης παραμένει καλυμμένο με φύκια. Σε πόσες ημέρες θα έχει καλυφθεί πάλι όλη η λίμνη με φύκια μετά από αυτή την παρέμβαση των βιολόγων; Να αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της

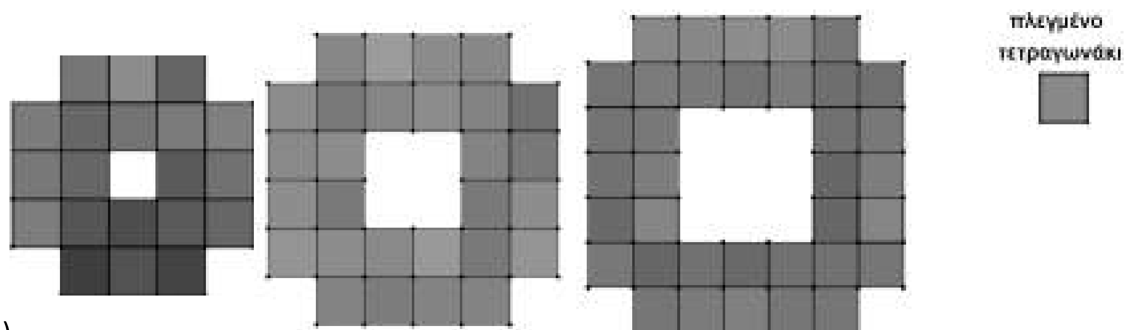
Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ο Αντρέας θέλει να φτιάξει μια μάλλινη κουβέρτα ενώνοντας μεταξύ τους πλεχτά σχήματα, όπως αυτά που φαίνονται παρακάτω, και καλύπτοντας τα κενά με ύφασμα.

Χρειάζεται να υπολογίσει πόσα τετραγωνάκια θα πλέξει, για να ξέρει πόσα κουβάρια μαλλί πλεξίματος να αγοράσει. Το κάθε κουβάρι είναι $140m$ μαλλί.

Όπως βλέπουμε, σε κάθε ένα από τα σχήματα του παρακάτω σχεδίου υπάρχει μια τετράγωνη «τρύπα» στη μέση. Τα σχήματα στο παρακάτω σχέδιο δεν είναι ίδια, ακολουθούν όμως ένα μοτίβο, δηλαδή στο 1$^{ο}$ σχήμα η «τρύπα» αντιστοιχεί σε ένα τετραγωνάκι, στο 2$^{ο}$ σχήμα η «τρύπα» αντιστοιχεί σε 4 τετραγωνάκια, στο 3$^{ο}$ σχήμα σε 9, κοκ. Για το κάθε πλεγμένο τετραγωνάκι χρειαζόμαστε $16cm$ μαλλί.




α)

i. Από πόσα πλεγμένα τετραγωνάκια αποτελείται το δέκατο σχήμα στη σειρά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

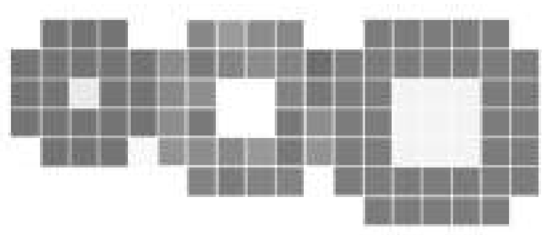
ii. Η «τρύπα» στη μέση του δέκατου σχήματος σε πόσα τετραγωνάκια αντιστοιχεί; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)

β) Από πόσα πλεγμένα τετραγωνάκια αποτελείται το $\nu$ −οστό σχήμα στη σειρά; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

(Μονάδες 4)

γ) Ο Αντρέας σκέφτηκε να φτιάξει μια ομάδα σχημάτων του μοτίβου, την οποία θα επαναλαμβάνει για να πλέξει την κουβέρτα. Μια τέτοια ομάδα είναι π.χ. η παρακάτω, όπου φαίνονται τα τρία πρώτα σχήματα. Μια άλλη ομάδα θα μπορούσε να έχει τα τέσσερα πρώτα σχήματα, ή τα πέντε πρώτα κ.ο.κ.



i. Να υπολογίσετε πόσα σχήματα του μοτίβου θα πρέπει να φτιάξει, ώστε τα τετραγωνάκια που θα πλέξει να είναι μεταξύ $500$ και $600$.

(Μονάδες 8)

ii. Ο Αντρέας αποφάσισε να φτιάξει τα 10 πρώτα σχήματα του μοτίβου και, για να καλύψει όσο το δυνατόν περισσότερα κενά στη κουβέρτα, αποφάσισε να πλέξει 7 τέτοιες δεκάδες και επιπλέον κάποια μεμονωμένα σχήματα. Πόσα περίπου κουβάρια μαλλί θα πρέπει να αγοράσει, για να φτιάξει την κουβέρτα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

Δίνονται: $\sqrt{616} \cong 24{,}8$ και $\sqrt{516} \cong 22{,}7$.

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο υλικό για τη μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας στις μέρες μας είναι ο χαλκός, ο οποίος όχι μόνο είναι εξαιρετικός αγωγός του ηλεκτρισμού, αλλά και ένα φθηνό υλικό με υψηλή ολκιμότητα (μορφοποιείται εύκολα σε σύρμα). Η αντίσταση $(R)$ του χαλκού αλλάζει όταν μεταβάλλεται η θερμοκρασία $(T)$, και συγκεκριμένα αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας. Μέσα σε ένα ευρύ φάσμα θερμοκρασιών (περίπου $-200°C$ έως $500°C$), αυτή η σχέση είναι γραμμική, δηλαδή της μορφής $R = \alpha T + \beta$. Για ένα συγκεκριμένο κομμάτι χάλκινου σύρματος, η αντίσταση είναι $R = 12{,}56\ \Omega\ (Ohm)$ σε θερμοκρασία $T = 0°C$. Όταν η θερμοκρασία αυξάνεται στους $27°C$, η αντίσταση αυξάνεται στα $13{,}8\ \Omega$.

α) Να βρείτε την εξίσωση που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της αντίστασης $R$ στο σύρμα σε σχέση με τη θερμοκρασία του $T$.

(Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε την κλίση της ευθείας $R = \alpha T + \beta$ που βρήκατε στο α) ερώτημα και να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω προτάσεις περιγράφει τι αντιπροσωπεύει αυτή η κλίση. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Τη μεταβολή της αντίστασης, όταν η θερμοκρασία αυξάνεται κατά $1°C$.

ii. Τη αντίσταση, όταν η θερμοκρασία είναι $0°C$.

iii. Τη θερμοκρασία, στην οποία η αντίσταση θα ήταν $0\ \Omega$.

iv. Τη μεταβολή της θερμοκρασίας, όταν η αντίσταση αυξάνεται κατά $1\ \Omega$.

(Μονάδες 6)

γ) Γενικά, όσο μικρότερη είναι η αντίσταση στο σύρμα, τόσο μειώνονται οι απώλειες ισχύος, όταν περνάει ρεύμα. Γι’ αυτό θέλουμε να έχουμε όσο το δυνατόν μικρότερη αντίσταση. Με δεδομένο ότι σε ένα ευρύ φάσμα θερμοκρασιών η σχέση μεταξύ της αντίστασης και της θερμοκρασίας περιγράφεται από την εξίσωση $R = 0{,}046T + 12{,}56$, να βρείτε:

i. Σε ποια θερμοκρασία η αντίσταση θα μειωνόταν στα $10{,}26\ \Omega$.

(Μονάδες 4)

ii. Μεταξύ ποιων τιμών θα κυμαίνεται η αντίσταση του σύρματος, αν $d(T, -50℃) \leq 50℃$.

(Μονάδες 8)

Δίνεται ότι $1{,}24 \div 27 \cong 0{,}046$.

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Η Βάσω θα ήθελε να επισκεφθεί την Πάρο την πρώτη εβδομάδα του Ιουλίου. Τα εισιτήρια και το ξενοδοχείο θα στοιχίσουν 285 ευρώ. Αποφάσισε λοιπόν την πρώτη εβδομάδα του Ιανουαρίου να βάλει στην άκρη 5 ευρώ για το ταξίδι, τη δεύτερη εβδομάδα 7 ευρώ, την τρίτη 9 ευρώ κ.ο.κ.


**285€/7 ημέρες**

α) Να δείξετε ότι τα χρήματα που εκφράζουν το ποσό που αποταμιεύει η Βάσω κάθε εβδομάδα είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

(Μονάδες 7)

β)

i. Πόσα χρήματα θα μαζέψει σε 1 μήνα;

(Μονάδες 4)

ii. Να εξετάσετε αν θα έχει μαζέψει έγκαιρα τα χρήματα που χρειάζεται για να πάει στην Πάρο.

(Μονάδες 7)

γ) Προς το τέλος Ιανουαρίου η Βάσω πρότεινε στη φίλη της την Κατερίνα να κάνουν μαζί αυτό το ταξίδι. Της Κατερίνας της άρεσε η ιδέα, είχε ήδη 30 ευρώ στην άκρη, οπότε άρχισε αμέσως να εξοικονομεί χρήματα, για να συμπληρώσει το ποσό. Τον Φεβρουάριο κατάφερε και έβαλε στην άκρη 4 ευρώ, τον Μάρτιο 10 ευρώ, τον Απρίλιο 25 ευρώ κ.ο.κ. Θα καταφέρει να έχει εγκαίρως το ποσό που χρειάζεται για το ταξίδι;

(Μονάδες 7)

Δίνεται $\sqrt{1156} = 34$ και $5^5 = 3125$.

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Η καρδιά στον άνθρωπο χτυπά περισσότερο από 100.000 φορές την ημέρα. Κάθε φορά που χτυπά, διώχνει μια ποσότητα αίματος στις αρτηρίες, η οποία αυξάνει την πίεση. Η συστολική πίεση είναι η πίεση που ασκεί το αίμα στο τοίχωμα των αρτηριών, καθώς φεύγει από την καρδιά, ενώ η διαστολική πίεση είναι η πίεση που ασκεί το αίμα στα τοιχώματα των αρτηριών, όταν η καρδιά ηρεμεί.

Οι φυσιολογικές τιμές της αρτηριακής πίεσης για τους ενήλικες είναι για τη διαστολική $(p)$ μεταξύ $60\ έως\ και\ 80\ mmHg$ και για τη συστολική $(P)$ μεταξύ $90$ έως και $120\ mmHg$ (χιλιοστά της στήλης του υδραργύρου). Η μέτρηση της αρτηριακή πίεσης γίνεται με δυο τρόπους: με άμεση μέτρηση, μια διαδικασία επεμβατική που γίνεται μόνο στο νοσοκομείο, και με έμμεση μέτρηση, που γίνεται με χρήση ενός κοινού πιεσόμετρου στο σπίτι ή στο φαρμακείο.

Η άμεση μέτρηση δείχνει την πραγματική πίεση και έχει κάποια απόκλιση από τη μέτρηση με το πιεσόμετρο. Έχουμε ένα ηλεκτρονικό πιεσόμετρο, που ξέρουμε ότι δίνει τιμές μετρήσεων μικρότερες κατά $4\ mmHg$ από τις πραγματικές.

α) Για κάθε ένα από τα δύο είδη πίεσης (συστολική και διαστολική), να βρείτε μια σχέση με την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε την άμεση τιμή της πίεσης, όταν γνωρίζουμε την έμμεση πίεση.

(Μονάδες 6)

β) Οι μετρήσεις που μας δίνει το πιεσόμετρο είναι $P'/p'\ mmHg$. Θεωρούμε πως ένας ασθενής έχει υπόταση, αν η αρτηριακή του πίεση είναι κάτω από 90/60 mmHg, και υπέρταση, όταν η αρτηριακή του πίεση είναι πάνω από 140/90 mmHg σε επαναλαμβανόμενες μετρήσεις. Αν μετράμε την πίεση με πιεσόμετρο, ποιες τιμές ορίζουν αν έχουμε υπόταση ή υπέρταση;

(Μονάδες 8)

γ) Το εύρος παλμών είναι η διαφορά μεταξύ της συστολικής $(P)$ και της διαστολικής $(p)$ αρτηριακής πίεσης. Ένα φυσιολογικό εύρος παλμών κυμαίνεται μεταξύ $40$ και $60\ mmHg$.

i. Ένα άτομο μετράει με το πιεσόμετρο και έχει αρτηριακή πίεση: $P'/p'\ mmHg$. Να γράψετε μια ανίσωση που δείχνει ότι το εύρος παλμών του είναι μεταξύ $40$ και $60\ mmHg$.

(Μονάδες 5)

ii. Αν γνωρίζουμε ότι η διαστολική πίεση $p'$ ενός ατόμου είναι $80\ mmHg$, ποιο εύρος τιμών μπορεί να έχει η συστολική του πίεση $P'$, ώστε το εύρος παλμών του να παραμένει φυσιολογικό;

(Μονάδες 6)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

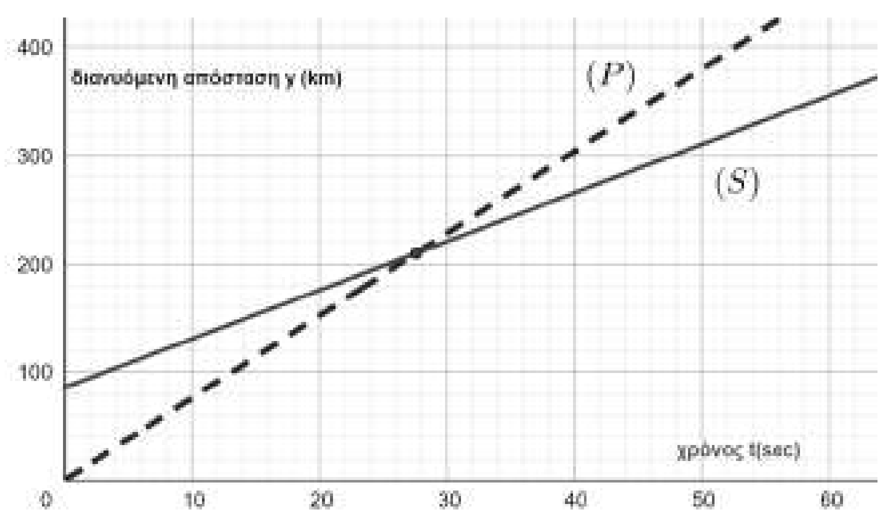
ΘΕΜΑ 4

Οι σεισμοί μπορούν να προκαλέσουν τεράστιες ζημιές, συμπεριλαμβανομένης της απώλειας ανθρώπινων ζωών, και έτσι είναι ένας σημαντικός τομέας μελέτης. Ο προσδιορισμός της θέσης του επίκεντρου ενός σεισμού (δηλαδή του σημείου της επιφάνειας της γης που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το πραγματικό κέντρο του σεισμού) είναι χρήσιμος για την πρόβλεψη ζημιών και της συμπεριφοράς μελλοντικών σεισμών. Μια τεχνική για να προσδιοριστεί το επίκεντρο περιλαμβάνει τον υπολογισμό της απόστασής του από έναν σεισμογράφο. Αυτό μπορεί να γίνει με τη μελέτη των διαφορετικών κυμάτων που παράγονται από τον σεισμό (σεισμικά κύματα).

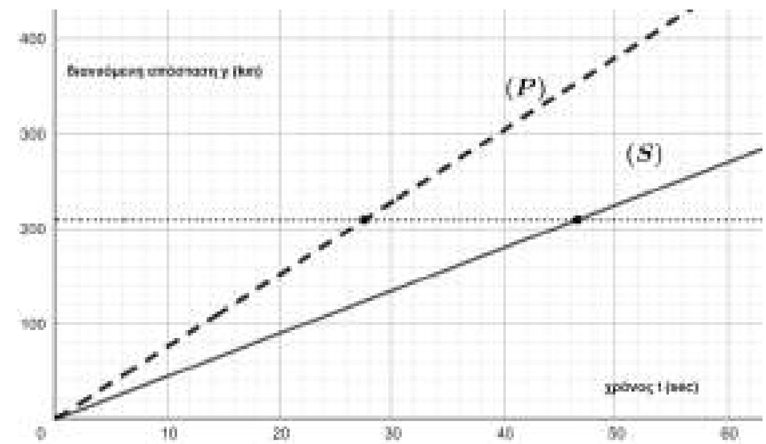
Αυτοί οι τύποι κυμάτων περιλαμβάνουν τα κύματα $P$ (πρωτεύοντα κύματα) και τα κύματα $S$ (δευτερεύοντα κύματα). Από μια σεισμική δόνηση ξεκινούν ταυτόχρονα τόσο τα κύματα $P$ όσο και τα κύματα $S$. Τα κύματα $P$ ταξιδεύουν πιο γρήγορα κοντά στην επιφάνεια της γης από τα κύματα $S$.

α) Ποιο από τα παρακάτω γραφήματα περιγράφει τις πληροφορίες που αφορούν τα κύματα $P$ και $S$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

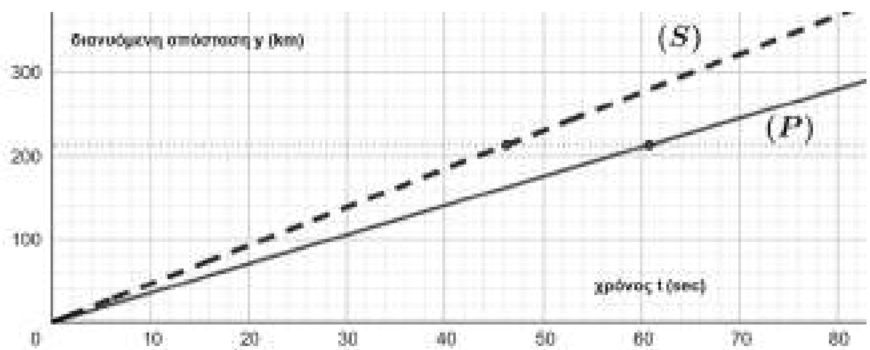
Α.



Β.




Γ.




(Μονάδες 8)

β) Κοντά σε έναν σεισμογράφο τα κύματα $P$ ταξιδεύουν με ταχύτητα $7{,}6\ km/s$ και τα κύματα $S$ με ταχύτητα $4{,}5\ km/s$. Το κύμα $P$ φτάνει στο σεισμογράφο $19 sec$ (δευτερόλεπτα) πριν από το κύμα $S$. Ο σεισμογράφος απέχει από το επίκεντρο του σεισμού απόσταση $d$ και $t_P$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται το κύμα $P$, για να φτάσει από το επίκεντρο του σεισμού στον σεισμογράφο. Να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών $(P)$ και $(S)$ που αναπαριστούν την κίνηση των κυμάτων $P$ και $S$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

ii. Τον χρόνο που χρειάζεται το κάθε κύμα, για να φτάσει από το επίκεντρο του σεισμού στον σεισμογράφο, και την απόσταση $d$ του σεισμογράφου από το επίκεντρο του σεισμού.

(Μονάδες 9)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Δύο μοτοσυκλέτες κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις στην Εγνατία οδό. Η μία ξεκινά από την Καβάλα με σταθερή ταχύτητα $120km/h$ και η άλλη ξεκινά ταυτόχρονα από τα Ιωάννινα με σταθερή ταχύτητα $100km/h$. Η Καβάλα απέχει $407$ χιλιόμετρα από τα Ιωάννινα.


Οι αναβάτες θέλουν να μπορούν να συνεννοηθούν. Για τον λόγο αυτό είναι εξοπλισμένοι με ασύρματους ενδοεπικοινωνίας, αλλά πρέπει να είναι σε απόσταση το πολύ $10$ χιλιομέτρων η μια μοτοσυκλέτα από την άλλη, για να μπορούν να έρθουν σε επαφή. Αν $t$ είναι ο χρόνος σε ώρες μετά την αρχή του ταξιδιού:

α) Πώς εκφράζεται η απόσταση που έχει κάθε μοτοσυκλέτα από την Καβάλα ως συνάρτηση του χρόνου $t$;

(Μονάδες 6)

β) Πότε θα μπορέσουν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους οι αναβάτες;

(Μονάδες 8)

γ) Πότε θα διασταυρωθούν και πόσα χιλιόμετρα θα έχει διανύσει κάθε μοτοσυκλέτα;

(Μονάδες 7)

δ) Μετά τη διασταύρωσή τους και καθώς θα απομακρύνεται η μια μοτοσυκλέτα από την άλλη, για πόσο χρόνο ακόμα θα μπορούν να επικοινωνούν οι αναβάτες χρησιμοποιώντας τους ασυρμάτους;

(Μονάδες 4)

Δίνεται ότι: $417 \div 220 \cong 1{,}9$ και $397 \div 220 \cong 1{,}8$

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Η Νεφέλη και ο Ιάσονας θέλουν να ανοίξουν ένα μικρό καφέ στη γειτονιά τους και, για να πραγματοποιήσουν το σχέδιό τους, σκέφτονται να επενδύσουν ένα αρχικό κεφάλαιο μαζί. Αφού συζήτησαν τα οικονομικά τους, η Νεφέλη αποφάσισε να επενδύσει $4.000$ ευρώ περισσότερα από τον Ιάσωνα.

α) Αν $x$ είναι το ποσό που θα επενδύσει ο Ιάσονας, να γράψετε μία σχέση που να εκφράζει το συνολικό ποσό που θα επενδύσουν μαζί ως συνάρτηση του $x$.

(Μονάδες 4)

β) Ο λογιστής τους τους ενημέρωσε ότι για να έχουν μια πιο ασφαλή επένδυση, θα πρέπει το συνολικό ποσό που θα επενδύσουν να είναι από $16.000$ ευρώ έως $30.000$ ευρώ.

i. Πόσο είναι το μικρότερο και πόσο το μεγαλύτερο ποσό που μπορεί να επενδύσει ο Ιάσονας;

(Μονάδες 5)

ii. Οι οικονομίες της Νεφέλης είναι $20.000$ ευρώ. Με βάση τα παραπάνω θα μπορούσε να επενδύσει όλο αυτό το ποσό; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

(Μονάδες 6)

iii. Ποιο είναι το διάστημα των ποσών που μπορεί να επενδύσει η Νεφέλη;

(Μονάδες 5)

γ) Η Νεφέλη σκέφτεται να επενδύσει $17.000$ ευρώ και να δανείσει $3.000$ ευρώ στον Ιάσονα, ώστε να συμπεριλάβει τα χρήματα αυτά στο δικό του αρχικό κεφάλαιο. Αν $x$ είναι το ποσό που έχει στην άκρη ο Ιάσονας, να γράψετε και να λύσετε μία ανίσωση, η οποία να προσδιορίζει τα χρήματα που έχει ήδη αποταμιεύσει, ώστε το συνολικό ποσό επένδυσης και των δύο φίλων να μην υπερβαίνει τις $30.000$ ευρώ.

(Μονάδες 5)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της

Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Δύο ξαδέρφια, ο Γιώργος και ο Νίκος, ζούνε στο Αγρίνιο και στην Καβάλα αντίστοιχα. Αποφασίσανε μία ημέρα του Μαρτίου να καταγράψουνε ταυτόχρονα τις θερμοκρασίες στις πόλεις τους ανά τρίωρο κατά τη διάρκεια ενός ολόκληρου 24ώρου και φτιάξανε τον παρακάτω πίνακα.

| Ώρα ($x$) | Θερμοκρασία ($T$) στο Αγρίνιο (°C) | Θερμοκρασία ($T$) στην Καβάλα (°C) |
|---|---|---|
| 00:00 (0) | 10 | 7 |
| 03:00 (3) | 12.5 | 9.5 |
| 06:00 (6) | 15 | 12 |
| 09:00 (9) | 17.5 | 14.5 |
| 12:00 (12) | 20 | 17 |
| 15:00 (15) | 22,5 | 19,5 |
| 18:00 (18) | 19 | 16 |
| 21:00 (21) | 15,5 | 12,5 |
| 00:00 (24) | 12 | 9 |

α) Ποια είναι η διαφορά της θερμοκρασίας για κάθε ένα από τα διαδοχικά τρίωρα σε κάθε μία από τις δύο πόλεις το συγκεκριμένο 24ωρο που καταγράφηκαν οι θερμοκρασίες από τα δύο ξαδέρφια; Τι παρατηρείτε;

(Μονάδες 4)

β) Με βάση τις τιμές από τα διαδοχικά τρίωρα που καταγράψανε τη συγκεκριμένη ημέρα τα δύο ξαδέρφια στις πόλεις τους, σκέφτηκαν να χρησιμοποιήσουν από μία σχέση της μορφής $T(x) = ax + \beta$, για να εκφράσουν τη θερμοκρασία ως συνάρτηση της ώρας ($x$).

i. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις που παριστάνουν τις θερμοκρασίες των δύο πόλεων αυτό το 24ωρο ακολουθώντας τη σκέψη των δύο παιδιών.

