

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο (1, 1).

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 8)

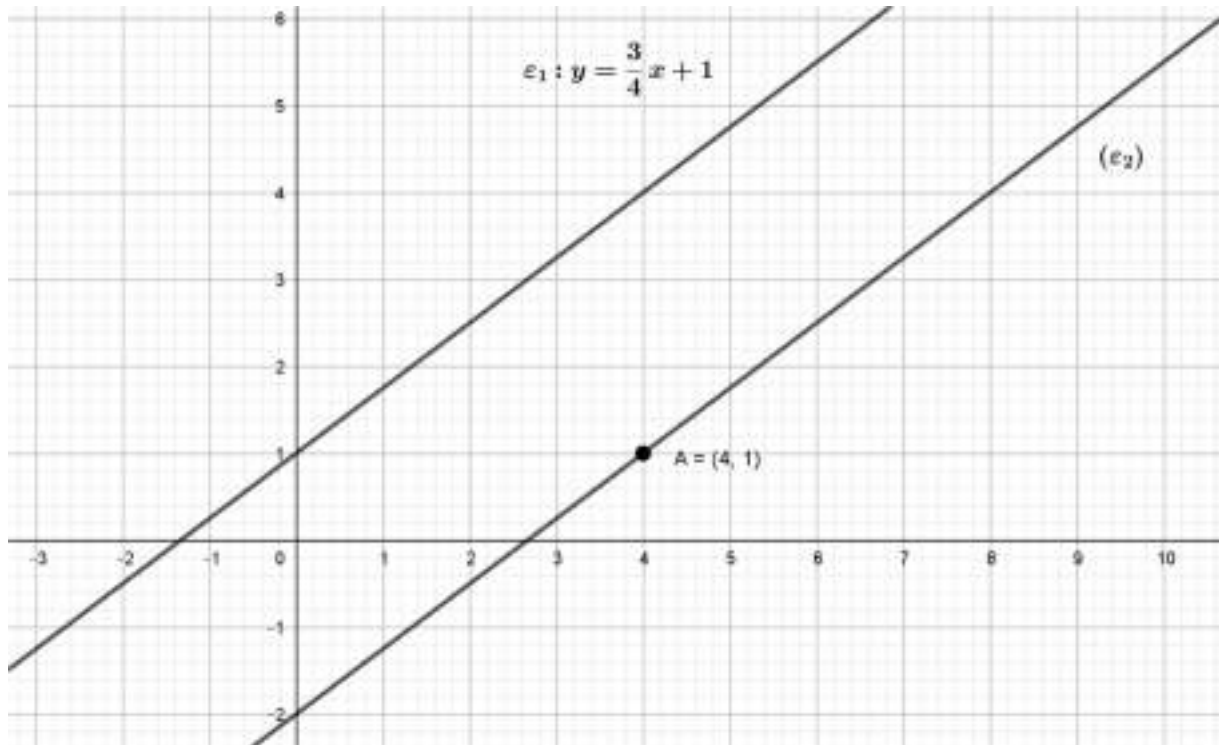
γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση

$y = \frac{3}{4}x + 1$ και την (ε_2) που διέρχεται από το σημείο $A(4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ε_1) .



α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2) .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μια ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο A (-4, 1)

και είναι παράλληλη στην (ε_1) .

α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2) . Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες; (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$$(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4, \text{ τότε να αποδείξετε ότι:}$$

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2.$

(Μονάδες 12)

β) $\alpha = \beta.$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$

α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$

(Μονάδες 12)

β) Να επιλύσετε την ανίσωση $-2 \cdot f(x) < 0$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή. Η σχέση της απόστασής του από το έδαφος (μέτρα) με το χρόνο (sec), φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;

(Μονάδες 6)