(Μονάδες 7)

ii. Ποιος από τους παρακάτω τύπους συνάρτησης θα μπορούσε να αναπαριστά τη θερμοκρασία $T_A$ στην πόλη του Αγρινίου ως συνάρτηση της ώρας ($x$), σύμφωνα με τη σκέψη των δύο παιδιών;

1. $T_A(x)=\begin{cases} -\frac{5}{6} \cdot \mathrm{x} + 40, \text{για } 0 \leq \mathrm{x} \leq 12 \\ \frac{7}{6} \cdot \mathrm{x} + 10, \text{για } 15 \leq \mathrm{x} \leq 24 \end{cases}$

2. $T_A(x)=\begin{cases} \frac{5}{6}\cdot \mathrm{x}+10, \text{για } 0\leq x\leq 15 \\ -\frac{7}{6}\ \mathrm{x}+40, \text{για } 15\leq \mathrm{x}\leq 24 \end{cases}$

3. $T_A(x)=\begin{cases} \frac{5}{6}\cdot \mathrm{x}-10, \text{για } 0\leq \mathrm{x}\leq 12 \\ \frac{7}{6}-40, \text{για } 15\leq \mathrm{x}\leq 24 \end{cases}$

4. $T_A(x)=\begin{cases} -\frac{5}{6}\ \cdot \mathrm{x}+10, \text{για } 0\leq \mathrm{x}\leq 15 \\ -\frac{7}{6}\cdot \mathrm{x}+40, \text{για } 15\leq \mathrm{x}\leq 24 \end{cases}$

(Μονάδες 5)

iii. Να κατασκευάσετε αντίστοιχα και τον τύπο της θερμοκρασίας $T_K$ στην Καβάλα ως συνάρτηση της ώρας ($x$), ακολουθώντας και πάλι τη σκέψη των παιδιών.

(Μονάδες 5)

γ) Υπάρχει κάποια χρονική στιγμή του συγκεκριμένου 24ώρου στην οποία οι δύο πόλεις να έχουν την ίδια θερμοκρασία;

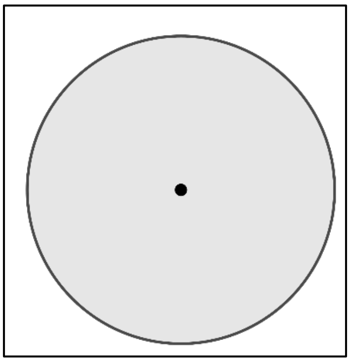
(Μονάδες 4)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός

Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ο σχεδιαστής μιας εταιρείας κατασκευής επίπλων έχει σχεδιάσει το τραπέζι της εικόνας (αριστερά), που η κυκλική γυάλινη επιφάνειά του (δεξιά) έχει εμβαδόν 1,5 τετραγωνικό μέτρο.



α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κυκλικού τζαμιού είναι ίση με $\rho = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κυκλικού τζαμιού είναι μικρότερη από $0{,}75$ μέτρα.

(Μονάδες 10)

γ) Ένας τεχνίτης διαθέτει ένα τετράγωνο κομμάτι τζαμιού με εμβαδόν $2{,}5$ τετραγωνικά μέτρα. Επαρκεί ώστε να φτιάξει την επιφάνεια του τραπεζιού;

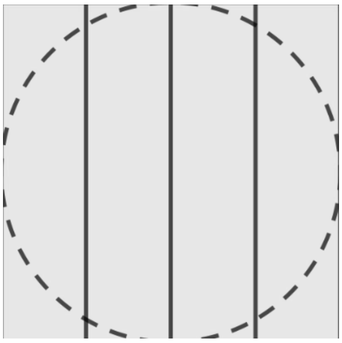
(Μονάδες 8)

Δίνεται ότι το εμβαδόν ενός κύκλου είναι $\pi\rho^2$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου και $\pi \simeq 3{,}14$.

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ένας ξυλουργός κατασκευάζει κυκλικά καπάκια βαρελιών χρησιμοποιώντας σανίδες σχήματος ορθογωνίου. Με αυτές κατασκευάζει τετράγωνα, όπως στη δεξιά εικόνα, και κόβει το καπάκι, όπως φαίνεται στις διακεκομμένες γραμμές. Ο ξυλουργός για την κατασκευή ενός τετραγώνου χρησιμοποίησε ακριβώς 4 σανίδες με διαστάσεις $\alpha$ και $\beta$.



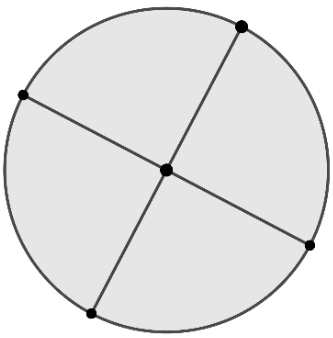
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου δίνεται από την παράσταση $4\alpha\beta$, σε κάθε περίπτωση.

(Μονάδες 5)

β) Αν κάθε σανίδα έχει εμβαδόν 0,3 τετραγωνικά μέτρα, ο ξυλουργός μπορεί να κατασκευάσει καπάκι με διάμετρο 1,3 μέτρα;

(Μονάδες 10)

γ) Για καλύτερη στήριξη ο ξυλουργός τοποθετεί ένα μεταλλικό $X$ όπως αυτό του σχήματος, το οποίο βιδώνεται στο κέντρο και σε τέσσερα σημεία της περιφέρειας του καπακιού.



Αν το εμβαδόν του καπακιού είναι 1,5 τετραγωνικό μέτρο, τότε επαρκεί μια μεταλλική ράβδος μήκους 3,1 μέτρων για την κατασκευή του μεταλλικού $X$;

(Μονάδες 10)

Δίνεται ότι το εμβαδόν ενός είναι κύκλου $\pi\rho^2$, όπου $\rho$ είναι η ακτίνα του κύκλου και $\pi \simeq 3{,}14$.

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Το φετινό πανελλήνιο πρωτάθλημα ενός επιτραπέζιου παιχνιδιού διεξάγεται σε 10 φάσεις. Σε κάθε φάση όλοι οι συμμετέχοντες αντιμετωπίζουν άλλους συμμετέχοντες ύστερα από κλήρωση. Σε κάθε παρτίδα συμμετέχουν από 2 έως 12 παίκτες και υπάρχει 1 νικητής. Η βαθμολογία του νικητή κάθε παρτίδας προκύπτει από τον υπολογισμό:

$$(\varphi \acute{\alpha}\sigma\eta\ \pi\rho\omega\tau\alpha\theta\lambda\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma)\cdot(\eta\tau\tau\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu o\iota\ \pi\alpha\rho\tau\acute{\iota}\delta\alpha\varsigma)+1.200.$$

Για παράδειγμα, ο νικητής μιας παρτίδας 11 παικτών στη 2η φάση του πρωταθλήματος κερδίζει 1220 βαθμούς.

α) Η Μαρία κέρδισε μια παρτίδα 9 παικτών στην 3η φάση του πρωταθλήματος και μια παρτίδα 7 παικτών στην 5η φάση του πρωταθλήματος. Πόσους βαθμούς κέρδισε συνολικά για αυτές τις νίκες της;

(Μονάδες 5)

β) Στο προηγούμενο πανελλήνιο πρωτάθλημα η βαθμολογία του νικητή κάθε παρτίδας υπολογιζόταν ως εξής:

$$B\alpha\theta\mu o\acute{\iota}=(\eta\tau\tau\eta\mu\acute{\varepsilon}\nu o\iota\ \pi\alpha\rho\tau\acute{\iota}\delta\alpha\varsigma)\cdot(\delta\iota\acute{\alpha}\rho\kappa\varepsilon\iota\alpha\ \pi\alpha\rho\tau\acute{\iota}\delta\alpha\varsigma\ \sigma\varepsilon\ \lambda\varepsilon\pi\tau\acute{\alpha}-100)+800.$$

Και πέρσι ίσχυε ότι σε κάθε παρτίδα συμμετέχουν μέχρι 12 παίκτες, αλλά ανακηρύσσεται ένας νικητής.

Ο Θρασύβουλος στο προηγούμενο πρωτάθλημα κέρδισε 400 βαθμούς με μία μόνο νίκη.

Αν $t$ είναι η διάρκεια, σε λεπτά, της παρτίδας που κέρδισε ο Θρασύβουλος και $x$ το πλήθος των ηττημένων της παρτίδας,

i. Να αποδείξετε ότι $t=100-\frac{400}{x}$.

(Μονάδες 5)

ii. Είναι αληθής η ανισότητα $100-\frac{400}{x}>0$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

iii. Πόσοι μπορεί να ήταν οι αντίπαλοι που κέρδισε ο Θρασύβουλος; Να εξηγήσετε το συμπέρασμά σας.

(Μονάδες 5)

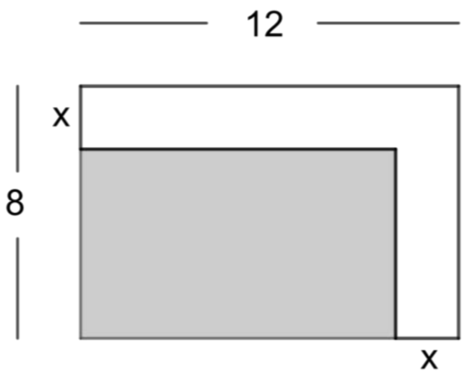
iv. Αν ο Θρασύβουλος ήταν ο νικητής της ίδιας ακριβώς παρτίδας αλλά στην τελευταία φάση του φετινού πρωταθλήματος, θα μπορούσε να κερδίσει 1.240 βαθμούς;

(Μονάδες 5)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ένας μαραγκός θέλει να αφαιρέσει ένα μέρος σχήματος «Γ» από ένα ορθογώνιο κομμάτι ξύλου διαστάσεων $8$ επί $12dm$, για να κατασκευάσει μια ντουλάπα. Το μέρος που θα κρατήσει, για να χρησιμοποιήσει, είναι επίσης ορθογώνιο, μικρότερο του αρχικού, όπως είναι το σκιασμένο μέρος του παρακάτω σχήματος.




α) Αν $x$ είναι το πλάτος του «Γ» που θα κόψει ο μαραγκός, να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$x^2 - 20x + 96$$

εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου που θα κρατήσει, για να χρησιμοποιήσει.

(Μονάδες 5)

β) Ο μαραγκός θέλει από το αρχικό κομμάτι ξύλου να κόψει και να χρησιμοποιήσει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν 45 $dm^2$.

i. Πόσο είναι το πλάτος $x$ του «Γ» που πρέπει να κόψει;

(Μονάδες 10)

ii. Ο μαραγκός από την εμπειρία του έχει διαπιστώσει ότι, για να μπορεί να διορθώνει λάθη κατά την εργασία του, το κομμάτι ξύλου που κόβει πρέπει να έχει τουλάχιστον 2% μεγαλύτερο εμβαδό από αυτό της τελικής κατασκευής. Να γράψετε μια ανίσωση που η λύση της να δίνει το πλάτος $x$ του «Γ» για αυτή την περίπτωση.

(Μονάδες 5)

iii. Αν ο μαραγκός κόψει το «Γ» με πλάτος 2,9 dm, τότε θα μπορεί να διορθώσει λάθη, όπως περιγράφεται στο υποερώτημα ii;

(Μονάδες 5)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της

Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Οι αριθμοί παίζουν καθοριστικό ρόλο στη διαχείριση δεδομένων, στις μετρήσεις, στις εμπορικές συναλλαγές και σε πολλές άλλες δραστηριότητες. Για παράδειγμα, οι φυσικοί αριθμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αρίθμηση βημάτων σε μια διαδικασία ή για την κατάταξη διαγωνιζομένων σε έναν διαγωνισμό· οι ακέραιοι στη μέτρηση πλεονάσματος ή ελλείμματος προϊόντων στο εμπόριο· οι ρητοί στις ακριβείς μετρήσεις μεγεθών και στον λόγο διαστάσεων των οθονών των τηλεοράσεων· τέλος, οι άρρητοι στην κρυπτογραφία και την προστασία ευαίσθητων δεδομένων. Για τον λόγο αυτόν χρειάζεται να μπορούμε να ταξινομούμε τους αριθμούς ανάλογα με το είδος τους.

α) Δίνονται οι αριθμοί:

$$2,\ \ 3-\sqrt{2},\qquad -2,\qquad \sqrt{16},\qquad \pi,\qquad 3{,}14,\qquad 0{,}33\ldots,\ \ 1{,}1010010001\ldots,\frac{\sqrt{2}}{3},\qquad \frac{1}{7}$$

Να βασιστείτε στην παραπάνω περιγραφή, για να υποδείξετε ποιοι από τους αριθμούς (ή ίσοι με αυτούς):

i. είναι φυσικοί και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την αρίθμηση βημάτων.

(Μονάδες 2)

ii. είναι ακέραιοι και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στη μέτρηση πλεονάσματος ή ελλείμματος προϊόντων.

(Μονάδες 1)

iii. είναι ρητοί και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουν τον λόγο διαστάσεων της οθόνης μιας τηλεόρασης.

(Μονάδες 3)

iv. είναι άρρητοι και θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στην κρυπτογραφία.

(Μονάδες 4)

β) Ο Γιάννης ενδιαφέρεται για την αγορά μιας νέας τηλεόρασης 46 ιντσών, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, από μια συγκεκριμένη εταιρεία. Κάνοντας μια έρευνα στο διαδίκτυο, διαπιστώνει ότι ένα σημαντικό κριτήριο για την αγορά τηλεόρασης είναι ο λόγος των διαστάσεών της (πλάτος προς ύψος). Όσο μεγαλύτερο είναι το ποσοστό του πλάτους σε σχέση με το ύψος της τηλεόρασης, τόσο καλύτερη είναι η εμπειρία προβολής. Η εταιρεία διαθέτει τηλεοράσεις 46 ιντσών με λόγο διαστάσεων $16:9$ και με λόγο διαστάσεων $4:3$. Ποια τηλεόραση πρέπει να διαλέξει ο Γιάννης σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

(Μονάδες 6)

γ) Η Μαρία ισχυρίζεται ότι μπορεί πάντοτε να χρησιμοποιήσει το άθροισμα δύο άρρητων στην κρυπτογραφία, γιατί το άθροισμα δύο άρρητων αριθμών είναι πάντα άρρητος αριθμός.

i. Να γράψετε δύο άρρητους που το άθροισμά τους να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην κρυπτογραφία και να εξηγήσετε γιατί επιβεβαιώνουν τον ισχυρισμό της Μαρίας.

(Μονάδες 3)

ii. Να γράψετε δύο άρρητους αριθμούς που να αντικρούουν τον ισχυρισμό της Μαρίας και να εξηγήσετε γιατί τον αντικρούουν.

(Μονάδες 3)

iii. Να εξηγήσετε αν ο ισχυρισμός της Μαρίας είναι σωστός ή λανθασμένος με βάση τους αριθμούς που βρήκατε παραπάνω.

(Μονάδες 3)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Οι ερευνητές στο πεδίο της ασφάλειας τροφίμων αναπτύσσουν μαθηματικά μοντέλα που προβλέπουν την ανάπτυξη βακτηρίων στις τροφές. Τα μοντέλα αυτά βοηθούν τους Εθνικούς Οργανισμούς Υγείας να εκδώσουν οδηγίες προς τους καταναλωτές αναφορικά με την ασφαλή διαχείριση και συντήρηση των τροφών.

α) Βρέθηκε ότι ο αριθμός $N$ των βακτηρίων ενός συγκεκριμένου είδους που αναπτύσσεται σε μία τροφή μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$N = -T^2 + 72T - 396,$$

όπου $T$ είναι η θερμοκρασία της τροφής σε βαθμούς Κελσίου για την οποία ο αριθμός $N$ των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το μηδέν. Να υπολογίσετε τη θερμοκρασία της τροφής για την οποία ο αριθμός των βακτηρίων που αναπτύσσεται σε αυτή είναι αμελητέος, θεωρώντας τον ίσο με το μηδέν.

(Μονάδες 6)

β) Για μια διαφορετική τροφή, ο τύπος που δίνει τον αριθμό των βακτηρίων σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία της τροφής βρέθηκε ότι είναι ο εξής:

$$N = -(T-2)(T-57).$$

Να βρείτε το εύρος των τιμών της θερμοκρασίας για τις οποίες αναπτύσσονται βακτήρια στην τροφή αυτή.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το εύρος των τιμών της θερμοκρασίας για τις οποίες, αν αποθηκεύσουμε μαζί τις τροφές που αναφέρονται στα α) και β), αναπτύσσονται μικρόβια και στις δύο τροφές.

(Μονάδες 11)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

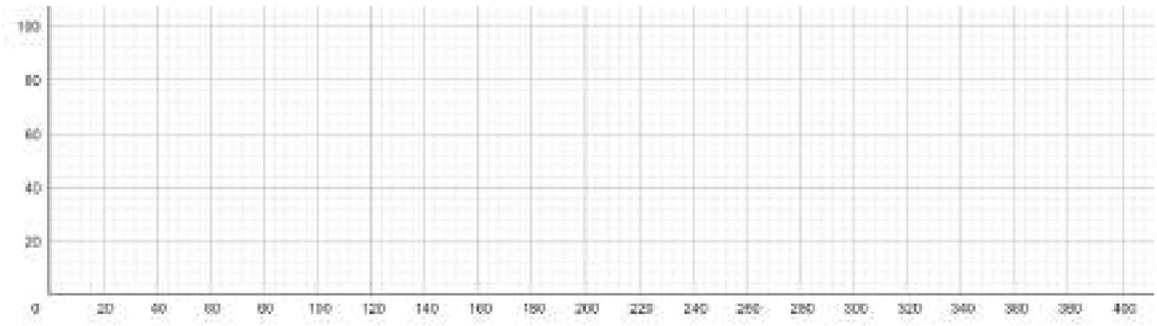
Ο Μανώλης είναι σερβιτόρος σε ένα εστιατόριο και πληρώνεται $50€$ την ημέρα συν τα φιλοδωρήματα, τα οποία είναι το $10\%$ των χρημάτων που πληρώνουν οι πελάτες για φαγητό και ποτό.

α) Αν $x$ είναι τα χρήματα που πληρώνουν οι πελάτες του εστιατορίου για φαγητό και ποτό, να εκφράσετε τα χρήματα $y$ που εισπράττει ο σερβιτόρος κάθε ημέρα, σαν συνάρτηση του $x$.

(Μονάδες 3)

β) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που βρήκατε στο α) ερώτημα, αν οι πελάτες πληρώνουν για φαγητό και ποτό από $0$ έως και $400€$ την ημέρα.

(Μονάδες 5)




γ) Να βρείτε

i. Πόσα χρήματα θα εισπράξει ο Μανώλης, αν μια ημέρα οι πελάτες πληρώσουν $312$ € σε φαγητό και ποτό.

(Μονάδες 5)

ii. Πόσα χρήματα πρέπει να πληρώσουν οι πελάτες μια ημέρα, ώστε να εισπράξει ο Μανώλης από $105€$ μέχρι και $120€$.

(Μονάδες 5)

δ) Ο Μανώλης, για να αυξηθούν οι αποδοχές του την επόμενη χρονιά, προσπαθεί να βρει πόσο πρέπει να ζητήσει να είναι το ποσοστό του επί των φιλοδωρημάτων, ώστε αν οι πελάτες ξοδέψουν 500 ευρώ, εκείνος να εισπράξει 15 ευρώ περισσότερα απ' όσα εισπράττει φέτος. Μπορείτε να τον βοηθήσετε; Να εξηγήσετε την σκέψη σας.

(Μονάδες 7)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Έρευνα που έγινε το 2023 από το Εργαστήριο Ραδιενέργειας Περιβάλλοντος του ΕΚΠΑ αποκαλύπτει ότι ραδιενεργά ίχνη τα οποία συνδέονται με το πυρηνικό ατύχημα του Τσερνόμπιλ το 1986, εντοπίζονται ακόμη στην Αττική. Σύμφωνα με την έρευνα σε 23 πάρκα του Λεκανοπεδίου διαπιστώθηκε η παρουσία Καισίου 137 ($^{137}Cs$), αποτελεί ένα από τα συνηθέστερα προϊόντα σχάσης του ουρανίου, κι είναι ένα κατεξοχήν ραδιενεργό στοιχείο που συγκεντρώνεται συνήθως στα πρώτα 10 εκατοστά του εδάφους. Γνωρίζουμε ότι η μάζα του Καισίου 137 μειώνεται λόγω διάσπασης κατά 2,5% κάθε χρόνο.

α) Να υποθέσετε ότι τον 1$^{ο}$ χρόνο μετά από μια έκρηξη, η ποσότητα του Καισίου 137 είναι $\alpha_1$ και να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν την ποσότητά του τα επόμενα χρόνια είναι όροι γεωμετρικής προόδου, της οποίας να προσδιορίσετε τον λόγο.

(Μονάδες 5)

β) Αν η ζητούμενη γεωμετρική πρόοδος έχει γενικό όρο: $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot 0{,}975^{\nu-1}$ και τον 1$^{ο}$ χρόνο μετά από μια έκρηξη ανιχνεύονται σε μια περιοχή $10g/m^2$ Καισίου 137, να υπολογίσετε πόση μάζα θα έχει απομείνει μετά από:

i. 10 χρόνια

ii. 100 χρόνια

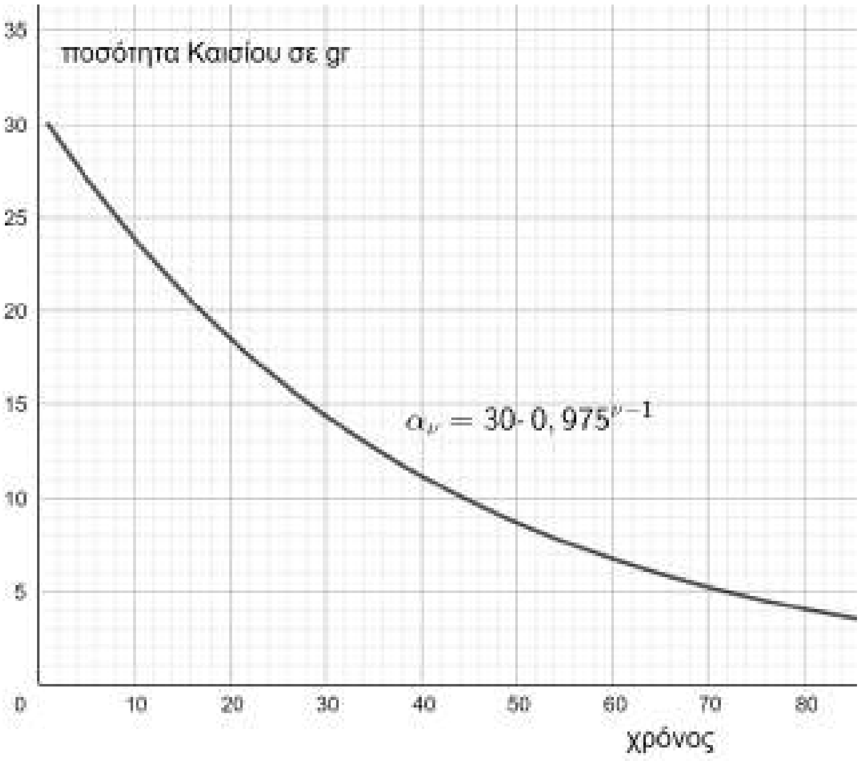
(Μονάδες 8)

γ)

i. Το Καίσιο 137 θεωρείται επικίνδυνο για τους οργανισμούς, καθώς μπορεί να προκαλέσει καρκινογενέσεις και γενετικές μεταλλάξεις. Στην πυρηνική καταστροφή στο Τσερνόμπιλ το 1986 η απελευθέρωση Καισίου 137 εκτιμήθηκε για τη γύρω περιοχή στα περίπου 30 $g/m^2$. Αν τα όρια ασφαλείας για την καλλιέργεια των εδαφών απαιτούν η συγκέντρωση του Καισίου 137, σε βάθος εδάφους περίπου $10cm$, να είναι κάτω από $5g/m^2$ , είναι το 2025 ασφαλής η γύρω περιοχή για καλλιέργεια;

(Μονάδες 6)

ii. Η ποσότητα ενός υλικού μειώνεται κατά το ήμισυ, όταν αυτό υποβάλλεται σε διαδικασίες όπως η ραδιενεργός αποσύνθεση ή άλλες χημικές ή φυσικές διεργασίες. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να εκτιμήσετε πόσο χρόνο χρειάζεται η αρχική ποσότητα των $30g/m^2$ Καισίου 137, για να μειωθεί στο μισό.




(Μονάδες 6)

Δίνονται οι τιμές:

$0{,}975^9 = 0{,}769$

$0{,}975^{99} = 0{,}079$

$0{,}975^{38} = 0{,}382$

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ο Κώστας χρησιμοποιεί το κινητό του για διάφορες δραστηριότητες, οι οποίες καταναλώνουν δεδομένα με διαφορετικούς ρυθμούς. Θέλει να βρει το καλύτερο πακέτο δεδομένων ώστε να μην ξεπερνά το όριό του.

Παρακάτω δίνεται ένας πίνακας με την ημερήσια κατανάλωση δεδομένων ανά δραστηριότητα:

| Δραστηριότητα | Κατανάλωση ανά ώρα (MB) | Μέση ημερήσια χρήση (ώρες) |
|---|---|---|
| Πλοήγηση στο διαδίκτυο | 250 MB | 1,5 ώρα |
| Social Media | 150 MB | 2 ώρες |
| Streaming βίντεο | 700 MB | $x$ ώρες |
| Online gaming | 200 MB | 1 ώρα |

Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας του προσφέρει τα εξής πακέτα:

Πακέτο A: 20 GB/μήνα

Πακέτο B: 40 GB/μήνα

Πακέτο Γ: 60 GB/μήνα

α) Να εκφράσετε τη συνολική μέση ημερήσια κατανάλωση δεδομένων σε MB ως συνάρτηση των ωρών streaming βίντεο $x$, όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα.

(Μονάδες 4)

β) Να εκφράσετε τη συνολική μέση μηνιαία κατανάλωση δεδομένων σε GB ως συνάρτηση των ωρών streaming βίντεο $x$, όπως προκύπτει από τον πίνακα. (μήνας ≈ 30 ημέρες)

(Μονάδες 4)

γ) Πόσες ώρες streaming βίντεο μπορεί να έχει ο Κώστας, αν επιλέξει το πακέτο A και πόσες αν επιλέξει το πακέτο B;

(Μονάδες 6)

δ) Αν θέλει να βλέπει τουλάχιστον 2 ώρες βίντεο την ημέρα, πόσα GB θα καταναλώνει το μήνα; Υπάρχει κάποιο πακέτο από αυτά που προσφέρει η εταιρεία που τον καλύπτει;

(Μονάδες 4)

ε) Αν επιλέξει τελικά το πακέτο A, θα μπορούσε, αν περιορίσει με κάποιο τρόπο τις υπόλοιπες δραστηριότητές του, να εξοικονομήσει κάποιο χρόνο, για να παρακολουθεί βίντεο κάθε μέρα; Αν ναι, προτείνετε πιθανούς τρόπους στον Κώστα.

(Μονάδες 7)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Η Μαρία είναι φοιτήτρια και προσπαθεί να οργανώσει το διάβασμά της για τις εξετάσεις του Ιουνίου, στις οποίες πρέπει να δώσει τρία μαθήματα. Έφτιαξε τον παρακάτω πίνακα, όπου έχει σημειώσει τη σειρά με την οποία δίνει το κάθε μάθημα και τον αριθμό των σελίδων που έχει να διαβάσει για καθένα από αυτά. Ο στόχος της είναι να έχει ολοκληρώσει την ύλη και των τριών μαθημάτων τουλάχιστον δύο μέρες πριν από την έναρξη των εξετάσεων, που είναι στις 15/6. Σκέφτεται λοιπόν να ξεκινήσει διαβάζοντας 20 σελίδες και κάθε επόμενη ημέρα να διαβάζει 5 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη.

| Μάθημα | Ύλη-Αριθμός σελίδων |
|---|---|
| Μ1 | 296 σελ. |
| Μ2 | 274 σελ. |
| Μ3 | 400 σελ. |

α) Πόσες σελίδες θα διαβάσει η Μαρία την $5^{η}$ μέρα;

(Μονάδες 4 )

β) Θα προλάβει να ολοκληρώσει την ύλη του πρώτου μαθήματος Μ1 μέσα σε 8 ημέρες, αν έχει ξεκινήσει το διάβασμά της από αυτό το μάθημα; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

(Μονάδες 6)

γ) Πόσες μέρες θα χρειαστεί η Μαρία, για να διαβάσει όλες τις σελίδες από την ύλη και των τριών μαθημάτων, ακολουθώντας το ρυθμό διαβάσματος που όρισε η ίδια;
($\sqrt{1601} \cong 40$)

(Μονάδες 8)

δ) Αν η Μαρία διαβάζει τα μαθήματα διαδοχικά με τη σειρά την οποία θα τα δώσει στις εξετάσεις, αφήνοντας το Μ3 τελευταίο, πόσες ημέρες θα χρειαστεί για να διαβάσει το Μ3, αφού έχει ολοκληρώσει το Μ1 και το Μ2, ακολουθώντας πάντα τον ίδιο ρυθμό διαβάσματος τον οποίο όρισε; Πότε πρέπει να αρχίσει να διαβάζει το Μ3, ώστε να ολοκληρώσει το διάβασμά της τουλάχιστον δύο μέρες πριν αρχίσουν οι εξετάσεις;

(Μονάδες 7)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ο ολικός δείκτης γονιμότητας (Total Fertility Rate) είναι ένας δημογραφικός δείκτης που εκτιμά τον μέσο αριθμό παιδιών που θα γεννούσε μια γυναίκα κατά τη διάρκεια της ζωής της, σύμφωνα με τα ποσοστά γονιμότητας ανά ηλικία ενός δεδομένου έτους.

Ο τύπος με τον οποίο υπολογίζεται ο ολικός δείκτης γονιμότητας $T$ είναι: $T = \frac{N \cdot 30}{F}$, όπου $N$ ο αριθμός των γεννήσεων και $F$ ο αριθμός των γυναικών που βρίσκονται σε αναπαραγωγική ηλικία (15-49 ετών).

α) Ένα άρθρο στο διαδίκτυο εξέφραζε τον φόβο του για τη γήρανση του πληθυσμού στην Ελλάδα, αναφέροντας ότι ο ολικός δείκτης γονιμότητας στη χώρα το 2022 ήταν μόλις 1,32 γεννήσεις ανά γυναίκα. Πόσες περίπου ήταν οι γεννήσεις το 2022, αν οι γυναίκες αναπαραγωγικής ηλικίας ήταν περίπου 1.730.000;

(Μονάδες 6)

β) Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ (Ελληνική Στατιστική Αρχή) το 2023 στην Ελλάδα οι γεννήσεις ανήλθαν σε 71.455 και ο ολικός δείκτης γονιμότητας ήταν 1,26 γεννήσεις ανά γυναίκα. Με βάση τον παραπάνω τύπο πόσες περίπου γυναίκες στην Ελλάδα το 2023 βρίσκονταν σε αναπαραγωγική ηλικία, δηλαδή ήταν από 15-49 ετών;

(Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε έναν τύπο, ο οποίος να υπολογίζει τον αριθμό των γυναικών που βρίσκονται σε αναπαραγωγική ηλικία, δηλαδή το $F$, όταν γνωρίζετε τον ολικό δείκτη γονιμότητας $T$ και τον αριθμό των γεννήσεων $N$ σε ένα έτος.

(Μονάδες 7)

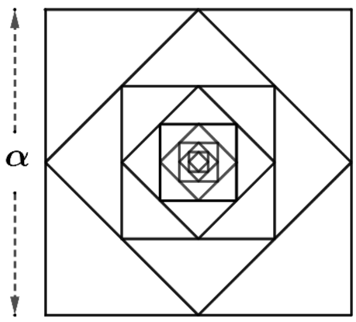
δ) Αν ο αριθμός των γεννήσεων $N$ αυξηθεί κατά 20%, πώς θα αλλάξει ο ολικός δείκτης γονιμότητας, εφόσον ο αριθμός των γυναικών που βρίσκονται σε αναπαραγωγική ηλικία μείνει σταθερός;

(Μονάδες 6)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ένας καλλιτέχνης ζωγράφισε ένα σπιράλ τετραγώνων, στο οποίο τα μέσα των πλευρών ενός τετραγώνου είναι οι κορυφές του επόμενου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

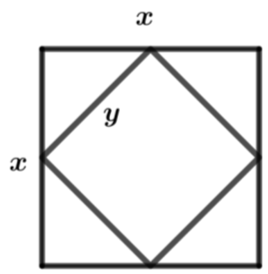



α)

i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου είναι $4\,cm$, να χρησιμοποιήσετε το πυθαγόρειο θεώρημα, για να υπολογίσετε την πλευρά του αμέσως μικρότερου τετραγώνου.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι, αν η πλευρά ενός τετραγώνου είναι $x$ και η πλευρά του αμέσως μικρότερου είναι $y$, τότε $\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.




(Μονάδες 5)

β) Αν η πλευρά του αρχικού τετραγώνου είναι $\alpha\ cm$, να αποδείξετε ότι τα μήκη των πλευρών των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου $(\alpha_\nu)$ με γενικό όρο $\alpha_\nu = \alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\nu-1}$.

(Μονάδες 8)

γ) Ο καλλιτέχνης αποφάσισε να ζωγραφίσει 6 διαδοχικά τετράγωνα και η πλευρά του τελευταίου τετραγώνου να είναι μεγαλύτερη από $1\ cm$, ώστε το σχέδιο να είναι ευκρινές. Επέλεξε το αρχικό τετράγωνο να έχει πλευρά $6\ cm$. Είναι σωστή η επιλογή του αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)


Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός

Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Στο αεροδρόμιο της πόλης έχει εγκατασταθεί ένας σταθμός με στατικά ποδήλατα γυμναστικής. Οι επιβάτες μπορούν να χρησιμοποιούν τα ποδήλατα για να φορτίζουν τις ηλεκτρικές τους συσκευές (κινητά τηλέφωνα, tablet, κλπ), παράγοντας ηλεκτρική ενέργεια με τη δική τους δύναμη. Κάθε ποδήλατο μπορεί να παράγει ενέργεια που μετατρέπεται σε ηλεκτρισμό με τη χρήση γεννήτριας. Ο σταθμός αποτελεί μέρος του προγράμματος βιωσιμότητας του αεροδρομίου, που έχει ως στόχο να ενισχύσει τη χρήση ανανεώσιμων πηγών ενέργειας και να μειώσει την κατανάλωση από το δίκτυο.

Κάθε ποδήλατο παράγει περίπου $\beta\, Wh$ (βατώρες) για κάθε $20$ λεπτά συνεχούς χρήσης. Το $80\%$ της παραγόμενης ενέργειας μετατρέπεται σε ηλεκτρική ενέργεια, χρήσιμη για φόρτιση των συσκευών, ενώ το υπόλοιπο χάνεται ως θερμότητα. Μια τυπική ηλεκτρική συσκευή χρειάζεται περίπου $10Wh$ για μία πλήρη φόρτιση.

α) Αν ένα ποδήλατο χρησιμοποιείται για $20$ λεπτά συνεχώς, πόση ενέργεια φτάνει τελικά στη συσκευή για φόρτιση;

(Μονάδες 2)

β)

i. Αν υποθέσουμε ότι η ενέργεια που φτάνει τελικά στις συσκευές είναι ανάλογη με το πόσα εικοσάλεπτα ποδηλατούν οι επιβάτες, ποια σχέση εκφράζει την ενέργεια $(E)$ σε $Wh$ που φτάνει στις συσκευές με το πλήθος $(n)$ των εικοσαλέπτων;

(Μονάδες 5)

ii. Να επιχειρηματολογήσετε υπέρ της δήλωσης: «η σχέση που συνδέει τον συνολικό αριθμό $(D)$ των συσκευών που μπορούν να φορτιστούν με την ενέργεια $(E)$, η οποία φτάνει σε αυτές, είναι της μορφής $D = \alpha E$». Να προσδιορίσετε τη σχέση αυτή.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Η επιβατική κίνηση του αεροδρομίου για το $2024$ ήταν $31.854.761$ επιβάτες. Αν οι συσκευές που φορτίζονται κάθε μήνα είναι $D = 780.000$ και τα εικοσάλεπτα που ποδηλάτησαν επιβάτες είναι $n = 195.000$, πόσες $Wh$ παρήγε κάθε ποδήλατο για $20$ λεπτά συνεχούς χρήσης; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ii. Το αεροδρόμιο πληρώνει στο δίκτυο ηλεκτρισμού $0{,}20$ ευρώ ανά κιλοβατώρα $(kWh)$. Πόσα χρήματα εξοικονομεί κάθε μήνα χρησιμοποιώντας τον σταθμό με τα στατικά ποδήλατα;

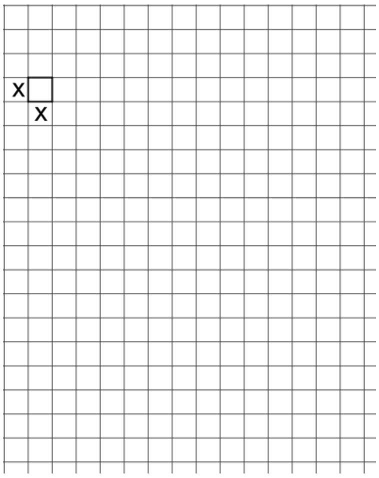
(Μονάδες 2)

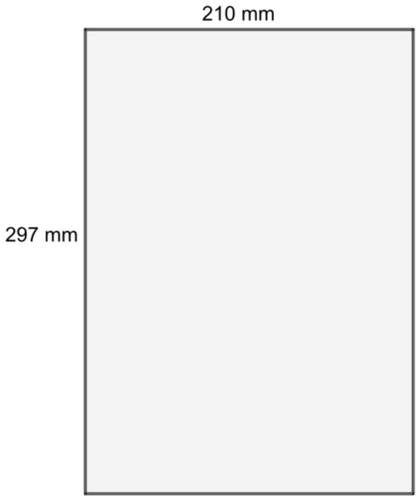
Δίνεται ότι $1kWh = 1000Wh$

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Μια βιοτεχνία κατασκευής τετραδίων παράγει τετράδια που η κάθε σελίδα τους είναι γεμάτη με τετραγωνάκια, όπως στο σχήμα (το λεγόμενο τετράδιο «καρέ»). Με $x$ συμβολίζουμε το μήκος της πλευράς κάθε τετραγώνου.




Οι διαστάσεις κάθε σελίδας του τετραδίου είναι $210\ mm$ επί $297\ mm$.

Στο τέλος της σελίδας του τετραδίου (κάτω και δεξιά) ενδέχεται τα τετράγωνα να εμφανίζονται κομμένα λόγω των διαστάσεών τους (δηλαδή να μη χωράνε ολόκληρα).

α) Αν κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά με μήκος $\mathrm{x} = 8\ mm$, πόσα ολόκληρα τετραγωνάκια χωράνε οριζόντια σε κάθε γραμμή της σελίδας;

(Μονάδες 4)

β) Αν σε κάθε στήλη χωράνε $37$ ολόκληρα τετραγωνάκια, να αποδείξετε ότι:

i. $38x > 297$.

(Μονάδες 6)

ii. Το μήκος της πλευράς του κάθε τετραγώνου είναι το πολύ ίσο με $\frac{297}{37}\ mm$.

(Μονάδες 6)

iii. $\frac{297}{38} < x \leq \frac{297}{37}$.

(Μονάδες 3)

γ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος $x$ της πλευράς κάθε τετραγώνου, αν κάθε γραμμή της σελίδας του τετραδίου χωράει $23$ ολόκληρα τετραγωνάκια και η κάθε του στήλη χωράει $33$ ολόκληρα τετραγωνάκια;

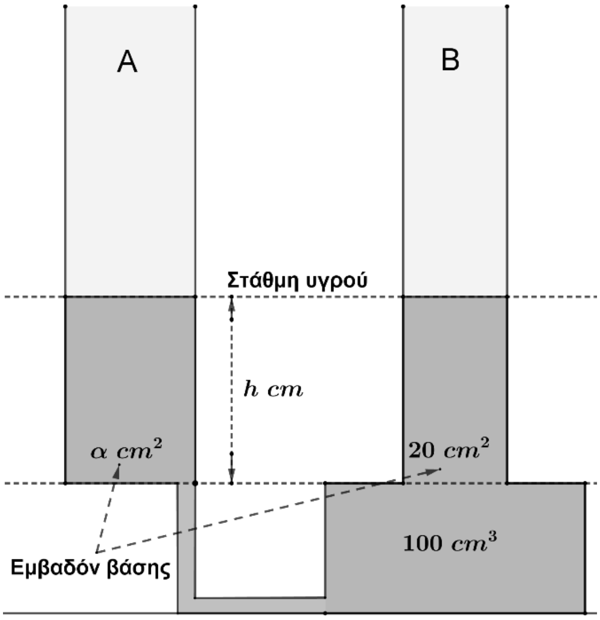
(Μονάδες 6)

Δίνονται: $\frac{210}{23} \cong 9{,}23, \quad \frac{297}{34} \cong 8{,}74$

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Για να γίνει ένα πείραμα, πρέπει να χρησιμοποιηθούν δύο συγκοινωνούντα δοχεία, τα οποία συνδέονται μέσω ενός μικρού σωλήνα που περιέχει υγρό αμελητέου όγκου. Το δοχείο Β αποτελείται από δύο μέρη. Το κάτω μέρος έχει συνολικό όγκο $100\ cm^3$, ενώ στη συνέχεια είναι κυλινδρικό με εμβαδόν βάσης $20\ cm^2$. Το δοχείο Α έχει κυλινδρικό σχήμα και εμβαδόν βάσης $\alpha\ cm^2$. Επίσης, το δοχείο Α είναι τοποθετημένο πιο ψηλά, όπως φαίνεται στο σχήμα.




(Δίνεται ότι σε ένα κυλινδρικό δοχείο ισχύει $Όγκος = Εμβαδόν\ βάσης \times Ύψος$)

α)

i. Να υπολογίσετε τον όγκο του υγρού στο δοχείο Β, αν $h = 5\ cm$.

(Μονάδες 2)

ii. Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τον όγκο $V_B$ του υγρού στο δοχείο Β ως συνάρτηση του ύψους $h$. Να κάνετε το ίδιο για τον όγκο $V_A$ του υγρού στο δοχείο Α.

(Μονάδες 4)

β) Ιδανικά, για να πετύχει το πείραμα, πρέπει τα δύο δοχεία να γεμίσουν τόσο, ώστε να περιέχουν τον ίδιο όγκο υγρού. Για το δοχείο Α έχουμε στη διάθεσή μας διάφορες επιλογές όσον αφορά το εμβαδόν της βάσης του. Τρεις από αυτές είναι οι ακόλουθες:

Α. $\alpha = 10\ cm^2$ Β. $\alpha = 20\ cm^2$ Γ. $\alpha = 40\ cm^2$

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί/ούν κάποια/ες από αυτές; Να εξηγήσετε γιατί.

(Μονάδες 7)

γ) Τελικά για δοχείο Α επιλέχθηκε ένα με εμβαδόν βάσης $30\ cm^2$.

i. Αν και το ιδανικό είναι τα δύο δοχεία να περιέχουν τον ίδιο όγκο, το πείραμα μπορεί να γίνει με σχετική επιτυχία όσο η διαφορά ανάμεσα στους όγκους των δύο δοχείων είναι το πολύ $10\ cm^3$. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το ύψος $h$;

(Μονάδες 6)

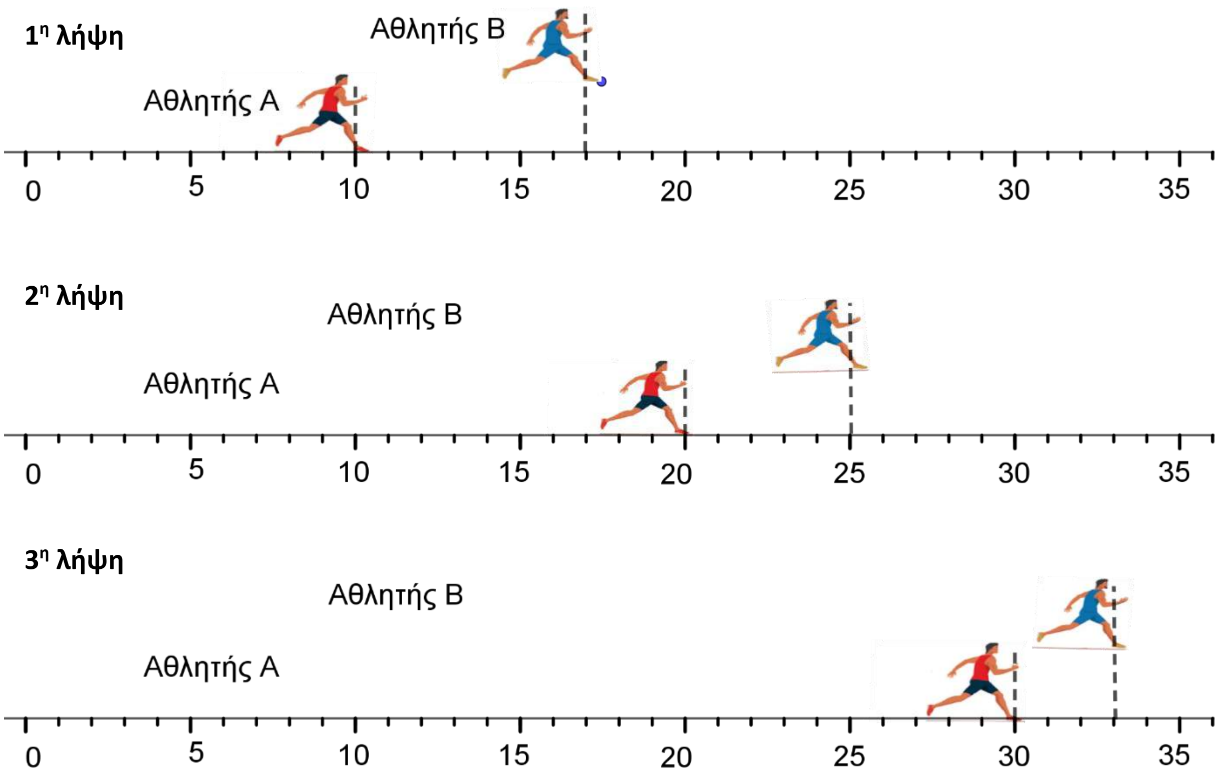
ii. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το ύψος $h$, αν επιπλέον ο συνολικός όγκος στα δύο δοχεία δεν μπορεί να ξεπερνά τα $600\ cm^3$;

(Μονάδες 6)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ένας φωτογράφος αθλητικών γεγονότων, που έχει ρυθμίσει την κάμερά του να παίρνει αυτόματα διαδοχικές φωτογραφίες σε σταθερά χρονικά διαστήματα (λήψη ριπής), φωτογράφισε δύο αθλητές που έτρεχαν σε έναν αγώνα $60m$ κλειστού στίβου. Ο αθλητής $A$ είχε παραπατήσει στην εκκίνηση και είχε μείνει αρκετά πίσω. Οι δύο αθλητές από τα $10m$ και μετά έτρεχαν με σταθερή ταχύτητα, τη μεγαλύτερη που μπορούσε ο καθένας. Παρακάτω φαίνονται οι τρεις πρώτες λήψεις.