β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

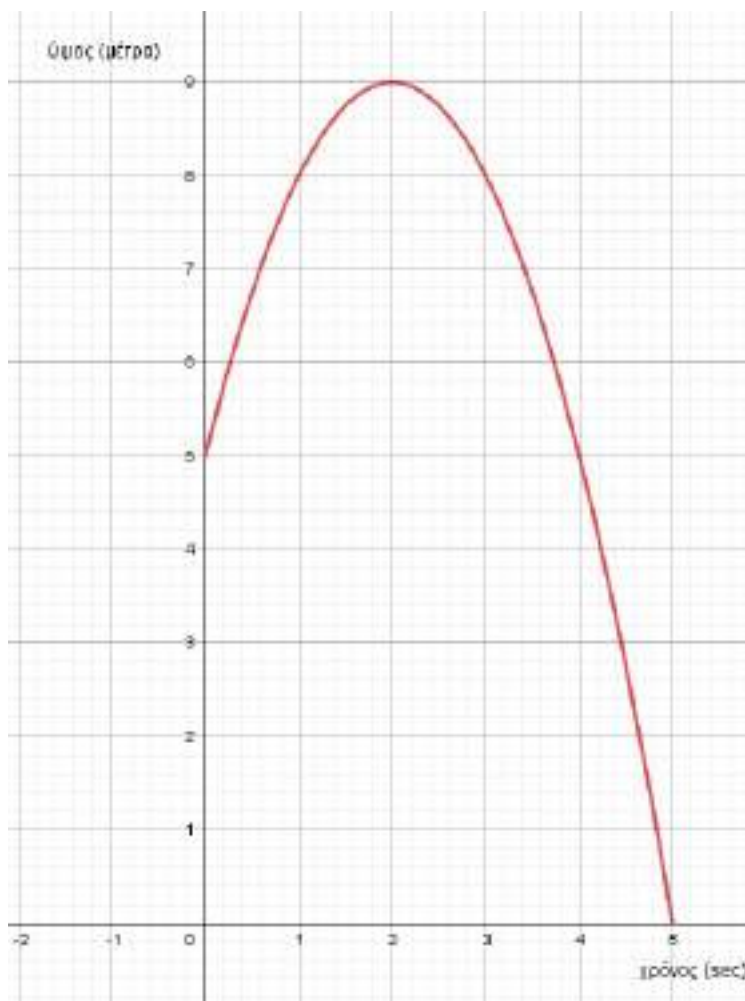
(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που το σώμα συναντά το έδαφος.

(Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β , αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$. Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ , αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2.

(Μονάδες 12)

Θέμα 2

Δίνεται μία πρόοδος α_n με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

α) Να εξετάσετε αν η α_n είναι αριθμητική πρόοδος.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η α_n είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το n -οστό της όρο.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$, είναι αυτό δυνατό.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k - 2, k, 2k + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ευθεία $\epsilon: y=ax+5$. Αν η ευθεία $\delta: y=-3x-6$ είναι παράλληλη στην (ϵ) , τότε:

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ϵ . (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ϵ με τον άξονα $x'x$; (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ϵ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = 2\lambda - 2$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = -2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε την τιμή του λ , αν γνωρίζετε ότι ο αριθμός $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

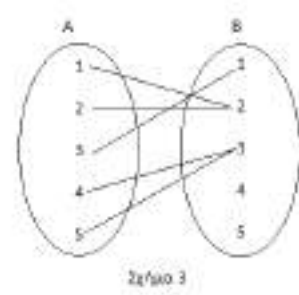
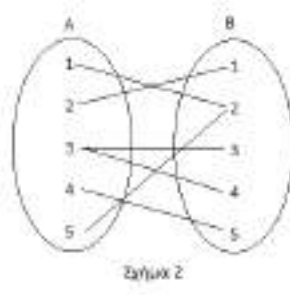
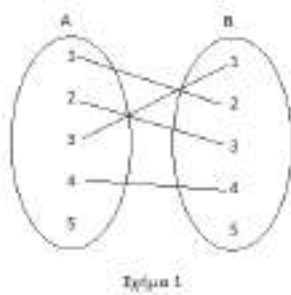
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B.



α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B.

(Μονάδες 9)

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f ,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

iii. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3| < 5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3| < 5$.