α) Σε ποια απόσταση από την αφετηρία θα απεικονίζει τον αθλητή $A$ η τέταρτη κατά σειρά λήψη και σε ποια τον αθλητή $B$;

(Μονάδες 2)

β) Πόση θα είναι απόσταση από την αφετηρία του αθλητή $A$ στη τη ν-οστή κατά σειρά λήψη και πόση του αθλητή $B$;

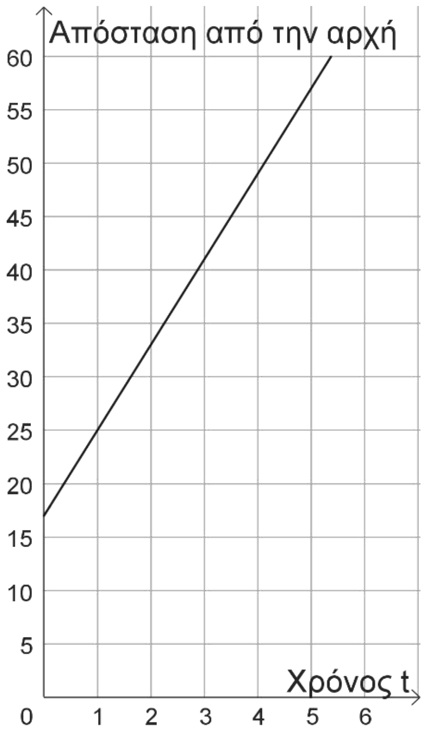
(Μονάδες 6)

γ) Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει φωτογραφία στην οποία απεικονίζονται και οι δύο αθλητές ακριβώς στην ίδια θέση.

(Μονάδες 4)

δ) Γνωρίζουμε ότι η φωτογραφική μηχανή παίρνει μία φωτογραφία ανά δευτερόλεπτο. Θεωρούμε ως χρονική στιγμή $t = 0$ τη στιγμή που έγινε η πρώτη λήψη.

i. Να αντιγράψετε στην κόλλα σας το διπλανό σχήμα, όπου έχει σχεδιαστεί η ευθεία της γραφικής παράστασης της απόστασης που έχει διανύσει ο αθλητής $B$ σε σχέση με τον χρόνο $t$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση για τον αθλητή $A$.




(Μονάδες 6)

ii. Με βάση τις δύο γραφικές παραστάσεις, περίπου πόσο χρόνο μετά τη λήψη της πρώτης φωτογραφίας θα φτάσει ο αθλητής $A$ τον αθλητή $B$;

(Μονάδες 3)

iii. Να εξηγήσετε γιατί η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα δεν μπορεί να είναι $3sec$ ή $4sec$.

(Μονάδες 4)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός

Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Μια εταιρεία πουλάει φανέλες προς 25€ τη μία. Το κόστος παραγωγής κάθε φανέλας είναι 5€. Οι πωλήσεις της εταιρείας με αυτή την τιμή (25€) είναι κατά μέσο όρο 100 φανέλες την ημέρα. Η έρευνα δείχνει ότι για κάθε μείωση της τιμής κατά 1€, η εταιρεία πουλάει 10 επιπλέον φανέλες.

α) Πόσο κέρδος την ημέρα έχει η εταιρεία, όταν πουλάει την κάθε φανέλα με 25€;

(Μονάδες 2)

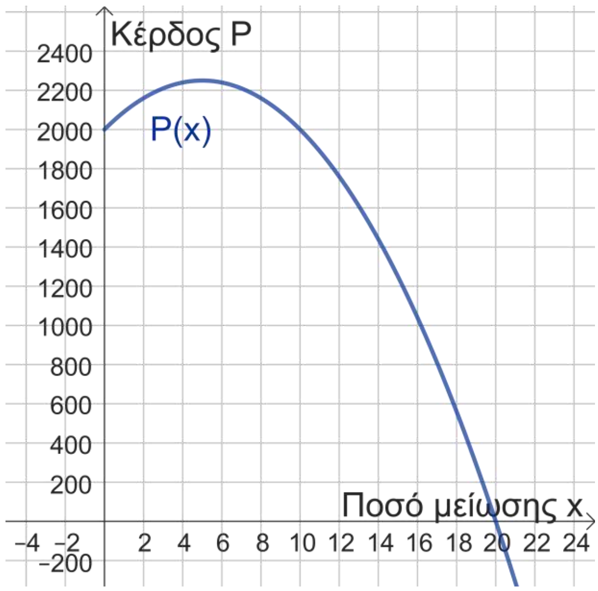
β) Πόσο κέρδος την ημέρα θα έχει η εταιρεία, αν μειώσει την τιμή κάθε φανέλας κατά 2€, δηλαδή από τα 25€ στα 23€;

(Μονάδες 5)

γ) Αν η εταιρεία μειώσει την τιμή του προϊόντος κατά $x$ €, να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει το ημερήσιο κέρδος $P$ της εταιρείας ως συνάρτηση του $x$.

(Μονάδες 8)

δ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η καμπύλη της συνάρτησης του κέρδους $P$ σε σχέση με τη μείωση της τιμής $x$.




i. Μέχρι πόσο μπορεί να μειώσει η εταιρεία την τιμή κάθε φανέλας, ώστε να μην έχει ζημιά (δηλαδή τα έσοδα να είναι περισσότερα από το κόστος);

(Μονάδες 4)

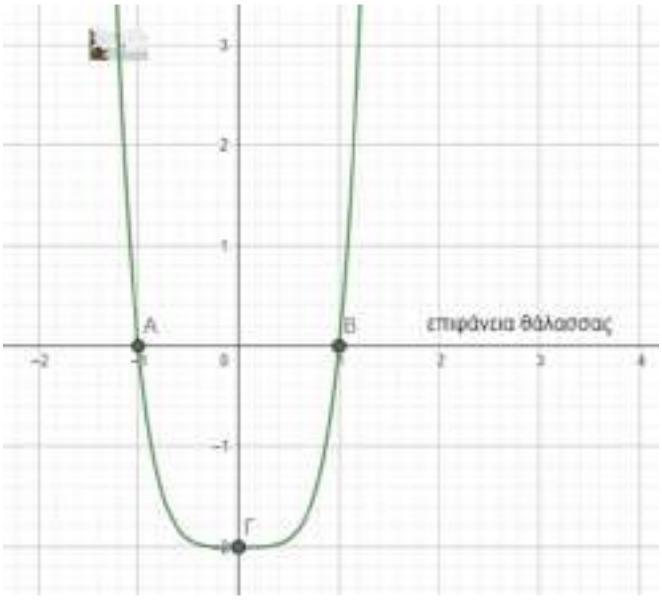
ii. Να εκτιμήσετε τη μικρότερη τιμή με την οποία μπορεί να πουλάει η εταιρεία την κάθε φανέλα, ώστε το κέρδος της να μην είναι μικρότερο από αυτό που έχει τώρα.

(Μονάδες 6)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Μια αθλήτρια καταδύσεων προπονείται εκτελώντας βουτιές από έναν βράχο. Οι θέσεις της αθλήτριας κατά τη διάρκεια μιας βουτιάς μπορούν να θεωρηθούν σημεία πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^6 + x^4 - 2$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η αθλήτρια βουτά από ύψος $3m$, πέφτει στο νερό στο σημείο $A$ και, κινούμενη όπως το διάγραμμα, βγαίνει από το νερό στο σημείο $B$.




α) Να αιτιολογήσετε με βάση τον τύπο της συνάρτησης $f$ ότι η αθλήτρια δεν μπορεί να φτάσει σε βάθος μεγαλύτερο των $2m$ κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να βρείτε αν η αθλήτρια περνά από τις θέσεις $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-123}{64}\right)$ και $\left(\frac{1}{4}, \frac{251}{16}\right)$. Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων για τις οποίες η αθλήτρια βρίσκεται έξω από το νερό. Δίνεται ότι $f(-1{,}19) = f(1{,}19) \cong 3$.

(Μονάδες 6)

iii. Σε μια βουτιά της η αθλήτρια κολύμπησε από το σημείο $\Gamma$ ως το σημείο $B$ ευθύγραμμα. Να βρείτε την απόσταση $\Gamma B$ που διήνυσε η αθλήτρια σε αυτή τη βουτιά.

(Μονάδες 6)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργούν ηλεκτρικά μέρη συσκευών, όπως οι αντιστάτες και οι πυκνωτές, περιγράφεται από τιμές (αντίσταση, χωρητικότητα κ.λπ.) που αναφέρονται από τον κατασκευαστή, δηλαδή το εργοστάσιο. Στην πράξη, όμως, οι τιμές αυτές μπορεί να διαφέρουν, λόγω μικροδιαφορών κατά την κατασκευή.

α) Ένας κατασκευαστής, που παράγει ένα είδος αντιστάτη, καθορίζει την τιμή της αντίστασής του στα 680Ω (Ohm) και εγγυάται ότι οι οποιεσδήποτε διαφοροποιήσεις στην κατασκευή δεν υπερβαίνουν το 5% της τιμής αυτής.

i. Αν $R$ είναι η πραγματική τιμή της αντίστασης του συγκεκριμένου αντιστάτη, να αιτιολογήσετε ότι η σχέση που αποδίδει μαθηματικά την παραπάνω κατάσταση είναι $d(R, 680) \leq 34$ ή αλλιώς $|R - 680| \leq 34$.

(Μονάδες 5)

ii. Μπορεί η πραγματική τιμή $R$ της αντίστασης του συγκεκριμένου αντιστάτη να είναι $715$Ω; Να χρησιμοποιήσετε τη σχέση του ερωτήματος (i) ή οποιονδήποτε άλλον τρόπο, για να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

iii. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη πραγματική τιμή $R$ της αντίστασης αυτού του αντιστάτη.

(Μονάδες 5)

β) Ο ίδιος κατασκευαστής, ύστερα από μια αλλαγή στον τρόπο παραγωγής, παρατηρεί ότι οι πραγματικές τιμές των αντιστατών που τώρα παράγει κυμαίνονται μεταξύ $650$Ω και $670$Ω. Έτσι χρειάζεται να καθορίσει νέα τιμή για την αντίσταση αυτού του είδους αντιστάτη.

i. Να προτείνετε μία νέα τιμή που ο κατασκευαστής μπορεί να καθορίσει για την αντίσταση του συγκεκριμένου αντιστάτη.

(Μονάδες 2)

ii. Με βάση την τιμή που προτείνατε, να βρείτε το ποσοστό της τιμής για το οποίο ο κατασκευαστής μπορεί να εγγυηθεί ότι οι οποιεσδήποτε διαφοροποιήσεις δεν θα υπερβαίνουν αυτό το ποσοστό.

(Μονάδες 8)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Η αιθανόλη, κοινώς οινόπνευμα ή αλκοόλ, είναι μία χημική ένωση που χρησιμοποιείται στην αντισηψία και στην αρωματοποιία. Ένα υγρό καθαριστικό χεριών μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αντισηπτικό, όταν περιέχει αιθανόλη κατά περισσότερο από $30\%$. Στην αρωματοποιία η αιθανόλη χρησιμοποιείται ως βάση για τα αρώματα μαζί με αιθέρια έλαια. Το ποσοστό συμμετοχής της αιθανόλης σε ένα άρωμα είναι συνήθως μεγαλύτερο του $70\%$.

α) Η Μαρία εργάζεται στην παραγωγή καθαριστικών χεριών. Σε ένα δοχείο περιέχονται $500$ ml ενός υγρού καθαριστικού χεριών με $20\%$ αιθανόλη.

i. Πόσα $ml$ αιθανόλης περιέχει το υγρό καθαριστικό;

(Μονάδες 2)

ii. Η Μαρία σκέφτεται ότι «εάν στο καθαριστικό χεριών προσθέσουμε αιθανόλη, ώστε να διπλασιαστεί η ποσότητά της, τότε θα διπλασιαστεί και το ποσοστό της αιθανόλης που περιέχει το καθαριστικό». Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τη σκέψη της Μαρίας; Να εξηγήσετε την επιλογή σας.

(Μονάδες 5)

iii. Πόσα $ml$ αιθανόλης πρέπει η Μαρία να προσθέσει στο παραπάνω υγρό καθαριστικό, ώστε το ποσοστό της αιθανόλης να είναι $45\%$;

(Μονάδες 5)

iv. Πόσα τουλάχιστον $ml$ αιθανόλης πρέπει η Μαρία να προσθέσει στο παραπάνω υγρό καθαριστικό, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αντισηπτικό χεριών;

(Μονάδες 6)

β) Η Σοφία έφτιαξε μόνη της ένα άρωμα $150ml$ χρησιμοποιώντας $80\%$ αιθανόλη και αιθέρια έλαια. Επειδή της φάνηκε βαρύ, αποφάσισε να αγοράσει επιπλέον αιθανόλη, για να το αραιώσει έτσι, ώστε η περιεκτικότητα του αραιωμένου αρώματος σε αιθέρια έλαια να είναι $15\%$. Πόσα $ml$ αιθανόλης πρέπει να αγοράσει επιπλέον;

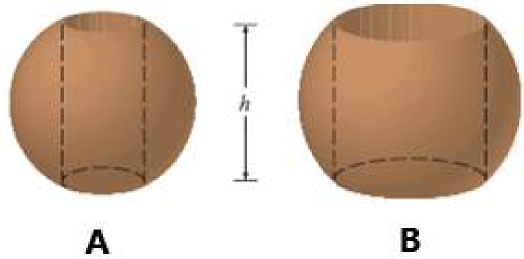
(Μονάδες 7)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός

Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

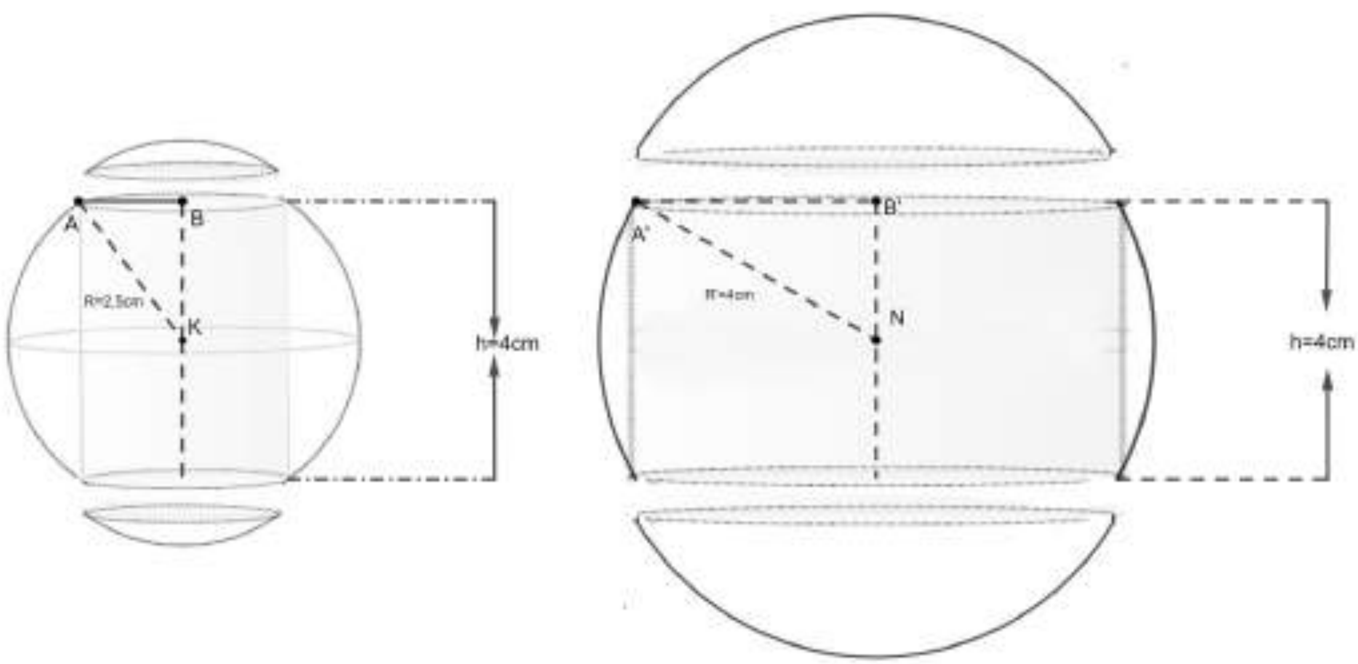
ΘΕΜΑ 4

Μια μικρή βιοτεχνία φτιάχνει κρίκους για πετσέτες, ανοίγοντας σε ξύλινες σφαίρες κυλινδρικές τρύπες με διάφορες διαμέτρους $\delta$ και ύψος $h = 4cm$ (με $\delta > h$). Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε δυο τέτοιους κρίκους. Αποτελείται κάποιος από τους παρακάτω κρίκους από περισσότερο ξύλο;




Μπορείτε να ελέγξτε την απάντησή σας στην παραπάνω ερώτηση ως εξής:

Παρακάτω βλέπετε τους κρίκους που έχουν προκύψει από τις ξύλινες σφαίρες, από τις οποίες έχουν αφαιρεθεί δυο σφαιρικά τμήματα πάνω και κάτω (δυο καπέλα) και έχει ανοιχτεί μια κυλινδρική τρύπα. Πιο συγκεκριμένα, ο μικρός κρίκος (αριστερά) έχει προκύψει από ξύλινη σφαίρα ακτίνας $R = 2{,}5cm$ και ο μεγάλος δεξιά από ξύλινη σφαίρα ακτίνας $R' = 4cm$.



α)

i. Να υπολογίσετε την ακτίνα της κυλινδρικής τρύπας σε κάθε ένα από τα παραπάνω σχήματα.

(Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε τον όγκο της κυλινδρικής τρύπας σε κάθε περίπτωση και να τον γράψετε στη μορφή $V = \alpha \cdot \pi$, με $\alpha$ φυσικό αριθμό.

(Μονάδες 6)

β)

i. Αν ο όγκος της κυλινδρικής τρύπας στον μικρό κρίκο είναι $V_A = 9\pi cm^3$ και στον μεγάλο κρίκο είναι $V_B = 48\pi cm^3$ και αν είναι γνωστό ότι ο όγκος των δύο σφαιρικών τμημάτων (τα δύο καπέλα πάνω και κάτω σε κάθε σχήμα) είναι για την μικρή σφαίρα $\frac{7}{6}\pi$ και για τη μεγάλη $\frac{80}{3}\pi$, να βρείτε τον όγκο του ξύλου που έμεινε (μετά τη δημιουργία της κυλινδρικής τρύπας) σε καθέναν από τους παραπάνω κρίκους.

(Μονάδες 8)

ii. Στη βιοτεχνία οι τεχνίτες προβληματίστηκαν με το εξής: μήπως αν επιλέξουν μια οποιαδήποτε σφαίρα ακτίνας $R_1 > 2$, για να φτιάξουν τον κρίκο με τον ίδιο τρόπο που περιγράφεται παραπάνω, θα μείνει ο ίδιος όγκος ξύλου που έμεινε και στους δυο προηγούμενους; Ρώτησαν έναν φίλο τους που μπορούσε να τους βοηθήσει και τους είπε: «Ο όγκος του ξύλου που θα μείνει θα είναι:

$$V = \frac{4}{3}\pi R_1^3 - 4\pi(R_1^2 - 4) - \frac{4}{3}\pi(R_1 - 2)^2(R_1 + 1)$$

και είναι ίσος με τον όγκο του ξύλου που έμεινε και στους δυο προηγούμενους (που βρήκατε στο βi) ερώτημα)».

Με δεδομένο τον παραπάνω τύπο, να ελέγξετε αν ο ισχυρισμός είναι σωστός. Μπορούμε να βγάλουμε ένα συμπέρασμα για τον όγκο του ξύλου που μένει σε κάθε περίπτωση στους κρίκους και τελικά να απαντήσουμε στην ερώτηση που τέθηκε στην αρχή;

(Μονάδες 5)

Δίνεται ο όγκος του κυλίνδρου: $V = \pi\rho^2 \cdot h$, όπου $\rho$ η ακτίνα και $h$ το ύψος του κυλίνδρου και ο όγκος της σφαίρας $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ , όπου $R$ η ακτίνα της σφαίρας.

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ο ενδοφλέβιος ορός χρησιμοποιείται για τη χορήγηση υγρών και φαρμάκων στους ασθενείς. Οι νοσηλευτές/τριες πρέπει να υπολογίζουν το ρυθμόν ροής $D$ ενός ορού σε σταγόνες ανά λεπτό. Οι νοσηλευτές/τριες χρησιμοποιούν τον τύπο:

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d} \cdot \mathrm{V}}{\mathrm{n}}, \text{ όπου}$$

$V$ είναι ο όγκος του ορού σε $mL$ ,

$d$ είναι ο συντελεστής σταγονομετρίας σε σταγόνες$/mL$ και

$n$ είναι τα λεπτά που πρέπει να διαρκέσει ο ορός.

α)

i. Ένας ασθενής εισάγεται στα επείγοντα με σοβαρό αλλεργικό σοκ. Ο γιατρός δίνει εντολή να χορηγηθούν ενδοφλεβίως $V = 250\,mL$ διαλύματος (που περιέχει αδρεναλίνη) μέσα σε $20$ λεπτά. Η συσκευή που χρησιμοποιείται έχει συντελεστή σταγονομετρίας $d = 20$ σταγόνες$/mL$. Ποιος πρέπει να είναι ο ρυθμός ροής $D$ του ορού, για να χορηγηθεί η αδρεναλίνη στο σωστό χρόνο;

(Μονάδες 4)

ii. Ένας ασθενής με υπογλυκαιμία χρειάζεται να λάβει $V = 500\,mL$ διαλύματος (που περιέχει Κάλιο). Η συσκευή έγχυσης έχει συντελεστή σταγονομετρίας $d = 15$ σταγόνες$/mL$ και ο ρυθμός ροής του ορού είναι $D = 25$ σταγόνες ανά λεπτό. Σε πόσες ώρες θα έχει χορηγηθεί το Κάλιο;

(Μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε τον όγκο $V$ ενός διαλύματος που χορηγείται σε 6 ώρες, αν:

i. Ο ρυθμός ροής $D$ του ορού είναι διπλάσιος του συντελεστή σταγονομετρίας $d$.

(Μονάδες 6)

ii. Ο συντελεστής σταγονομετρίας $d$ είναι το 1/3 του ρυθμού ροής $D$ του ορού.

(Μονάδες 6)

γ) Να υποθέσετε ότι είστε νοσηλευτής/τρια και έχετε στην διάθεσή σας μια κούτα με ίδιες συσκευές έγχυσης, αλλά δεν γνωρίζετε τον συντελεστή σταγονομετρίας τους $d$. Διαθέτετε επίσης ορούς των $V = 100mL$ και ένα χρονόμετρο. Να περιγράψετε τρόπους για να υπολογίσετε τον $d$.

(Μονάδες 5)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ένα από τα επακόλουθα της υπερθέρμανσης του πλανήτη μας είναι το λιώσιμο των πάγων. Δώδεκα χρόνια μετά το λιώσιμο των πάγων αρχίζουν να αναπτύσσονται στους βράχους μικροσκοπικά φυτά, που ονομάζονται λειχήνες. Κάθε λειχήνα αναπτύσσεται σε σχήμα περίπου κυκλικό. Ο παρακάτω τύπος χρησιμοποιείται, για να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η διάμετρος ($\delta$) της λειχήνας σε σχέση με την ηλικία της:

$$\delta(t) = 7 \cdot \sqrt{t-12},$$

όπου $\delta$ η διάμετρος της λειχήνας σε $mm$ και $t$ ο αριθμός των χρόνων που έχουν περάσει μετά το λιώσιμο των πάγων.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Ποια είναι η διάμετρος που θα έχει μια λειχήνα 16 χρόνια μετά το λιώσιμο των πάγων;

(Μονάδες 6)

γ) Η Άννα μέτρησε τη διάμετρο μιας λειχήνας που βρήκε σε κάποιο μέρος και είδε ότι ήταν $35mm$. Πόσα χρόνια έχουν περάσει από το λιώσιμο των πάγων σε αυτό το μέρος;

(Μονάδες 6)

δ) Αν μια λειχήνα διπλασίασε την επιφάνειά της τα τελευταία 6 χρόνια, πριν από πόσα χρόνια δημιουργήθηκε;

(Μονάδες 7)

Δίνεται ότι η επιφάνεια κύκλου με διάμετρο δ είναι : $E = \pi \cdot \frac{\delta^2}{4}$ .