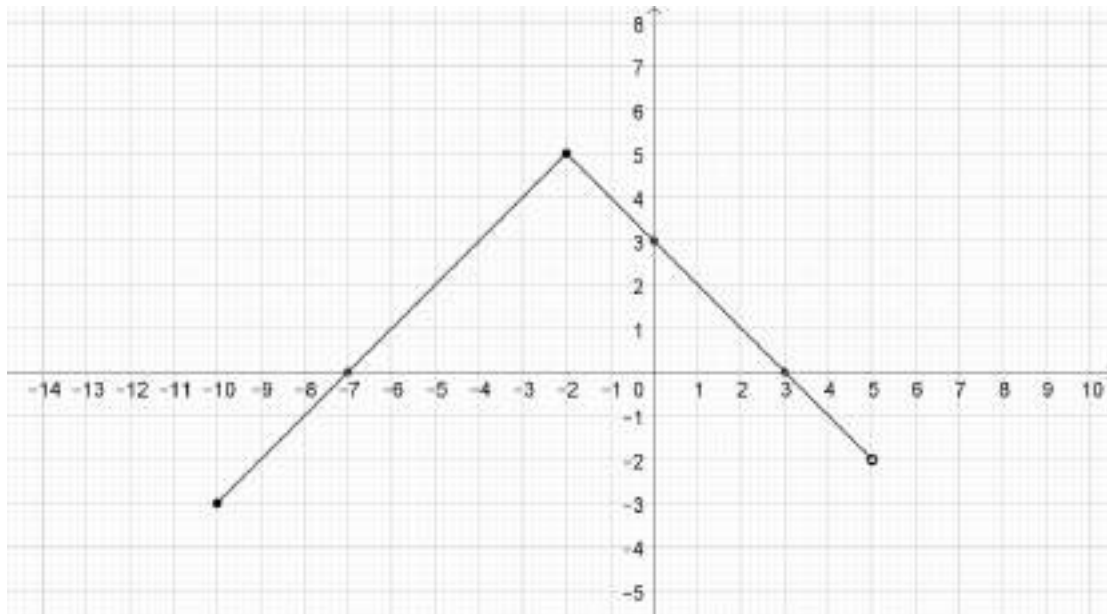
(Μονάδες 7)

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της $f(A)$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 0$.

(Μονάδες 4)

δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της παραπάνω συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 4)

iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Έστω η ευθεία $\varepsilon_1: y = \alpha x + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο A (0, -6) και τον άξονα $x'x$ στο σημείο B(-3, 0).

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1 - 2x) \leq -1$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α' λυκείου ενός Γενικού Λυκείου.

Σχηματίζουμε τα σύνολα A , με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α' τάξης ενός Γενικού Λυκείου και B με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α' τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου.

Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \rightarrow A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B .

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g: B \rightarrow A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x - 1| \leq 23$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$

(Μονάδες 10)

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2 = 4x - 1$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση G , με $G(x) = \frac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x = 2$, $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G , στο 3.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - 3x$ και $g(x) = \sqrt{x + 5}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f(-1) = g(11)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x) = g(4)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία (ε): $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).

(Μονάδες 4)

ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον x' άξονα;

(Μονάδες 4)

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία A(6, 1), B(-2, 3) και Γ(8, 0) είναι σημεία της ευθείας (ε).

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(k, 5)$ να είναι σημείο της ευθείας (ε).

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta + \gamma = -\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$.

(Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0.$$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (3\alpha + 4)x - 4$ και $\varepsilon_2 : y = (3 - 4\alpha)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών.

(Μονάδες 6)

ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι : $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι : $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $M(3,4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $O(0,0)$.

(Μονάδες 9)

β) Δίνεται το σημείο $N(-3,\lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία OM .

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $N(-3,-4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία M, N είναι συμμετρικά ως προς το O .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

(Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ με τύπο $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $x \in R$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{2})$, $[f(-\sqrt{2})]^2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $1 - x$, $\frac{x}{2}$, $2x - 1$, $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του x , αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (1)

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \leq 0$. (2)

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2 + 2} + \sqrt{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x = 1$, $x = -2$, $x = 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα;

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = -x + 2$.