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Το μέσο μήκος βήματος του ανθρώπου (δηλαδή η απόσταση από το ένα πόδι στο άλλο σε ένα βήμα) εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, όπως το ύψος, το φύλο, ο τρόπος βαδίσματος και το έδαφος. Μια γενική εκτίμηση για το μήκος βήματος σε έδαφος που είναι περίπου επίπεδο είναι για τις γυναίκες περίπου $0{,}42$ φορές το ύψος του ατόμου, ενώ για τους άνδρες είναι περίπου $0{,}44$ του ύψους του ατόμου.

α) Να υπολογίσετε το μέσο μήκος βήματος:

i. ενός άνδρα ύψους $1{,}85\ m$,

ii. μιας γυναίκας ύψους $1{,}80\ m$.

(Μονάδες 2+2)

β) Να γράψετε:

i. Μια συνάρτηση που να εκφράζει το μέσο μήκος βήματος $p$ μιας γυναίκας ανάλογα με το ύψος της σε $m$.

ii. Μια συνάρτηση που να δίνει την απόσταση $S$ που έχει διανύσει μια γυναίκα ύψους $1{,}80m$ σε σχέση με τον αριθμό $\beta$ των βημάτων που κάνει.

(Μονάδες 4+4)

γ) Να βρείτε το ύψος του άνδρα που έχει μέσο μήκος βήματος όσο το μέσο μήκος βήματος μιας γυναίκας ύψους $1{,}80m$.

(Μονάδες 6)

δ) Η Μαρία έχει ύψος $1{,}75m$ και κάθε μέρα κάνει βόλτα $2km$ με τον σκύλο της με μήκος βήματος περίπου $0{,}6m$. Η Μαρία κάνει περισσότερα βήματα ή ο σκύλος της; Πόσα περισσότερα και γιατί;

(Μονάδες 7)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Μια ομάδα τουριστών θέλει να επισκεφτεί την Ελλάδα για μια εκδρομή 6 ημερών και 5 διανυκτερεύσεων. Ένα τουριστικό γραφείο τούς κάνει την εξής προσφορά:

- Το κόστος του ξενοδοχείου είναι 80 ευρώ ανά άτομο για κάθε διανυκτέρευση.
- Τα αεροπορικά εισιτήρια (μαζί με την επιστροφή) κοστίζουν:
  320 ευρώ το άτομο, αν ταξιδέψουν μέχρι 20 άτομα,
  290 ευρώ το άτομο, αν ταξιδέψουν περισσότερα από 20 άτομα.
- Το πούλμαν που θα χρησιμοποιήσουν για να περιηγηθούν στην Ελλάδα κατά τις ημέρες διαμονής τους, κοστίζει:
  1.500 ευρώ για μέχρι 30 άτομα και
  2.400 ευρώ για περισσότερα από 30 άτομα.

Η εκδρομή μπορεί να πραγματοποιηθεί, αν η ομάδα των τουριστών αποτελείται από 15 έως 50 άτομα.

α) Να υπολογίσετε το συνολικό κόστος της εκδρομής για 18, για 25 και για 40 τουρίστες.

(Μονάδες 9)

β) Αν $x$ είναι το πλήθος των τουριστών, να γράψετε μια συνάρτηση με την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το κόστος της εκδρομής:

i. Αν $15 \leq x \leq 20$.

(Μονάδες 3)

ii. Αν $20 < x \leq 30$.

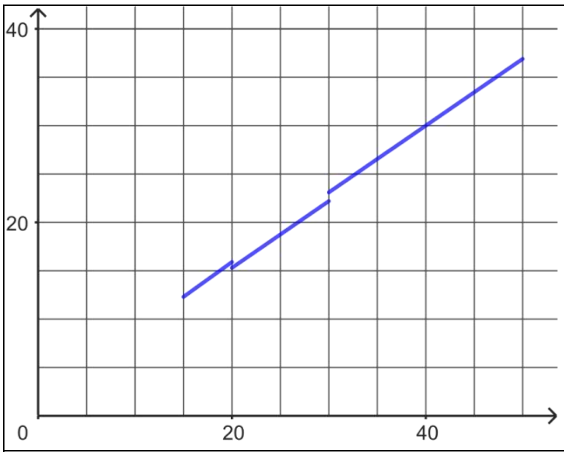
(Μονάδες 3)

iii. Για άλλες τιμές του $x$.

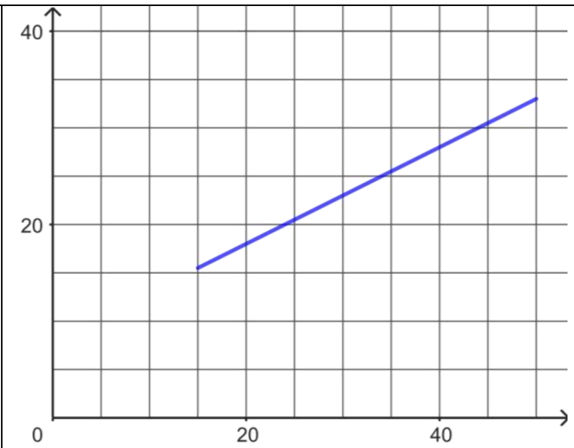
(Μονάδες 3)

γ) Στο σχήμα 1 παριστάνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος β), ενώ στο σχήμα 2 παριστάνεται μια αντίστοιχη γραφική παράσταση για το κόστος της εκδρομής με ένα άλλο τουριστικό γραφείο.

Στο οριζόντιο άξονα είναι το πλήθος των τουριστών, ενώ στον κατακόρυφο είναι το συνολικό κόστος της εκδρομής σε χιλιάδες ευρώ (το 20 αντιστοιχεί σε 20.000 ευρώ).




Σχήμα 1




Σχήμα 2

Να εξετάσετε αν κάποια από τις δύο προσφορές είναι φθηνότερη, ανεξάρτητα από το πλήθος των τουριστών. Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Η Χριστίνα σκέφτεται να αγοράσει ένα εξοχικό διαμέρισμα, για να το ενοικιάζει σε ταξιδιώτες που επισκέπτονται την περιοχή. Ψάχνοντας στο διαδίκτυο, βρήκε να πωλείται το παρακάτω διαμέρισμα:

| | | |
|---|---|---|
| Αριθμός δωματίων: | 1 τραπεζαρία και σαλόνι<br>1 υπνοδωμάτιο<br>1 μπάνιο |  |
| Επιφάνεια: | 60 τετραγωνικά μέτρα ($m^2$) | |
| Θέση πάρκινγκ: | ναι | |
| Χρόνος διαδρομής μέχρι το κέντρο της πόλης: | 10 λεπτά | |
| Απόσταση από την παραλία: | 350 μέτρα (m) σε ευθεία | |
| Μέση διάρκεια ενοικίασης τα τελευταία 10 χρόνια: | 315 ημέρες το χρόνο | Τιμή: $\mathbf{200.000}$ ευρώ (€) |

Για να αποφασίσει αν η τιμή πώλησης του διαμερίσματος είναι συμφέρουσα, η Χριστίνα απευθύνθηκε σε έναν ειδικό, ο οποίος παίρνει τις πληροφορίες της αγγελίας και εκτιμά την αξία ενός διαμερίσματος με βάση τα παρακάτω κριτήρια:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Τιμή ανά $m^2$ | Βασική τιμή: | 2.500 € ανά $m^2$ | | | |
| | | | | | |
| Κριτήρια που προ-σθέτουν αξία | Χρόνος διαδρομής μέχρι το κέντρο της πόλης: | Περισσότερο από 15 λεπτά: +0 € | Από 5 έως 15 λεπτά: +10.000 € | Λιγότερο από 5 λεπτά: +20.000 € | |
| | Απόσταση από την παραλία (σε ευθεία): | Περισσότερο από 2 km: +0 € | Από 1 έως 2 km: +5.000 € | Από 0,5 έως 1 km: +10.000 € | Λιγότερο από 0,5 km: +15.000 € |
| | Θέση πάρκινγκ: | Όχι: +0 € | Ναι: +35.000 € | | |

Αν η αξία του διαμερίσματος που υπολόγισε ο ειδικός είναι μεγαλύτερη από την τιμή πώλησης που έχει δοθεί στην αγγελία, η τιμή πώλησης θεωρείται «πολύ καλή» για τον υποψήφιο αγοραστή, δηλαδή για τη Χριστίνα.

α) Να εξηγήσετε γιατί, με βάση τα κριτήρια του ειδικού, η τιμή πώλησης που προτείνεται είναι «πολύ καλή» για τη Χριστίνα.

(Μονάδες 7)

β) Ο ειδικός στις πωλήσεις θέλει να κρατήσει τα χαρακτηριστικά του διαμερίσματος που βρήκε η Χριστίνα (με θέση πάρκινγκ, $10$ λεπτά από το κέντρο και $350m$ από την παραλία), αλλά όχι μόνο για διαμερίσματα $60$ τετραγωνικών. Αν λοιπόν ένα διαμέρισμα είναι $x$ τετραγωνικά, να βρείτε πόσο θα εκτιμήσει την τιμή πώλησης ενός τέτοιου διαμερίσματος ως συνάρτηση του $x$.

(Μονάδες 6)

γ)

i. Αν υποθέσουμε ότι το διαμέρισμα που σκέφτεται να αγοράσει η Χριστίνα νοικιάζεται σε ταξιδιώτες περίπου $315$ μέρες τον χρόνο σε μέση τιμή $100$ ευρώ την ημέρα και έχει κόστος συντήρησης και λειτουργίας $8.000$ ευρώ τον χρόνο, πόσα χρόνια χρειάζονται, ώστε τα κέρδη να καλύψουν το κόστος αγοράς;

(Μονάδες 5)

ii. Οι ίδιοι όροι ενοικίασης ($315$ ημέρες τον χρόνο από $100$ ευρώ την ημέρα και κόστος συντήρησης $8.000$ ευρώ τον χρόνο) ισχύουν για κάποια διαμερίσματα με εμβαδά από $50$ έως και $70$ τετραγωνικά μέτρα. Η Αθηνά θέλει να αγοράσει ένα από αυτά τα διαμερίσματα, για να το ενοικιάσει, ώστε να καλύψει το κόστος αγοράς του σε $5$ χρόνια. Τα διαμερίσματα έχουν ίδια χαρακτηριστικά με το διαμέρισμα που βρήκε η Χριστίνα (θέση πάρκινγκ, $10$ λεπτά από το κέντρο, $350m$ από την παραλία) και πωλούνται στην τιμή που έχει εκτιμήσει ο ειδικός στο ερώτημα β). Θα μπορούσε η Αθηνά να καλύψει, με τα κέρδη ενοικίασης, το κόστος αγοράς ενός τέτοιου διαμερίσματος σε $5$ χρόνια;

(Μονάδες 7)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ο Στέφανος μετακομίζει σε μια νέα πόλη για σπουδές και σκέφτεται να χρησιμοποιεί ποδήλατο για τις καθημερινές του μετακινήσεις. Προβληματίζεται όμως αν τον συμφέρει να αγοράσει καινούριο ποδήλατο ή να νοικιάσει ποδήλατο με το μήνα. Το ποδήλατο που του αρέσει κοστίζει καινούριο 400 ευρώ και υπολογίζει επίσης ότι θα έχει μηνιαία έξοδα για τη συντήρησή του κατά μέσο όρο 10 ευρώ. Ταυτόχρονα ρώτησε σε ένα μαγαζί όπου νοικιάζουν ποδήλατα και η ενοικίαση ποδηλάτου κοστίζει 35 ευρώ τον μήνα, αλλά χωρίς να έχει έξτρα έξοδα συντήρησης.

α) Ο Στέφανος θα χρησιμοποιήσει το ποδήλατο για 5 μήνες στις μετακινήσεις του. Πόσο θα πληρώσει συνολικά:

i. Αν αγοράσει ποδήλατο;

(Μονάδες 3)

ii. Αν νοικιάσει ποδήλατο;

(Μονάδες 3)

β) Να γράψετε μία σχέση που να εκφράζει τα συνολικά έξοδα του Στέφανου, αν αγοράσει και χρησιμοποιήσει το ποδήλατο για $x$ μήνες, και μία σχέση για τα έξοδά του, αν νοικιάσει και χρησιμοποιήσει ποδήλατο για $x$ μήνες.

(Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα σε μήνες, για το οποίο η αγορά καινούριου ποδηλάτου συμφέρει τον Στέφανο οικονομικά περισσότερο από τη μηνιαία ενοικίαση.

(Μονάδες 6)

δ) Σύμφωνα με έναν οικονομικό προϋπολογισμό που έκανε ο Στέφανος, τα έξοδά του για τη μετακίνησή του με το ποδήλατο δεν θέλει να ξεπεράσουν τα 600 ευρώ συνολικά τον πρώτο χρόνο των σπουδών του.

i. Ποια είναι η μεγαλύτερη χρονική διάρκεια, σε μήνες, που μπορεί να χρησιμοποιήσει το ποδήλατο, αν το αγοράσει, και ποια, αν το νοικιάσει;

(Μονάδες 6)

ii. Σε ποια ή ποιες από τις δύο επιλογές (αγορά ή ενοικίαση) τα ετήσια έξοδα για τη μετακίνησή του θα είναι εντός του προϋπολογισμού του;

(Μονάδες 3)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Η Άννα αποφάσισε να ξεκινήσει μια επιχείρηση πώλησης βιολογικού μελιού. Για να διαφημίσει το προϊόν της, χρησιμοποιεί ένα πρόγραμμα προώθησης, κάνοντας έκπτωση σε όποιον πελάτη αγοράσει ένα βάζο μέλι και συστήσει το προϊόν σε δύο φίλους του. Αν στη συνέχεια αυτοί οι δύο συστημένοι φίλοι αγοράσουν και αυτοί μέλι και συστήσουν με τη σειρά τους την επιχείρηση σε άλλους δύο φίλους τους ο καθένας, παίρνουν και αυτοί έκπτωση κ.ο.κ. Αρχικά λοιπόν, στην πρώτη φάση, η Άννα πουλάει το πρώτο της βάζο μελιού σε έναν πελάτη, ο οποίος συστήνει με τη σειρά του την επιχείρηση σε δύο φίλους του, και ευελπιστεί ότι το πρόγραμμα προώθησης που σκέφτηκε θα πετύχει.

α) Η Άννα σκέφτηκε ότι αν πετύχει αυτό το πρόγραμμα προώθησης που έχει σκεφτεί και όλοι οι συστημένοι πελάτες με τη σειρά τους αγοράσουν μέλι, τότε ο αριθμός των συστημένων πελατών που θα αγοράσουν μέλι σε κάθε φάση είναι όροι γεωμετρικής προόδου.

i. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο αυτής της προόδου.

(Μονάδες 4)

ii. Να υπολογίσετε τον αριθμό των καινούριων πελατών που θα αγοράσουν μέλι στην $7^{η}$ φάση αυτής της διαδικασίας, εφόσον πετύχει.

(Μονάδες 7)

iii. Πόσα βάζα θα έχει πουλήσει συνολικά η Άννα μέχρι και την $7^{η}$ φάση αυτής της διαδικασίας προώθησης, εφόσον όλοι οι πελάτες έχουν ακολουθήσει αυτή τη διαδικασία με επιτυχία;

(Μονάδες 7)

β) Η Άννα, κάνοντας έναν οικονομικό προϋπολογισμό, σκέφτηκε ότι η παραπάνω προωθητική στρατηγική δεν μπορεί να συνεχιστεί για πάντα, καθώς το μέλι θα αρχίσει να πουλιέται πολύ φθηνά. Έτσι σύμφωνα με τον σχεδιασμό της, πρέπει να φτάσει το πολύ μέχρι 9 φάσεις, ενώ ταυτόχρονα οι συνολικοί πελάτες να είναι λιγότεροι από 500. Μπορεί να επιτευχθεί αυτό το πλάνο της Άννας; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

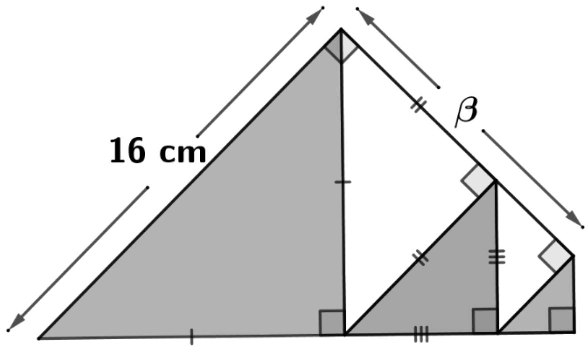
(Μονάδες 7)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός

Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ένας μαθητής χρησιμοποίησε ένα γκρι και ένα άσπρο χαρτόνι, για να φτιάξει ένα διακοσμητικό αποτελούμενο από γκρι και άσπρα ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα. Ξεκινώντας από ένα γκρι τρίγωνο με υποτείνουσα $16\ cm$, τα τοποθέτησε εναλλάξ έτσι, ώστε η κάθετη πλευρά του ενός να είναι η υποτείνουσα του επόμενου. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα πέντε πρώτα από αυτά.




α) Να χρησιμοποιήσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα, για να υπολογίσετε το μήκος των κάθετων πλευρών του αρχικού γκρι ορθογωνίου τριγώνου.

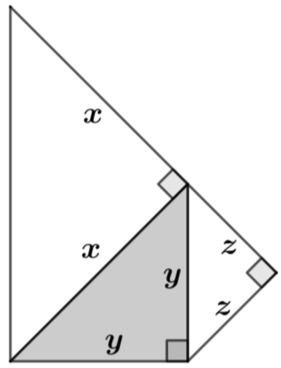
(Μονάδες 4)

β)

i. Αν $x$, $y$ και $z$ τα μήκη των κάθετων πλευρών τριών διαδοχικών τριγώνων, όπως φαίνεται στο σχήμα, να αποδείξετε ότι $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x$ και $z = \frac{1}{2}x$ .

(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε ότι τα μήκη των κάθετων πλευρών των άσπρων τριγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου $(\beta_\nu)$ με πρώτο όρο $\beta_1 = 8$ και γενικό όρο $\beta_\nu = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$.




(Μονάδες 7

γ) Να δείξετε ότι, όσα άσπρα τρίγωνα και να προστεθούν, το μήκος $\beta$ του ευθύγραμμου τμήματος που σχηματίζεται από τις κάθετες πλευρές τους θα είναι πάντα μικρότερο από την υποτείνουσα του αρχικού γκρι τριγώνου, δηλαδή από 16.

(Μονάδες 7)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της

Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Υπάρχουν αρκετοί τύποι για τον υπολογισμό της δόσης ενός φαρμάκου για παιδιά με βάση τη δόση για ενήλικες. Κάποιοι από αυτούς χρησιμοποιούν την ηλικία του παιδιού και κάποιοι το σωματικό του βάρος. Οι τύποι που δίνονται στη συνέχεια χρησιμοποιούν την ηλικία του παιδιού και ισχύουν για παιδιά με μέσο βάρος και μέση ανάπτυξη.

Τύπος του Γιουνγκ (Young's Formula): $Δόση\ για\ παιδιά = \frac{ε}{ε+12} \cdot Δόση\ για\ ενήλικες$, όπου $ε$ είναι η ηλικία του παιδιού (σε έτη) από ενός έτους μέχρι 12 ετών.

Τύπος του Φράιντ (Fried's Formula): $Δόση\ για\ παιδιά = \frac{μ}{150} \cdot Δόση\ για\ ενήλικες$, όπου $μ$ είναι η ηλικία του παιδιού (σε μήνες) έως 24 μηνών.

α) Αν το παιδί είναι $1{,}5$ έτους, να βρείτε τι μέρος της δόσης που αντιστοιχεί στον ενήλικα θα πάρει το παιδί, χρησιμοποιώντας καθέναν από τους δύο παραπάνω τύπους.

(Μονάδες 4)

β)

i. Να βρείτε, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Γιουνγκ, πόσων ετών πρέπει να είναι το παιδί, για να πάρει δόση φαρμάκου $60mgr$, εάν η δόση για τον ενήλικα είναι $300mg$.

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι σύμφωνα με τον τύπο του Φράιντ, για τη δόση του παιδιού ισχύει:

$0 < Δόση\ για\ παιδιά \leq \frac{4}{25} \cdot Δόση\ για\ ενήλικες$.

(Μονάδες 5)

iii. Θα μπορούσε με βάση τον τύπο του Φράιντ η δόση για το παιδί να είναι $60mgr$, αν η δόση για τον ενήλικα είναι $300mgr$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

γ) Θα μπορούσε σε κάποια ηλικία το παιδί να πάρει την ίδια δόση του φαρμάκου με βάση και τους δύο παραπάνω τύπους; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

(Μονάδες 6)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Οι επιστήμονες παρακολουθούν το λιώσιμο ενός παγετώνα λόγω της κλιματικής αλλαγής. Η συνάρτηση που εκφράζει τον όγκο του παγετώνα $V(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου $t$ δίνεται από τον τύπο $V(t) = 4.500 - 15t$, όπου $t$ είναι τα έτη μετά το $2020$, π.χ. το $t = 5$ δηλώνει το 2025.

α) Να περιγράψετε τι εκφράζουν, στο πλαίσιο του προβλήματος, οι αριθμοί $4.500$ και $15$ στον τύπο της συνάρτησης $V(t)$.

(Μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε ποιος περίπου θα είναι ο όγκος του παγετώνα το έτος $2040$.

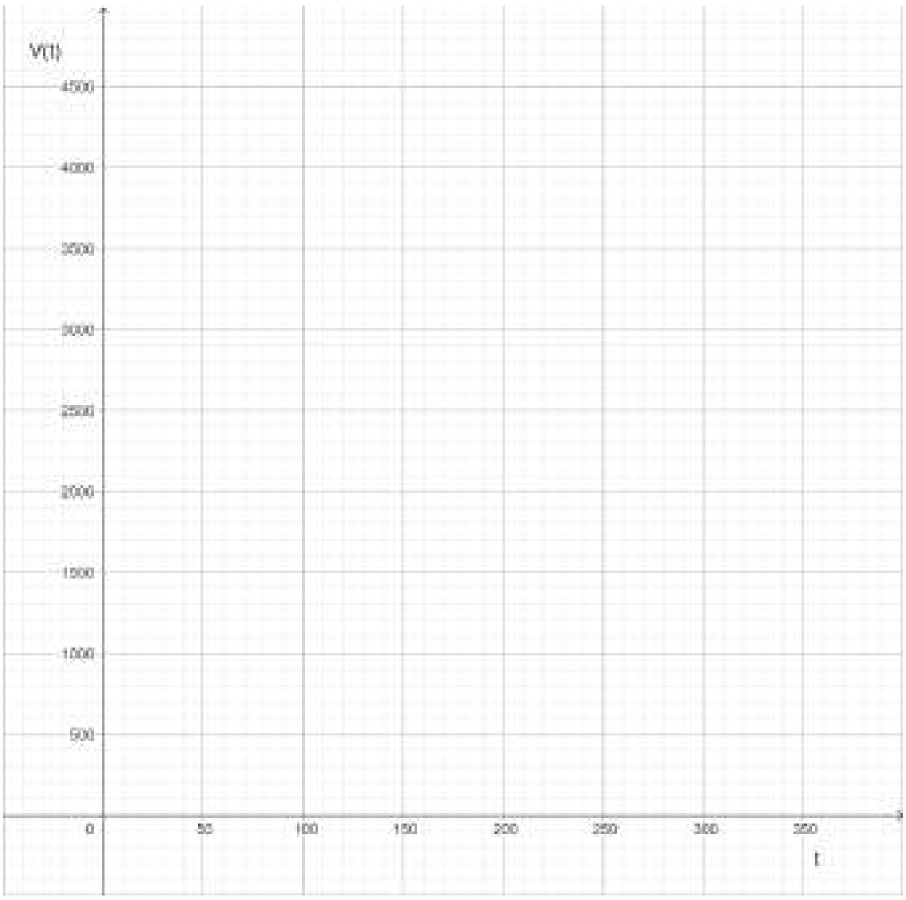
(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε σε ποιο έτος ο όγκος του παγετώνα θα πέσει κάτω από $500m^3$, αν συνεχιστεί ο ίδιος ρυθμός λιωσίματος που παρατήρησαν οι επιστήμονες.

(Μονάδες 6)

δ)

i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω σύστημα αξόνων και να σχεδιάσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $V(t)$ ως συνάρτηση του $t$.



(Μονάδες 4)

ii. Να ελέγξετε αν το σημείο (300,0) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

(Μονάδες 3)

iii. Αν ναι, να ερμηνεύσετε το σημείο αυτό στο πλαίσιο του προβλήματος που αφορά τον όγκο του παγετώνα και το λιώσιμο των πάγων.

(Μονάδες 4)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Μια εταιρεία κατασκευάζει μετρητές αποστάσεων με χρήση Laser. Για να ξεκινήσει την παραγωγή ενός νέου μετρητή, πρέπει το σφάλμα μέτρησης $|x - x_\alpha|$, όπου $x_\alpha$ είναι η πραγματική απόσταση και $x$ το αποτέλεσμα της μέτρησης με τη νέα συσκευή, να είναι το πολύ μέχρι το $1\%$ της πραγματικής απόστασης $x_\alpha$.

α) Αν στις δοκιμές που έκανε η εταιρεία, η πραγματική απόσταση ήταν $x_\alpha = 200\ m$, ποιες τιμές της μέτρησης $x$ είναι αποδεκτές;

(Μονάδες 5)

β)

i. Να δείξετε ότι γενικότερα οι τιμές $x$ της μέτρησης με τον μετρητή μπορεί να είναι από $0{,}99x_\alpha$ μέχρι και $1{,}01x_\alpha$, δηλαδή ότι ισχύει $0{,}99x_a \leq x \leq 1{,}01x_\alpha$.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι δύο μετρήσεις της ίδιας πραγματικής απόστασης $x_\alpha$ μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους το πολύ κατά $0{,}02x_\alpha$.

(Μονάδες 3)

iii. Μέχρι ποια απόσταση $x_\alpha$, οι διάφορες μετρήσεις $x$ που μπορεί να δώσει ο μετρητής για αυτή, δεν μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους περισσότερο από $0{,}5\ m$;

(Μονάδες 6)

γ) Αν η τιμή που δίνει ο μετρητής είναι $x = 150\ m$, ποιες είναι οι πιθανές τιμές $x_a$ της πραγματικής απόστασης;

(Μονάδες 7)

(Δίνεται ότι $\frac{150}{1{,}01} \simeq 148{,}51$ και $\frac{150}{0{,}99} \simeq 151{,}51$)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ο Αντόνιο και η Μπάρμπαρα ξεκινούν να εργάζονται σε διαφορετικές εταιρείες την ίδια μέρα. Ο καθένας έχει ετήσιο μισθό 8.000 ευρώ κατά τον πρώτο χρόνο απασχόλησης. Οι συμβάσεις εργασίας προβλέπουν αύξηση μισθού στην αρχή κάθε επόμενου έτους (δηλαδή στην αρχή του δεύτερου έτους, του τρίτου, κτλ). Ο Αντόνιο πληρώνεται με βάση το σχέδιο Α και η Μπάρμπαρα με βάση το σχέδιο Β.

Σχέδιο Α: Ο ετήσιος μισθός αυξάνεται κατά 450 ευρώ κάθε χρόνο.

Σχέδιο Β: Ο ετήσιος μισθός αυξάνεται κατά 5% κάθε χρόνο.

α) Να υπολογίσετε τον ετήσιο μισθό του Αντόνιο και της Μπάρμπαρα στην αρχή του τρίτου έτους της απασχόλησής τους.

(Μονάδες 4)

β) Να γράψετε μια αλγεβρική έκφραση για τον ετήσιο μισθό του Αντόνιο και τον αντίστοιχο της Μπάρμπαρα στην αρχή του $\nu$ −οστού έτους απασχόλησής τους.

(Μονάδες 8)

γ) Ο Αντόνιο ισχυρίζεται ότι ο ετήσιος μισθός του θα είναι κάθε χρόνο μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της Μπάρμπαρα, αφού από τη συμπλήρωση του πρώτου κιόλας χρόνου θα παίρνει περισσότερα χρήματα από εκείνην. Η Μπάρμπαρα διαφωνεί και του λέει ότι αυτό θα ισχύει μέχρι την συμπλήρωση του 6$^{ου}$ χρόνου. Μόλις ξεκινήσει ο 7$^{ος}$ χρόνος τους στην εταιρεία, ο ετήσιος μισθός της θα είναι μεγαλύτερος. Με ποια από τις δυο τοποθετήσεις συμφωνείτε; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

(Μονάδες 8)

δ) Εάν τόσο ο Αντόνιο όσο και η Μπάρμπαρα εργαστούν στις ίδιες εταιρείες για συνολικά 15 χρόνια, να βρείτε τη διαφορά των χρημάτων που θα έχουν εισπράξει κατά τη διάρκεια αυτών των 15 ετών.

(Μονάδες 5)

Δίνεται ότι $1{,}05^5 \cong 1{,}28$

$1{,}05^6 \cong 1{,}34$

$1{,}05^{15} \cong 2{,}08$

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι σε μια κατακόρυφη βολή προς τα πάνω η σχέση που συνδέει το ύψος (την απόσταση στην οποία φτάνει το βλήμα από το έδαφος) $h$ σε $m$, την επιτάχυνση της βαρύτητας $g$ σε $m/s^2$, την αρχική ταχύτητα $\upsilon_0$ σε $m/s$ και τον χρόνο $t$ σε $sec$ είναι η $h = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του βλήματος $\upsilon$ σε χρόνο t από την αρχή της κίνησης είναι $\upsilon = \upsilon_0 - gt$.

Σε ένα πείραμα για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας στην επιφάνεια του Άρη, ένα βλήμα βάλλεται προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 10\ m/s$. Από τα δεδομένα του πειράματος γίνεται γνωστό ότι το βλήμα χρειάζεται $t = 5{,}4\ s$ για να επιστρέψει στο επίπεδο από όπου ξεκίνησε (σημείο με μηδενικό ύψος). Στον Άρη η ατμόσφαιρα είναι εξαιρετικά αραιή και για αυτόν τον λόγο η αντίσταση θεωρείται αμελητέα.

α) Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πειράματος, να βρείτε ποια είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας στον πλανήτη Άρη.

(Μονάδες 7)

β)

i. Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι η τροχιά του βλήματος είναι συμμετρική (χρόνος ανόδου = χρόνος καθόδου), ποιο είναι το μεγαλύτερο ύψος στο οποίο θα φτάσει όταν βρίσκεται στον πλανήτη Άρη;

(Μονάδες 6)

ii. Να συγκρίνετε αυτό το ύψος με το μεγαλύτερο ύψος στο οποίο θα μπορούσε να φτάσει, αν το ίδιο βλήμα έκανε την ίδια ακριβώς κίνηση στη Γη, που έχει επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 m/s^2$ (θεωρούμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα).

(Μονάδες 7)

γ) Η Αλεξάνδρα λέει στον συμμαθητή της τον Μάριο: «Αν έχουμε ένα drone στον Άρη, το βάρος του θα είναι περίπου το $1/3$ του βάρους που θα είχε στη Γη, άρα είναι πιο εύκολο να απογειωθεί». Συμφωνείτε με την Αλεξάνδρα; Να εξηγήσετε την σκέψη σας.

(Μονάδες 5)

Δίνεται τύπος υπολογισμού βάρους: $W = m \cdot g$, όπου $m$ η μάζα του σώματος.

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ένα γραπτό τεστ γνώσεων αποτελείται από $20$ ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, καθεμία από τις οποίες έχει μοναδική σωστή απάντηση.

Υπάρχουν δύο τρόποι να βαθμολογηθεί το τεστ:

- Πρώτος τρόπος: Κάθε σωστή απάντηση αντιστοιχεί σε $5$ μονάδες, χωρίς «αρνητική βαθμολογία», δηλαδή χωρίς κανείς να χάνει μονάδες για κάθε λαναθασμένη απάντηση.
- Δεύτερος τρόπος: Κάθε σωστή απάντηση αντιστοιχεί σε $4{,}5$ μονάδες και υπάρχει «αρνητική βαθμολογία» $0{,}5$ μονάδα για κάθε λανθασμένη, ενώ $10$ επιπλέον μονάδες παίρνει κανείς, αν παραδώσει το τεστ πλήρως απαντημένο (δεν έχει μείνει καμιά ερώτηση αναπάντητη).

α) Πόσους βαθμούς θα πάρει με τον πρώτο και με τον δεύτερο τρόπο βαθμολόγησης ένα πλήρως απαντημένο τεστ με καμία σωστή απάντηση και πόσους ένα άλλο με μόνο δύο σωστές απαντήσεις;

(Μονάδες 8)

β) Βαθμολογούμε ένα πλήρως απαντημένο τεστ και με τους δύο τρόπους. Δίνει κάποιος από τους τρόπους βαθμολόγησης μεγαλύτερη βαθμολογία, ανεξάρτητα από το πλήθος των σωστών απαντήσεων;

(Μονάδες 7)

γ) Από τον φορέα που σχεδίασε το τεστ προτάθηκε ένας τρίτος τρόπος βαθμολόγησης. Σύμφωνα με αυτόν, αν $x$ είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων του απαντημένου τεστ, τότε η βαθμολογία του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<4\\ 6{,}5x-20, & 4\le x\le 18\\ 100, & 18<x\le 20\end{cases}$$

Βαθμολογούμε ένα πλήρως απαντημένο τεστ με τον πρώτο και με τον τρίτο τρόπο. Πόσες πρέπει να είναι οι σωστές απαντήσεις, ώστε το τεστ αυτό να πάρει μεγαλύτερη βαθμολογία με τον τρίτο τρόπο βαθμολόγησης;

(Μονάδες 10)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα γραπτό τεστ γνώσεων η μέγιστη βαθμολογία είναι $100$ και η ελάχιστη είναι $0$.

Το τεστ αποτελείται από $20$ ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, καθεμία από τις οποίες έχει μοναδική σωστή απάντηση. Το τεστ βαθμολογείται ως εξής:

κάθε σωστή απάντηση αντιστοιχεί σε $5$ μονάδες και υπάρχει «αρνητική βαθμολογία» $0{,}5$ μονάδα, δηλαδή αφαιρείται $0{,}5$ μονάδα για κάθε λανθασμένη απάντηση. Επίσης, αν σε κάποια ερώτηση δεν δοθεί καμία απάντηση, αυτή δεν βαθμολογείται.

Πλήρως απαντημένο θεωρείται ένα τεστ, του οποίου έχουν απαντηθεί όλες οι ερωτήσεις, είτε σωστά είτε λανθασμένα.

α) Πόσους βαθμούς θα πάρει ένα πλήρως απαντημένο τεστ με δύο σωστές απαντήσεις;

(Μονάδες 5)

β)

i. Ένα πλήρως απαντημένο τεστ πήρε $0$. Να αποδείξετε ότι είχε το πολύ μία σωστή απάντηση.

(Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός πλήρως απαντημένου τεστ, με περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις, είναι $5{,}5x - 10$, όπου $x$ είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων.

(Μονάδες 5)

iii. Ένα τεστ βαθμολογήθηκε με $84$. Ήταν το τεστ πλήρως απαντημένο; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

(Μονάδες 5)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα τηλεπαιχνίδι ερωτήσεων κάθε παίκτης ή παίκτρια απαντάει ερωτήσεις τη μία μετά την άλλη και συγκεντρώνει βαθμούς. Σύμφωνα με τους κανόνες του παιχνιδιού:

- Κερδίζει $10$ βαθμούς για κάθε σωστή απάντηση
- Χάνει $3$ βαθμούς για κάθε λανθασμένη απάντηση.
- Αν δεν απαντήσει καθόλου σε κάποια ερώτηση, δεν κερδίζει ούτε χάνει βαθμούς.
- Σταματάει να παίζει και χάνει, όταν η βαθμολογία του γίνει αρνητική.
- Ο μέγιστος αριθμός ερωτήσεων που μπορεί να απαντήσει είναι $30$.

α) Μια παίκτρια έχει απαντήσει μέχρι στιγμής σε $5$ ερωτήσεις, σωστά σε $3$ και λάθος σε $2$.

i. Ποια είναι η μεγαλύτερη βαθμολογία στην οποία μπορεί φτάσει μέχρι το τέλος;

(Μονάδες 5)

ii. Αν απαντήσει σωστά σε $x$ ακόμα ερωτήσεις και λάθος στις υπόλοιπες, χωρίς να χάσει, να αποδείξετε ότι η τελική βαθμολογία της δίνεται από τη σχέση:

$$13x - 51.$$

(Μονάδες 7)

iii. Αν απαντήσει σε όλες τις υπόλοιπες ερωτήσεις είτε σωστά είτε λάθος, χωρίς να χάσει, να αποδείξετε ότι δεν μπορεί να πάρει λιγότερο από $1$ βαθμό.

(Μονάδες 5)

β) Ένας παίκτης σκέφτηκε να ακολουθήσει μία από τις δύο στρατηγικές:

- 1η στρατηγική: Να απαντάει μόνο τις ερωτήσεις των οποίων γνωρίζει με βεβαιότητα τις σωστές απαντήσεις.
- 2η στρατηγική: Να απαντάει όλες τις ερωτήσεις ανεξάρτητα από το αν γνωρίζει τις σωστές απαντήσεις ή όχι.

Τελικά επέλεξε στρατηγική και απάντησε σε όλες τις ερωτήσεις του παιχνιδιού, χωρίς να χάσει.

i. Σύμφωνα με τη δεύτερη στρατηγική: Αν $\sigma$ είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων για τις οποίες ήταν σίγουρος και πράγματι απάντησε σωστά και $x$ είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων που έδωσε χωρίς να είναι σίγουρος, να αποδείξετε ότι η βαθμολογία του δίνεται από τον τύπο $13x + 13\sigma - 90$, με $0 \leq x \leq 30 - \sigma$.

(Μονάδες 5)

ii. Αν γνώριζε τις σωστές απαντήσεις σε 4 από τις 30 ερωτήσεις και ακολούθησε τη δεύτερη στρατηγική, σε πόσες από τις τυχαία απαντημένες ερωτήσεις θα πρέπει να πέτυχε τη σωστή απάντηση, ώστε να θεωρήσουμε επιτυχή την επιλογή στρατηγικής;

(Μονάδες 3)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Στο χάντμπολ κάθε ομάδα μπορεί να πετύχει 1 γκολ σε κάθε επίθεση και ένας αγώνας μπορεί να λήξει ισόπαλος, όπως στο ποδόσφαιρο.

Η ομάδα χάντμπολ Αιακός στην προπόνηση εξασκείται στο σύστημα επίθεσης «κόντρα από ένα», με το οποίο, αν πετύχει, βρίσκεται σε θέση για γκολ ο δεξιός σουτέρ της ομάδας.

α) Ο Αιακός δίνει αγώνα με την ομάδα Πέλοπας. Οκτώ λεπτά πριν από τη λήξη του αγώνα βρίσκεται πίσω από τον Πέλοπα με 22-18. Ο προπονητής του Αιακού σκέφτεται να ζητήσει από τους παίκτες του την εφαρμογή της «κόντρας από ένα» σε όλες τις επιθέσεις που μένουν μέχρι το τέλος του αγώνα.

Από τα στατιστικά των προηγούμενων αγώνων έχει προκύψει ότι:

- Στο 50% των επιθέσεων πετυχαίνει το συγκεκριμένο σύστημα και ο δεξιός σουτέρ βρίσκεται σε θέση για γκολ.
- Στο 80% των περιπτώσεων που βρίσκεται σε θέση για γκολ ο δεξιός σουτέρ, ο Αιακός πετυχαίνει γκολ. Τις υπόλοιπες το χάνει.

i. Να αποδείξετε ότι στα $\frac{2}{5}$ συνόλου των επιθέσεων του Αιακού με το σύστημα «κόντρα από ένα», ο δεξιός σουτέρ πετυχαίνει γκολ.

(Μονάδες 7)

ii. Αν μέχρι το τέλος του αγώνα ο Αιακός κάνει ακόμα 10 επιθέσεις, τότε, βάσει των στατιστικών, σε πόσες από αυτές εκτιμάτε ότι θα βρεθεί σε θέση για γκολ ο δεξιός σουτέρ και πόσα γκολ θα πετύχει ο Αιακός;

(Μονάδες 6)

iii. Μπορεί ο Αιακός να πετύχει νίκη σε αυτό τον αγώνα, κάνοντας 10 επιθέσεις με το σύστημα «κόντρα από ένα»;

(Μονάδες 4)

β) Την επόμενη αγωνιστική περίοδο, με σκληρή προπόνηση, ο Αιακός κατάφερε να βελτιώσει τα στατιστικά του, στο «κόντρα από ένα»:

- Στο 80% των περιπτώσεων πετυχαίνει το συγκεκριμένο σύστημα και ο δεξιός σουτέρ βρίσκεται σε θέση για γκολ.
- Στο 90% των περιπτώσεων που βρίσκεται σε θέση για γκολ ο δεξιός σουτέρ, ο Αιακός πετυχαίνει γκολ. Τις υπόλοιπες το χάνει.

Αν βρεθεί πάλι να χάνει με $4$ γκολ $8$ λεπτά πριν από τη λήξη ενός αγώνα, σε πόσες επιθέσεις μπορεί να ανατρέψει το αποτέλεσμα με το «κόντρα από ένα», αν δεν δεχτεί άλλο γκολ;

(Μονάδες 8)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων με υπολογισμούς χρησιμοποιούνται ηλεκτρονικοί υπολογιστές ή δίκτυα υπολογιστών. Αν δημιουργήσουμε ένα δίκτυο υπολογιστών με υπολογιστές γενιάς G, τότε για κάθε επιπλέον υπολογιστή ο χρόνος που χρειάζεται για την επίλυση ενός οποιουδήποτε προβλήματος μειώνεται κατά 25% σε σύγκριση με τον χρόνο που χρειαζόταν χωρίς τον επιπλέον υπολογιστή.

α) Για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος με σύνθετους υπολογισμούς έχει εκτιμηθεί ότι ένας υπολογιστής γενιάς G χρειάζεται $20$ δευτερόλεπτα. Χρησιμοποιούμε ένα δίκτυο $3$ υπολογιστών γενιάς G. Είναι σωστή καθεμία από τις επόμενες προτάσεις; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

i. Ο χρόνος που θα χρειαστεί το δίκτυο των $3$ υπολογιστών για την επίλυση του προβλήματος είναι μεταξύ 11 και 12 δευτερολέπτων.

(Μονάδες 5)

ii. Με το δίκτυο των $3$ υπολογιστών, ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος μειώνεται κατά $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 20$ δευτερόλεπτα.

(Μονάδες 5)

iii. Ο χρόνος που χρειάζεται το δίκτυο $3$ υπολογιστών για την επίλυση του προβλήματος είναι $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 20$ δευτερόλεπτα.

(Μονάδες 5)

β) Αν $t$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να επιλυθεί ένα σύνθετο πρόβλημα με υπολογισμούς από $1$ υπολογιστή γενιάς G, να αποδείξετε ότι ένα δίκτυο $\nu$ υπολογιστών γενιάς G λύνει το ίδιο πρόβλημα σε $\left(\frac{3}{4}\right)^{\nu-1} \cdot t$.

(Μονάδες 5)

γ) Ένα σύνθετο πρόβλημα λύνεται με ένα δίκτυο $4$ υπολογιστών γενιάς G σε $3$ δευτερόλεπτα. Σε πόσο χρόνο θα λυνόταν το ίδιο πρόβλημα με $1$ υπολογιστή γενιάς G;

(Μονάδες 5)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός

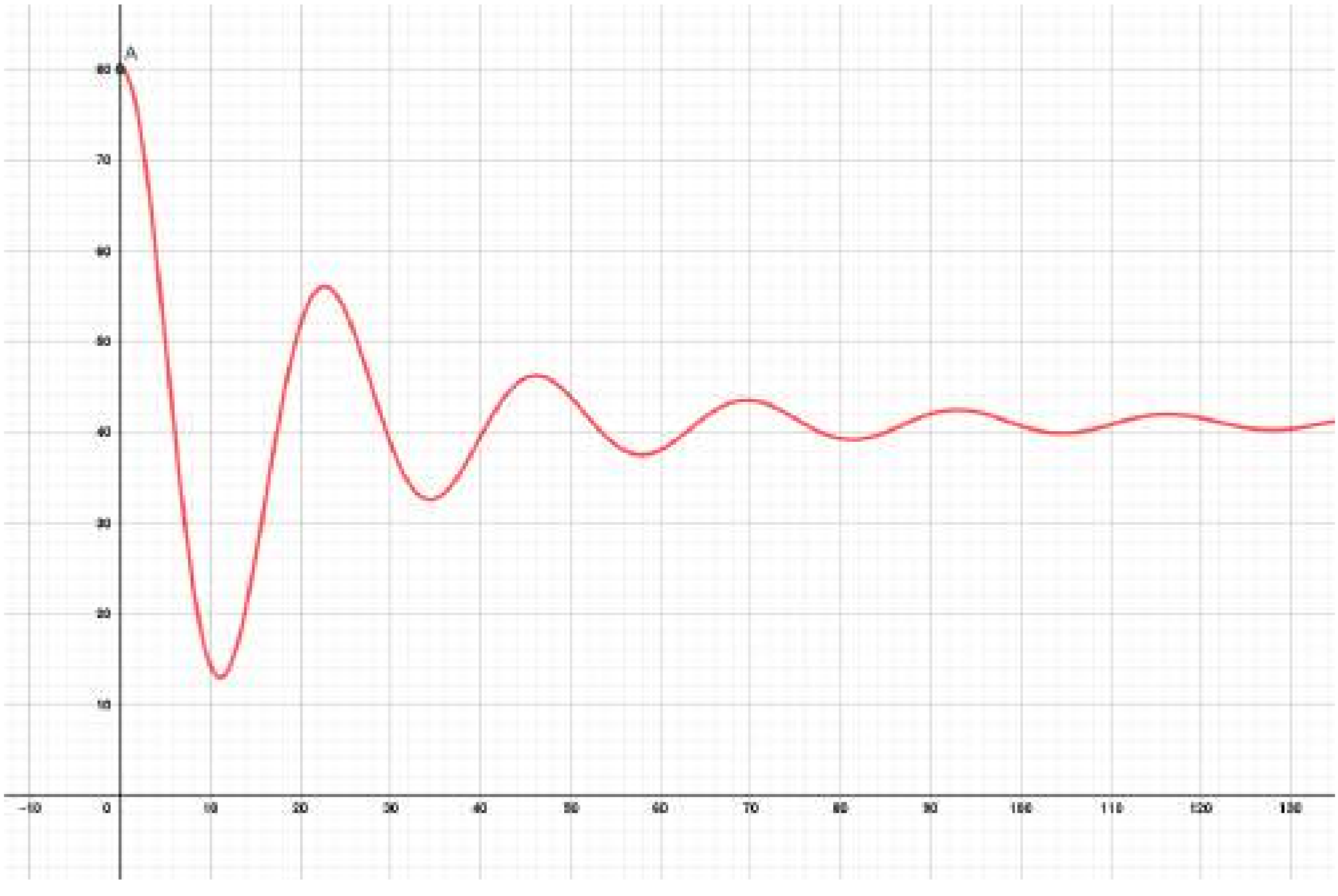
Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Κατά το άλμα ενός ανθρώπου στο μπάντζι τζάμπινγκ (bungee jumping) καταγράφηκαν τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα:

| χρόνος (sec) | 0 | 2 | 6 | 8 | 10 | 11 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ύψος (m) | 80 | 74 | 40 | 23 | 14 | 13 | 26 | 52 | 53 | 39 | 33 | 40 | 46 | 44 | 38 |

Ένας από τους ερευνητές που μελετούσαν το άλμα, προκειμένου να καθορίσουν την επίδρασή του στον ανθρώπινο οργανισμό, πρότεινε ως μοντέλο την παρακάτω γραφική παράσταση. Ο οριζόντιος άξονας παριστάνει τον χρόνο που περνάει από τη στιγμή που ο άνθρωπος πηδά και ο κατακόρυφος άξονας παριστάνει το ύψος στο οποίο βρίσκεται ο άνθρωπος, δηλαδή την απόστασή του από το έδαφος σε κάθε χρονική στιγμή.




Με βάση τις παραπάνω πληροφορίες:

α) Να εκτιμήσετε ποια θα είναι περίπου η απόσταση του ανθρώπου από το έδαφος κατά τις χρονικές στιγμές $60\,sec$, $65\,sec$, $74\,sec$, $78\,sec$ και $84\,sec$, όπως προβλέπεται από το μοντέλο.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε από ποιο ύψος πηδάει ο άνθρωπος, ποιο είναι το μικρότερο ύψος στο οποίο φτάνει και σε ποια χρονική στιγμή φτάνει σε αυτό.

(Μονάδες 5)

γ) Σε ποιες χρονικές στιγμές ο άνθρωπος φτάνει σε ύψος $40$ μέτρων μέσα στα πρώτα $40\ sec$ μετά την πτώση;

(Μονάδες 5)

δ) Κάποιος ισχυρίστηκε ότι μετά τα πρώτα $40\ sec$ η διαφορά ύψους χαμηλότερου και ψηλότερου σημείου της κίνησης του ανθρώπου είναι μικρότερη από $5$ μέτρα. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε με αυτόν τον ισχυρισμό; Να εξηγήσετε γιατί.

(Μονάδες 5)

ε) Να εκτιμήσετε τι συμβαίνει στη διαφορά ύψους χαμηλότερου και ψηλότερου σημείου της κίνησης του ανθρώπου όσο περνά ο χρόνος, δηλαδή για μεγάλες τιμές του χρόνου.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Κάθε χρόνο οι δασικές πυρκαγιές εξαπλώνονται με γρήγορο ρυθμό και καίνε μεγάλες εκτάσεις γης. Για την κατάσβεσή τους χρησιμοποιούνται πυροσβεστικά οχήματα που εκτοξεύουν δέσμες νερού. Ένα πυροσβεστικό όχημα εκτοξεύει δέσμη νερού, της οποίας η τροχιά μπορεί να μοντελοποιηθεί από τη συνάρτηση $υ(x) = -0{,}13x^2 + x + 3$, όπου $υ(x)$ είναι το ύψος (σε μέτρα $m$) της δέσμης νερού από το έδαφος, και $x$ (σε $m$) είναι η οριζόντια απόσταση της δέσμης από το πυροσβεστικό όχημα.

α)

i. Σε ποια απόσταση από το πυροσβεστικό όχημα φτάνει το νερό στο έδαφος; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

(Μονάδες 5)

ii. Αν σε κάποια στιγμή το ύψος του νερού είναι 4 μέτρα, πόσα ακόμα μέτρα θα πρέπει να διανύσει οριζόντια το νερό, ώστε να φτάσει στο έδαφος; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

(Μονάδες 6)

β)

i. Μία φωτιά έχει ξεσπάσει σε πλαγιά, σε ύψος 9 μέτρα από το επίπεδο όπου βρίσκεται το πυροσβεστικό, και εξαπλώνεται προς τα πάνω. Το πυροσβεστικό όχημα μένει στη θέση του και ρυθμίζει την εκτόξευση της δέσμης νερού, ώστε τώρα αυτή να ακολουθεί την τροχιά της συνάρτησης $h(x) = -x^2 + 10x$, για να μπορεί να φτάσει τη φωτιά, όπου $h(x)$ είναι το ύψος (σε μέτρα $m$) της δέσμης νερού από το έδαφος και $x$ (σε $m$) είναι η οριζόντια απόσταση του πυροσβεστικού οχήματος από τη φωτιά. Πόσο πρέπει να απέχει οριζόντια το πυροσβεστικό όχημα από τη φωτιά, ώστε η δέσμη νερού που θα εκτοξεύσει να φτάνει τη φωτιά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

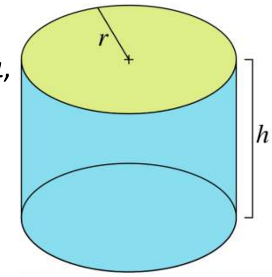
ii. Να αποδείξετε ότι το πυροσβεστικό όχημα με τη συγκεκριμένη ρύθμιση της δέσμης νερού δεν μπορεί να φτάσει οποιαδήποτε φωτιά βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο των 25 μέτρων.

(Μονάδες 6)

(Δίνεται ότι: $\sqrt{4.800} \cong 69$, $\frac{31}{26} \cong 1{,}2$)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4




Τα κυλινδρικά μεταλλικά δοχεία (κονσέρβες) παράγονται σε εκατομμύρια, οπότε οποιαδήποτε εξοικονόμηση μπορεί να γίνει στην κατασκευή τους είναι σημαντική. Μέρος του κόστους κατασκευής τους εξαρτάται από την ποσότητα του μετάλλου που χρησιμοποιείται, επομένως είναι λογικό να επιδιώκεται ο σχεδιασμός κουτιών που απαιτούν την ελάχιστη δυνατή ποσότητα μετάλλου που θα περικλείει ορισμένο όγκο.

Το πιο δημοφιλές μέγεθος κυλινδρικού μεταλλικού δοχείου (κονσέρβα), με το οποίο θα ασχοληθούμε στη συνέχεια του προβλήματος, περιέχει όγκο $V = 440ml$ περίπου.

Η επιφάνεια του κυλίνδρου δίνεται από τη σχέση $E = 2\pi rh + 2\pi r^2$ και ο όγκος του από την σχέση $V = \pi r^2 h$, όπου $r$ είναι η ακτίνα της βάσης και $h$ το ύψος του κυλίνδρου.

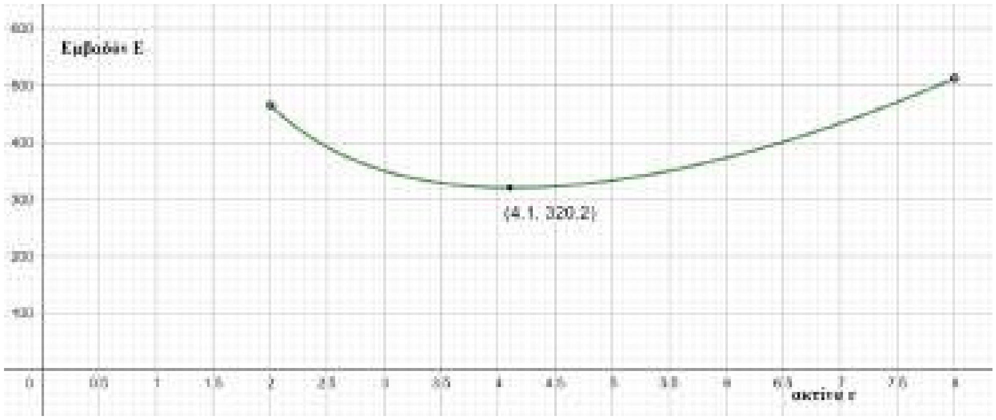
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση που εκφράζει την επιφάνεια $E$ της κονσέρβας ως συνάρτηση της ακτίνας $r > 0$ είναι η $E(r) = \frac{880}{r} + 2\pi r^2$.

(Μονάδες 8)

β) Οι κατασκευαστές αποφάσισαν να δοκιμάσουν η ακτίνα $r$ της κονσέρβας να παίρνει τιμές μεταξύ $2cm$ και $8cm$, για να δουν αν για κάποια τιμή της ακτίνας στο διάστημα αυτό θα ελαχιστοποιηθεί η επιφάνεια του δοχείου, άρα και η ποσότητα του μετάλλου που απαιτείται για την κατασκευή του. Να δείξετε ότι η επιφάνεια $E$ της κονσέρβας παίρνει τιμές μεταξύ $110 + 8\pi$ και $440 + 128\pi$.

(Μονάδες 9)

γ) Στο σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(r) = \frac{880}{r} + 2\pi r^2$, για $2 < r < 8$. Παρατηρούμε ότι για $r = 4{,}1cm$, η επιφάνεια της κονσέρβας παίρνει την τιμή $E = 320{,}2ml$, που είναι η μικρότερη δυνατή.




i. Είναι η τιμή αυτή του εμβαδού μια τιμή μεταξύ των τιμών που βρήκατε στο β) ερώτημα; Να εξηγήσετε την απάντησή σας

(Μονάδες 2)

ii. Να βρείτε το ύψος της κονσέρβας στην περίπτωση αυτή. Τι σχέση έχει το ύψος με την ακτίνα του κυλινδρικού δοχείου, όταν ελαχιστοποιείται η ποσότητα του μετάλλου;

(Μονάδες 6)

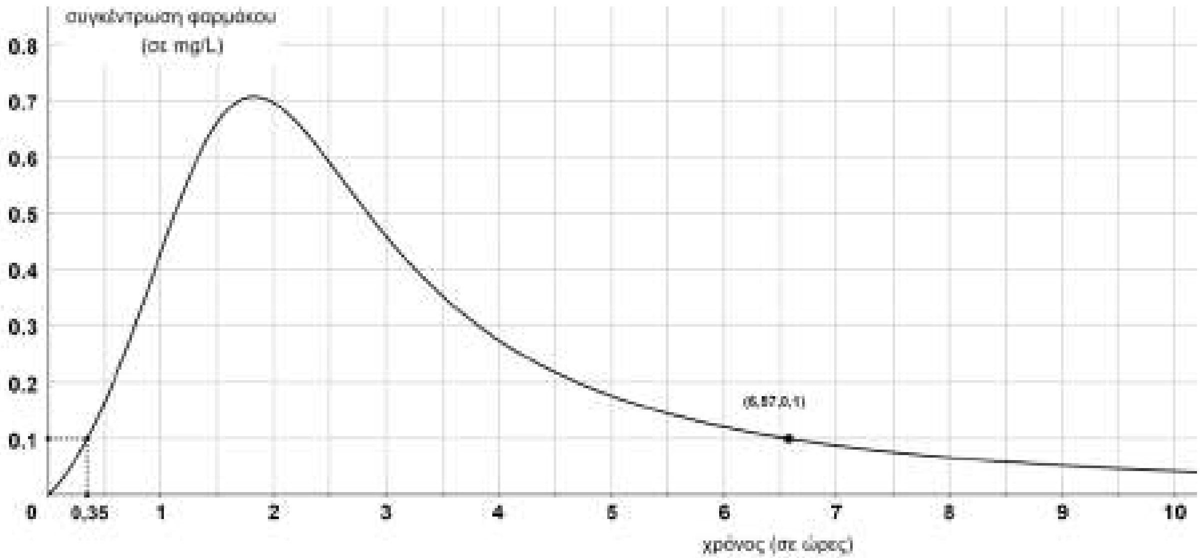
Δίνεται ότι $16{,}81\pi \cong 53$

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Μετά τη λήψη ενός φαρμάκου από το στόμα η δραστική ουσία του περνάει στο αίμα. Στην αρχή η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα (σε $mg/L$ - χιλιοστόγραμμα ανά λίτρο) αυξάνεται γρήγορα, φτάνει στη μεγαλύτερη τιμή της και μετά σιγά σιγά μειώνεται. Η αποτελεσματικότητα του φαρμάκου εξαρτάται από την συγκέντρωσή του στο αίμα. Η ελάχιστη αποτελεσματική συγκέντρωση είναι η τιμή της συγκέντρωσης, πάνω από την οποία το φάρμακο είναι αποτελεσματικό.

Η ελάχιστη αποτελεσματική συγκέντρωση ενός συγκεκριμένου φαρμάκου $A$ είναι $0,1\ mg/L$. Η συνάρτηση που δίνει τη συγκέντρωση του παραπάνω φαρμάκου $A$ στο αίμα $x$ ώρες μετά τη λήψη μιας δόσης, είναι $f(x)=\frac{7,8x^2+6x}{2x^4+30}, x\geq 0$, της οποίας τη γραφική παράσταση βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα.




α)

i. Πόση ώρα μετά τη λήψη του το φάρμακο $A$ αρχίζει να είναι αποτελεσματικό;

(Μονάδες 6)

ii. Ποια είναι η ακριβής συγκέντρωση στο αίμα $4$ ώρες μετά τη λήψη;

(Μονάδες 6)

β)

i. Ο φαρμακοποιός ενημερώνει τον ασθενή ότι το φάρμακο $A$ δεν θα είναι αποτελεσματικό $10$ ώρες μετά τη λήψη του. Συμφωνείτε ή διαφωνείτε; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

(Μονάδες 6)

ii. Αν ένας ασθενής πάρει μία δόση, για πόσες ώρες η συγκέντρωση του φαρμάκου $A$ στο αίμα θα είναι τέτοια, ώστε να είναι αποτελεσματικό;

(Μονάδες 7)

Δίνεται ότι: $148{,}8 \div 542 \cong 0{,}275$

$840 \div 20.030 \cong 0{,}04$

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ένας μηχανικός έχει αναλάβει να σχεδιάσει μια υπόγεια δεξαμενή αποθήκευσης νερού σε ορθογώνιο σχήμα. Η δεξαμενή πρέπει να πληροί συγκεκριμένες τεχνικές και φυσικές προδιαγραφές για λόγους ασφαλείας, λειτουργικότητας και περιβαλλοντικής προστασίας.

Η χωρητικότητα της δεξαμενής δίνεται από τον τύπο $V = L \cdot W \cdot H$, όπου $L$ είναι το μήκος, $W$ το πλάτος και $H$ το βάθος της δεξαμενής.

Για λόγους σχετικούς με την πίεση ο μηχανικός θέλει το ιδανικό βάθος $H$ της δεξαμενής να είναι $3$ μέτρα και να ικανοποιεί ταυτόχρονα και την εξής σχέση: $|H - 3| \leq 1$.

α) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένη:

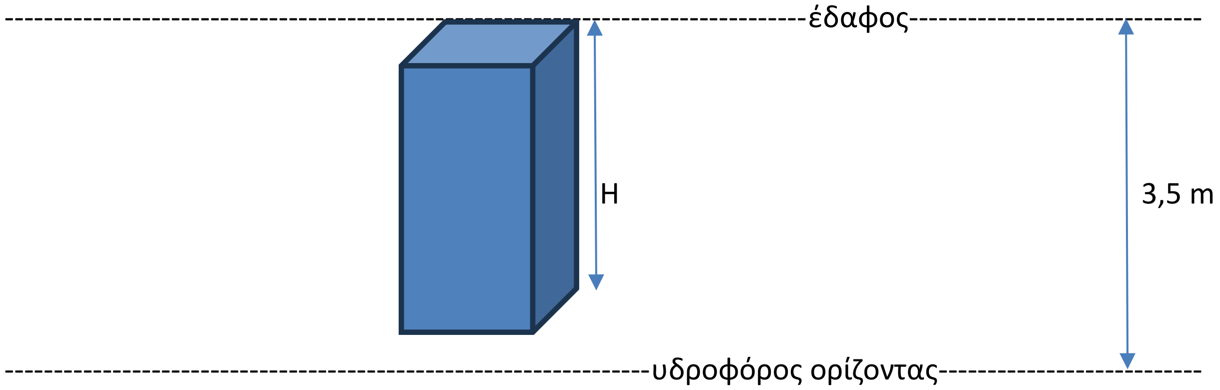
1. Το ιδανικό βάθος της δεξαμενής μπορεί να είναι $3$ μέτρα, αλλά επιτρέπεται και μία απόκλιση $\pm 1$ μέτρο.
2. Το βάθος της δεξαμενής δεν μπορεί να είναι περισσότερο από $4$ μέτρα.
3. Το βάθος της δεξαμενής μπορεί να είναι από $1$ έως $3$ μέτρα.
4. Το βάθος της δεξαμενής δεν μπορεί να διαφέρει από το ιδανικό βάθος $3$ μέτρων περισσότερο από $1$ μέτρο.

(Μονάδες 5)

β) Ποιο είναι το διάστημα τιμών τις οποίες μπορεί να πάρει το βάθος της δεξαμενής $H$ σύμφωνα με την παραπάνω σχέση;

(Μονάδες 5)

γ) Ο μηχανικός δεν θέλει, επίσης, το βάθος της δεξαμενής να φτάσει πολύ κοντά στον υδροφόρο ορίζοντα που βρίσκεται στα 3,5 μέτρα βάθος, ώστε να αποφύγει την εισροή νερού, την καταστροφή του έργου ή τη ρύπανση του υπόγειου νερού. (Ο υδροφόρος ορίζοντας είναι το υπόγειο επίπεδο στο οποίο το έδαφος είναι πλήρως κορεσμένο με νερό.) Γι' αυτό, για το βάθος $H$ της δεξαμενής, υπάρχει ο περιορισμός ότι το κάτω μέρος της δεξαμενής πρέπει να απέχει τουλάχιστον $0{,}5$ μέτρα από τον υδροφόρο ορίζοντα.



Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του βάθους $H$ της δεξαμενής που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη;

(Μονάδες 5)

δ) Να υπολογίσετε τις δυνατές τιμές του βάθους $H$ της δεξαμενής, οι οποίες ικανοποιούν ταυτόχρονα και τις δύο παραπάνω συνθήκες που θέτει ο μηχανικός.

(Μονάδες 5)

ε) Αν για τις διαστάσεις $L, H$ και $W$ ισχύουν οι ακόλουθοι περιορισμοί: $4 \leq L \leq 6$ , $2 \leq H \leq 3$ και $6 \leq W \leq 7$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές της χωρητικότητας της δεξαμενής;

(Μονάδες 5)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

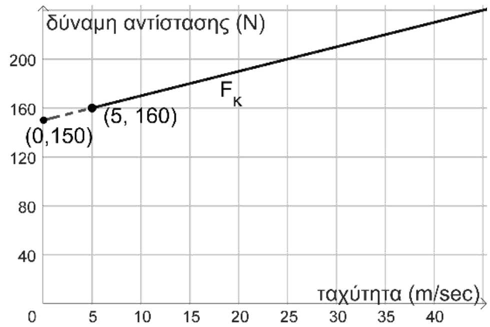
ΘΕΜΑ 4

Ένας σημαντικός παράγοντας που καθορίζει την κατανάλωση καυσίμου ενός αυτοκινήτου κατά την κίνησή του είναι οι δυνάμεις αντίστασης που ασκούνται σε αυτό. Μια δύναμη αντίστασης είναι η αντίσταση κύλισης $F_\kappa$, η οποία οφείλεται στα ελαστικά και δίνεται από μια σχέση της μορφής

$$F_\kappa = A \cdot v + B,$$

όπου $v$ η ταχύτητα σε $m/sec$, $F_\kappa$ η αντίσταση κύλισης σε N (Newton) και οι συντελεστές $A$ και $B$ εξαρτώνται από το είδος των ελαστικών και το βάρος του αυτοκινήτου.

α) Μια εταιρεία μέτρησε την αντίσταση κύλισης $F_\kappa$ ενός αυτοκινήτου και σχεδίασε το διπλανό διάγραμμα.




i. Πόση είναι η αντίσταση κύλισης, όταν το αυτοκίνητο κινείται με 25 $m/sec$;

(Μονάδες 5)

ii. Να υπολογίσετε τους συντελεστές $A$ και $B$ της σχέσης που δίνει την αντίσταση κύλισης $F_\kappa$.

(Μονάδες 8)

β) Η αντίσταση κύλισης για ένα μοντέλο αυτοκινήτου για δύο διαφορετικούς τύπους ελαστικών, δίνεται από τις σχέσεις

$F_{\kappa 1} = 2v + 150,\ v > 0$ για τον $1^{o}$ τύπο και

$F_{\kappa 2} = 2{,}25v + 147,\ v > 0$ για τον $2^{o}$ τύπο.

i. Δύο οδηγοί με το συγκεκριμένο μοντέλο αυτοκινήτου, κινούνται με ταχύτητα περίπου $20\, m/sec$ (δηλαδή με $72\, km/h$). Ο ένας χρησιμοποιεί τον $1^{o}$ τύπο ελαστικών και ο άλλος τον $2^{o}$. Ποιο αυτοκίνητο έχει τη μικρότερη κατανάλωση καυσίμου;

(Μονάδες 4)

ii. Ένας τρίτος οδηγός που κινείται κυρίως μέσα στην πόλη, με το ίδιο μοντέλο αυτοκινήτου, επέλεξε τον $1^{o}$ τύπο ελαστικών. Με δεδομένο ότι η ταχύτητα στην πόλη είναι συνήθως μικρότερη από $40\, km/h$, ήταν σωστή η επιλογή του; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

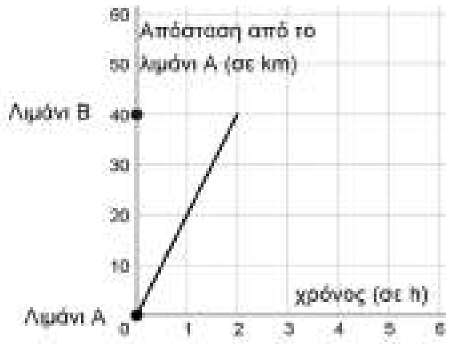
(Δίνεται ότι $12\frac{m}{sec} \cong 43\frac{km}{h}$).

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ένα πλοίο εκτελεί δρομολόγια από το λιμάνι Α προς το λιμάνι Β ενός ποταμού και αντίστροφα. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση που διανύει το πλοίο για να πάει από το ένα λιμάνι στο άλλο είναι $40\ km$. Επίσης, ο ποταμός κυλάει από το λιμάνι Α προς το λιμάνι Β με ταχύτητα $5\ km/h$. Επομένως, για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του πλοίου ως προς τη στεριά, στην ταχύτητα $v$ με την οποία κινείται από τις μηχανές του, προσθέτουμε ή αφαιρούμε $5\ km/h$, ανάλογα με το αν αυτό κινείται μαζί με το ρεύμα του ποταμού ή κόντρα σε αυτό.


α) Στο Σχήμα 1 φαίνεται η απόσταση του πλοίου από το λιμάνι Α, καθώς κινείται προς το λιμάνι Β σε σχέση με τον χρόνο.




Σχήμα 1

i. Να υπολογίσετε την ταχύτητα $v$ που προσδίδουν οι μηχανές στο πλοίο.

(Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε πόσο χρόνο θα χρειαστεί το πλοίο, για να επιστρέψει από το λιμάνι Β στο λιμάνι Α.

(Μονάδες 5)

β)

i. Αν το πλοίο αναχώρησε σχεδόν αμέσως από το λιμάνι Β προς το λιμάνι Α, να μεταφέρετε στο γραπτό σας το Σχήμα 1 και να συμπληρώσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της απόστασης του πλοίου από το λιμάνι Α σε σχέση με τον χρόνο, καθώς επιστρέφει από το λιμάνι Β.

(Μονάδες 6)

ii. Κατά τη διάρκεια της διαδρομής του από το λιμάνι Α στο Β και πίσω, ποια χρονικά διαστήματα η απόσταση του πλοίου από το λιμάνι Α ήταν μικρότερη από την απόστασή του από το λιμάνι Β;

(Μονάδες 8)

(Δίνεται ότι ένα κινητό, που κινείται με σταθερή ταχύτητα $v$ για χρόνο $t$, διανύει διάστημα $S = vt$).

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Η Μαρία επιθυμεί να φτιάξει έναν ορθογώνιο κήπο έξω από το σπίτι της και, για να υπολογίσει το μήκος και το πλάτος του, θέλει να ικανοποιούνται δύο βασικές προδιαγραφές:

η περίμετρος του κήπου να είναι $26\ m$ και το εμβαδόν του να είναι $40\ m^2$.

α) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση, η οποία να έχει ως λύσεις το μήκος και το πλάτος του κήπου.

(Μονάδες 6)

β) Ποιες είναι οι διαστάσεις του κήπου (μήκος και πλάτος);

(Μονάδες 5)

γ) Η Μαρία θέλει να βάλει στη μέση του κήπου ένα στρογγυλό παρτέρι με εμβαδόν $20m^2$. Θα χωρέσει το παρτέρι στον κήπο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Δίνεται το εμβαδόν κύκλου $E = \pi\rho^2$, όπου $\rho$ η ακτίνα του κύκλου και $\pi \cong 3{,}14$).

(Μονάδες 7)

δ) Η Μαρία σκέφτεται μήπως αλλάξει το πλάτος του κήπου, διατηρώντας σταθερό το εμβαδόν του στα $40\ m^2$. Επειδή όμως περιορίζεται από την διαθέσιμη επιφάνεια του οικοπέδου του σπιτιού, η νέα διάσταση του πλάτους πρέπει να είναι μικρότερη από $7\ m$ και μεγαλύτερη από $4\ m$ . Να υπολογίσετε το διάστημα των τιμών που μπορεί να έχει το μήκος του κήπου.

(Μονάδες 7)

Δίνεται $\sqrt{6{,}37} \cong 2{,}52$.

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Μια εταιρεία κατασκευής κεριών έχει ένα είδος κεριού, το οποίο καίγεται κατά $0{,}1 \cdot t^2$ εκατοστά, όπου $t$ είναι ο χρόνος σε λεπτά από την στιγμή που ανάβουμε το κερί.

α) Ανάβουμε ένα τέτοιο κερί ύψους 12 εκατοστών στις 12:00’ π.μ.

i. Στις 12:05’ π.μ. τι μέρος του κεριού θα έχει καεί;

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι στις $12{:}\,11'$ π.μ. θα έχει καεί ολόκληρο το κερί.

(Μονάδες 7)

β) Αν $l$ είναι το ύψος ενός κεριού από το παραπάνω είδος, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του ύψους του κεριού που δεν έχει καεί ακόμα μετά από $t$ λεπτά που είναι αναμμένο, δίνεται από τον τύπο $l - 0{,}1 \cdot t^2$.

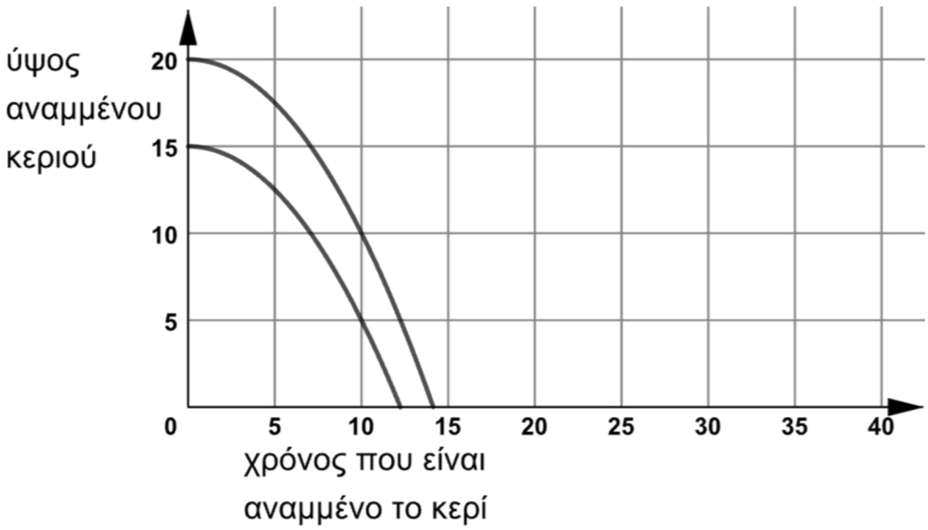
(Μονάδες 3)

γ)

i. Να βρείτε τη συνάρτηση της οποίας οι τιμές εκφράζουν το ύψος ενός αναμμένου κεριού με αρχικό ύψος 15 εκατοστά μετά από $t$ λεπτά που είναι αναμμένο.

(Μονάδες 4)

ii. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική της συνάρτησης του ύψους ενός αναμμένου κεριού με ύψος 15 εκατοστά και ενός δεύτερου αναμμένου κεριού του ίδιου είδους αλλά διαφορετικού αρχικού ύψους.




Ποιο θα είναι το ύψος του κάθε κεριού μετά από 10 λεπτά που είναι αναμμένα;

(Μονάδες 5)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ο Βαγγέλης σκέφτηκε να επενδύσει συνολικά $20.000$ ευρώ από την $1^η$ Ιανουαρίου και για $4$ μήνες ως εξής:

- Πρώτη επένδυση: Για το μισό ποσό παρακολουθούσε ο ίδιος την επένδυση και κάθε μήνα επανασχεδίαζε το πλάνο του, επενδύοντας ξανά όλο το ποσό που προέκυπτε στο τέλος του προηγούμενου. Έτσι για τον πρώτο μήνα επένδυσε το ποσό με κέρδος $3\%$. Στη συνέχεια επένδυσε το ποσό που προέκυψε με κέρδος $8\%$ για καθέναν από τους επόμενους δύο μήνες, ενώ τον τελευταίο μήνα διατήρησε το συνολικό ποσό στην ίδια επένδυση χάνοντας $5\%$.
- Δεύτερη επένδυση: Τα άλλα μισά χρήματα τα άφησε για $4$ μήνες στην ίδια επένδυση, χωρίς να τα παρακολουθεί, με σταθερό και εξασφαλισμένο κέρδος $4\%$ κάθε μήνα.

Έχει αποφασίσει ότι στο τέλος του πρώτου τετραμήνου θα αποσύρει τα κέρδη του και θα επενδύσει όλο το αρχικό κεφάλαιο σε μία μόνο επένδυση για τον υπόλοιπο χρόνο (άλλους $8$ μήνες).

α) Να αποδείξετε ότι ο Βαγγέλης κέρδισε το πρώτο τετράμηνο:

i. περίπου $1.413$ ευρώ από την πρώτη επένδυση

(Μονάδες 6)

ii. περίπου $1.700$ ευρώ από τη δεύτερη επένδυση

(Μονάδες 7)

β) Τι κέρδος θα έχει ο Βαγγέλης αν αποφασίσει να ακολουθήσει τη δεύτερη επένδυση για τον υπόλοιπο χρόνο, επενδύοντας τα $20.000$ ευρώ;

(Μονάδες 6)

γ) Μια επενδυτική σύμβουλος, η Αθηνά, είπε στον Βαγγέλη ότι μπορεί να αναλάβει η ίδια να παρακολουθεί τα χρήματα στην πρώτη επένδυση και στο τέλος να πάρει ως αμοιβή το $10\%$ των συνολικών κερδών του. Επίσης, εγγυήθηκε ότι το κέρδος του Βαγγέλη θα είναι από $4\%$ έως $6\%$, κάθε μήνα. Να ετοιμάσετε για τον Βαγγέλη μια συγκριτική παρουσίαση των κερδών του σε ευρώ με την επένδυση της Αθηνάς και με την επένδυση του β ερωτήματος, ώστε να τον βοηθήσετε να αποφασίσει ποια θα ακολουθήσει για τον υπόλοιπο χρόνο.

(Μονάδες 6)

(Δίνονται:

$1{,}03 \cdot 1{,}08^2 \cdot 0{,}95 = 1{,}141322$, $1{,}04^4 = 1{,}169859$, $1{,}04^8 \cong 1{,}3686$, $1{,}06^8 \cong 1{,}5938$)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Για να μετρήσουμε την καθαρότητα του χρυσού, χρησιμοποιούμε το καράτι, το οποίο δείχνει τι μέρος σε εικοστά τέταρτα είναι ο καθαρός χρυσός σε ένα μείγμα μετάλλων. Σε φύλλο χρυσού $24$ καρατίων τα $\frac{24}{24}$, ή αλλιώς το $100\%$, είναι καθαρός χρυσός.

α) Να βρείτε το ποσοστό του καθαρού χρυσού σε ένα μείγμα $18$ καρατίων, σε ένα μείγμα $14$ καρατίων και σε ένα μείγμα $9$ καρατίων.

(Μονάδες 6)

β) Από δύο μείγματα $24$ και $9$ καρατίων φτιάχνουμε ένα νέο. Αν από το πρώτο μείγμα πάρουμε $17$ γραμμάρια και από το δεύτερο $7$ γραμμάρια, τότε να αποδείξετε ότι το νέο μείγμα είναι $19{,}625$ καρατίων.

(Μονάδες 9)

γ) Έχουμε δύο μείγματα, το ένα $24$ καρατίων και το άλλο $9$ καρατίων. Πόσα γραμμάρια θα χρησιμοποιήσουμε από το καθένα, για να φτιάξουμε ένα μείγμα $18$ καρατίων συνολικού βάρους $20$ γραμμαρίων;

(Μονάδες 10)

(Δίνεται: $\frac{63}{24} = 2{,}625$)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Το ενεχυροδανειστήριο είναι γραφείο, το οποίο, κυρίως, είτε χορηγεί έντοκα δάνεια που εξασφαλίζονται με ενέχυρο πολύτιμα αντικείμενα (δηλαδή κατακρατά πολύτιμα αντικείμενα μέχρι την αποπληρωμή του δανείου, οπότε τα επιστρέφει) είτε αγοράζει τέτοια αντικείμενα. Τα κοσμήματα είναι ανάμεσα στα αντικείμενα που ενδιαφέρουν ένα ενεχυροδανειστήριο. Τα κύρια κριτήρια για την εκτίμηση της αξίας ενός χρυσού κοσμήματος είναι η καθαρότητα του χρυσού και το βάρος του κοσμήματος.

α) Η καθαρότητα του χρυσού μετριέται σε καράτια, που δείχνουν τι μέρος σε εικοστά τέταρτα είναι ο καθαρός χρυσός σε ένα μείγμα μετάλλων από το οποίο φτιάχνουμε ένα χρυσό κόσμημα. Για παράδειγμα, σε ένα χρυσό κόσμημα $24$ καρατίων, τα $\frac{24}{24}$ ή αλλιώς το $100\%$ είναι καθαρός χρυσός. Να βρείτε το ποσοστό του καθαρού χρυσού σε ένα χρυσό κόσμημα $18$ καρατίων, σε ένα $14$ καρατίων και σε ένα $9$ καρατίων.

(Μονάδες 6)

β) Το ενεχυροδανειστήριο «Golden Market» προσφέρει δάνειο, με ενέχυρο χρυσά κοσμήματα. Το δάνειο είναι ίσο με το μισό της αξίας των κοσμημάτων με ετήσιο επιτόκιο $6\%$, ενώ τα έξοδα φύλαξης είναι $100$ ευρώ και τα έξοδα φακέλου $80$ ευρώ. Η Ρέα έχει χρυσά κοσμήματα αξίας $5.000$ ευρώ και τα αφήνει ως ενέχυρο για δάνειο ενός μήνα. Τι ποσό θα πρέπει να επιστρέψει η Ρέα στο «Golden Market» στο τέλος του μήνα;

(Μονάδες 9)

γ) Το «Golden Market» αγοράζει κοσμήματα με την τρέχουσα τιμή χρυσού, αφαιρώντας (για τόκους και προμήθειες) $24\%$ από την τιμή αγοράς. Η τρέχουσα τιμή χρυσού ανά γραμμάριο ενός κοσμήματος καθορίζεται με βάση το ποσοστό του χρυσού στο κόσμημα: για ένα κόσμημα $9$ καρατίων είναι $35$ ευρώ/γραμμάριο και για ένα κόσμημα $14$ καρατίων είναι $55$ ευρώ/γραμμάριο. Η Αθηνά μπορεί να διαθέσει στο ενεχυροδανειστήριο ένα κόσμημα $9$ καρατίων ή ένα κόσμημα $14$ καρατίων, προκειμένου να πάρει από την πώληση τουλάχιστον $2.660$ ευρώ. Πόσο πρέπει να ζυγίζει το κάθε κόσμημα, για να πάρει η Αθηνά το ποσό που χρειάζεται διαθέτοντας μόνο ένα από αυτά;

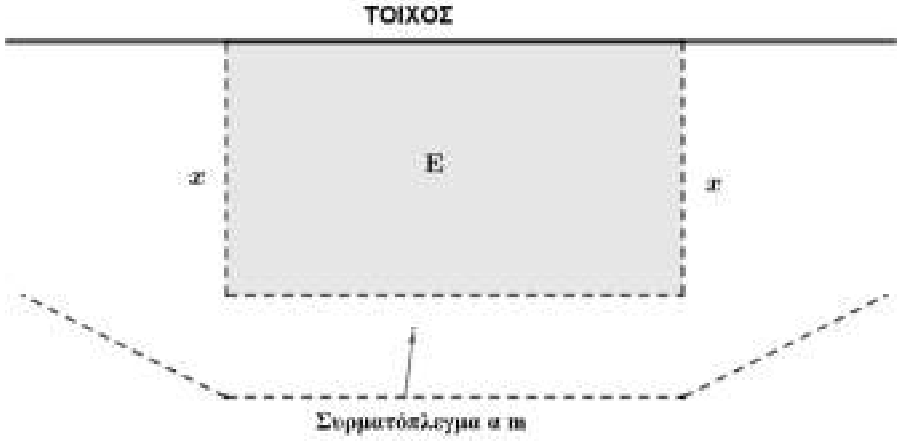
(Μονάδες 10)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της

Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Ένας αγρότης αγόρασε $\alpha$ μέτρα συρματόπλεγμα, για να περιφράξει μια επιφάνεια σχήματος ορθογωνίου. Η μία πλευρά του ορθογωνίου αποτελείται από έναν τοίχο που ήδη υπάρχει, όπως φαίνεται στο σχήμα.




α) Αν το συρματόπλεγμα έχει μήκος $\alpha = 60\ m$ και το πλάτος της ορθογώνιας επιφάνειας που θέλει να περιφράξει ο αγρότης είναι $x\ m$, τότε:

i. Να εκφράσετε το μήκος $l$ της πλευράς που αντιστοιχεί στον τοίχο ως συνάρτηση του $x$. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το μήκος $x$;

(Μονάδες 3)

ii. Να δείξετε ότι το εμβαδόν $E$ της επιφάνειας δίνεται από τη σχέση $E = -2x^2 + 60x\ m^2$.

(Μονάδες 4)

β) Αν ο αγρότης θέλει το εμβαδόν $E$ της επιφάνειας που θα περιφράξει με το συρματόπλεγμα μήκους $\alpha = 60\ m$ να είναι τουλάχιστον $400\ m^2$, τότε:

i. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το πλάτος $x$;

(Μονάδες 6))

ii. Πόσο μπορεί να είναι το μήκος $l$ της πλευράς που αντιστοιχεί στον τοίχο;

(Μονάδες 6)

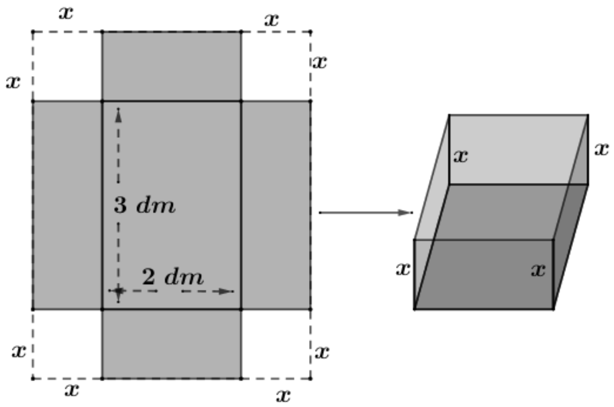
γ) Πόσα μέτρα συρματόπλεγμα πρέπει να αγοράσει ο αγρότης για να είναι σίγουρος ότι μπορεί να περιφράξει επιφάνεια $800\ m^2$;

(Μονάδες 6)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α΄ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Μια εταιρεία, για να κατασκευάσει χαρτόκουτα ανοιχτά από πάνω, χρησιμοποιεί ένα ορθογώνιο χαρτόνι, κόβει στις τέσσερις γωνίες του τετράγωνα πλευράς $x\ dm$, και στη συνέχεια διπλώνει τα πλαϊνά μέρη, όπως φαίνεται στο σχήμα.




α) Αν η βάση του κουτιού έχει διαστάσεις $2\ dm$ και $3\ dm$, να εκφράσετε το εμβαδόν $E$ της επιφάνειας του αρχικού χαρτονιού ως συνάρτηση του ύψους $x$ του κουτιού.

(Μονάδες 6)

β) Η εταιρεία θέλει να κατασκευάσει κουτιά με χωρητικότητα $V = 12\ dm^3$.

i. Αν θεωρήσουμε το πάχος του χαρτιού αμελητέο, ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του αρχικού χαρτονιού;

(Μονάδες 4)

ii. Η εταιρεία διαθέτει ένα μηχάνημα για να μετράει το μήκος $x$ των πλευρών των τετραγώνων που πρέπει να κοπούν στις γωνίες του αρχικού χαρτονιού. Το μηχάνημα έχει ακρίβεια $0{,}01\ dm$, δηλαδή το μήκος που μετράει απέχει το πολύ $0{,}01\ dm$ από το επιθυμητό. Ποιες τιμές μπορεί να έχει η χωρητικότητα των κουτιών που κατασκευάζονται με αυτόν τον τρόπο;

(Μονάδες 7)

γ) Η εταιρεία πρέπει να κατασκευάσει κουτιά διαφόρων μεγεθών, όλα όμως πρέπει να έχουν την ίδια βάση διαστάσεων $2 \times 3\ dm^2$. Επίσης, το κόστος του χαρτονιού ανά κουτί δεν πρέπει να ξεπερνά τα 2,2 €. Αν το χαρτόνι κοστίζει 0,02 € ανά $dm^2$, ποιες μπορεί να είναι οι διαστάσεις του αρχικού χαρτονιού;

(Μονάδες 8)

(Δίνεται $\sqrt{441} = 21$ και ότι ο όγκος $V$ ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις $\alpha, \beta$ και $\gamma$ είναι $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

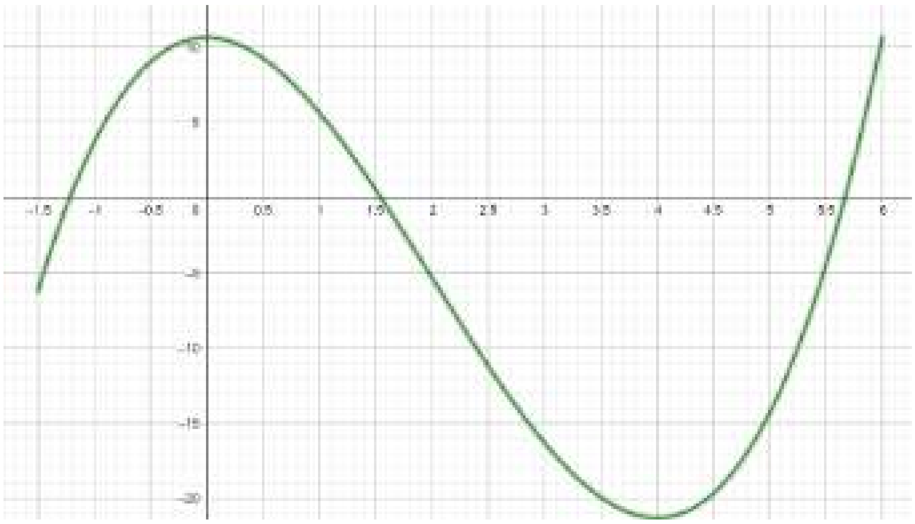
Οι «κάψουλες με απορρυπαντικό» μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε όλους τους τύπους πλυντηρίων ρούχων. Βοηθούν ώστε η πλύση να έχει καλύτερα αποτελέσματα (χωρίς χρήση μαλακτικού και πρόπλυσης).

α) Μια εταιρεία παράγει σφαιρικές κάψουλες ακτίνας $r = 2cm$ με το εξής χαρακτηριστικό: ο όγκος του σφαιρικού τμήματος ύψους $h$, που περιέχει το απορρυπαντικό, είναι ίσος με το 1/3 του όγκου της κάψουλας.

i. Να δείξετε ότι το ύψος $h$ είναι λύση της εξίσωσης $3h^3 - 18h^2 + 32 = 0$.

(Μονάδες 8)

ii. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{32}{3}$, για $-1{,}5 < x < 6$.




Να αξιοποιήσετε την παραπάνω γραφική παράσταση, για να εκτιμήσετε το ύψος $h$ του σφαιρικού τμήματος που περιέχει το απορρυπαντικό, εξηγώντας τη σκέψη σας.

(Μονάδες 8)

β) Μια άλλη εταιρεία ισχυρίζεται ότι μπορεί να εξασφαλίσει τον ίδιο όγκο απορρυπαντικού γεμίζοντας τα 2/9 μιας κυλινδρικής κάψουλας ίδιας ακτίνας και ύψους ίσου με τη διάμετρο της σφαιρικής. Να εξηγήσετε γιατί ισχύει ο ισχυρισμός αυτός.

(Μονάδες 9)

Δίνεται ο όγκος του κυλίνδρου $V = \pi\rho^2 \cdot h$, όπου $\rho$ η ακτίνα και $h$ το ύψος του κυλίνδρου, ο όγκος της σφαίρας $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, όπου $r$ η ακτίνα της σφαίρας, και ο όγκος ενός σφαιρικού τμήματος $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$, όπου $h$ το ύψος του τμήματος και $r$ η ακτίνα της σφαίρας.

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

ΘΕΜΑ 4

Τα φράκταλ (fractal) είναι γεωμετρικά σχήματα με ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό: παρουσιάζουν αυτοομοιότητα, δηλαδή κάθε μικρό τους τμήμα μοιάζει με το σύνολο. Όσο κι αν μεγεθύνουμε ένα κομμάτι του φράκταλ, θα παρατηρούμε ότι συνεχίζει να εμφανίζει την ίδια δομή. Φράκταλ εμφανίζονται τόσο στη φύση (π.χ. στο μπρόκολο ρομανέσκο), όσο και σε δημιουργήματα του ανθρώπου (όπως έργα τέχνης ή σχήματα κατασκευασμένα με υπολογιστές). Ένα από τα πιο γνωστά φράκταλ είναι το «Τρίγωνο του Sierpinski», το οποίο κατασκευάζεται με την εξής επαναλαμβανόμενη διαδικασία:

1. Ξεκινάμε με ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1.
2. Συνδέουμε τα μέσα των πλευρών του και αφαιρούμε το μεσαίο τρίγωνο που σχηματίζεται.
3. Στα τρία τρίγωνα που απομένουν, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία: εντοπίζουμε τα μέσα των πλευρών και αφαιρούμε το κεντρικό τρίγωνο.
4. Επαναλαμβάνουμε αυτό το μοτίβο επ’ άπειρον.

Με τον όρο "μαύρα τρίγωνα" εννοούμε εκείνα που παραμένουν μετά από κάθε αποκοπή και δεν αφαιρούνται.

1ο σχήμα 2ο σχήμα 3ο σχήμα

α) Να υπολογίσετε το πλήθος των μαύρων τριγώνων στο 1ο, στο 2ο, στο 3ο και στο 4ο σχήμα, να αποδείξετε ότι το πλήθος των μαύρων τριγώνων σε κάθε σχήμα αποτελεί μια γεωμετρική πρόοδο και να γράψετε τον νιοστό της όρο.

(Μονάδες 7)

β) Να γράψετε το μήκος που έχει η πλευρά καθενός από τα μαύρα τρίγωνα για τα 4 πρώτα σχήματα και να αποδείξετε ότι η πρόοδος που προκύπτει είναι γεωμετρική, γράφοντας το μήκος της πλευράς που θα έχει το νιοστό σχήμα.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι τη συνολική περίμετρο των μαύρων τριγώνων (δηλαδή το άθροισμα των περιμέτρων τους) σε κάθε σχήμα τη δίνει ο τύπος : $\Pi_\nu = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\nu$.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξηγήσετε γιατί ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

i. «Το μήκος της πλευράς καθενός από τα μαύρα τρίγωνα μειώνεται, καθώς αυξάνει το πλήθος τους».

(Μονάδες 2)

ii. «Το άθροισμα των περιμέτρων των μαύρων τριγώνων αυξάνει, καθώς αυξάνει το πλήθος τους».

(Μονάδες 3)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α’ Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.