α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

(Μονάδες 9)

γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1)$, $B(-1, -5)$, $\Gamma(27, 50)$ και την ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο A είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

(Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B είναι πάνω στην ευθεία. Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(Μονάδες 14)

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$.

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

α) Η αλγεβρική παράσταση K , που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

A. $K = |x+1| + |x-2|$

B. $K = |x-1| + |x+2|$

Γ. $K = (|x|+1) + (|x|-2)$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

β) Αν είναι $K = |x+1| + |x-2|$ τότε:

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης K όταν $x = \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 10)

ii) Αν $x > 2$ να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση K και να αποδείξετε ότι $K > 3$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Ανήκει το σημείο $M(1,3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ;

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι $-1 < x < 4$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση $A = |2x + 2| + |x - 5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

(Μονάδες 8)

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνονται οι δυο πρώτοι όροι, $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 7$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο 20^{ος} όρος της προόδου ισούται με 97 .

(Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $2 + 7 + 12 + \dots + 97$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1| \geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:

1.



2.



3.



4.



(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|y-3| < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $|2x - 5| < 3$

α) Να λύσετε την ανίσωση.

(Μονάδες 12)

β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5).$$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $A = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4}$ και $B = (\beta - 3)^2$.

α)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

ii. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β έτσι, ώστε $A + B = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Υπάρχουν τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $A = -B$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x + 4y)(x + y) = 9xy.$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y - x)^2 = 0$

(Μονάδες 8)

ii. $y = \frac{x}{2}.$

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2.$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$.

α) Να δείξετε ότι $y = 2x$.

(Μονάδες 12)

β) Για $y = 2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7,...

α)

i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2 .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|y-3| < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα.

Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$.

(Μονάδες 9)

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια

i. να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω .

(Μονάδες 9)

ii. να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_n) .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x+2| < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$.

(Μονάδες 10)

β) $|2x+4| < 2$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Ο 1^{ος} όρος μιας αριθμητικής προόδου (a_n) ισούται με 2 και ο 3^{ος} όρος ισούται με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$.

(Μονάδες 8)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 8)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0, x \neq -1$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1}$ με $x \neq -1$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x - 3$ για κάθε $x \neq -1$.

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.

α) Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει $x^2 < 1$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 6)

β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$ άξονα.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$.

α) Να δείξετε ότι $6 < x < 8$.

(Μονάδες 12)

β) Αν ισχύει $6 < k < 8$, να δείξετε ότι $3 < \frac{24}{k} < 4$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$.

(Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ είναι σημείο της C_f .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 3$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Η παρακάτω ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε .

(Μονάδες 7)

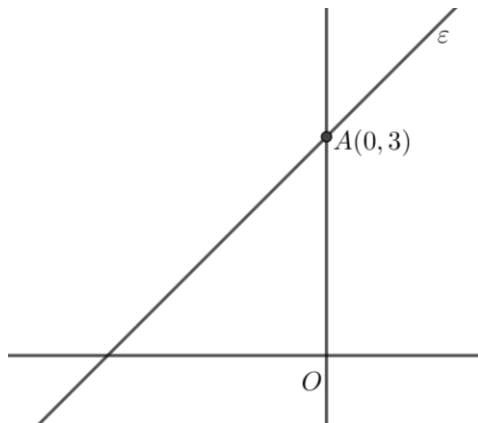
β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$.

(Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$)

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $K = |x + 1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x + 3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1 - x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$

(Μονάδες 12)

β)

i. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 4$.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K , αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2

Σε μία αριθμητική πρόοδο (αν) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3 .

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n = n$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι: $\sqrt[3]{3} < \sqrt{3}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$

(Μονάδες 5)

β) $2x - 3y$

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

(Μονάδες 12)

β) Για $x \geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 2$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 2| + 3, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε

i. Την τιμή της παράστασης A για $x = 2^3 - 3^2$.

(Μονάδες 8)

ii. Τις τιμές του x , ώστε να ισχύει $A = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $K = \frac{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{\alpha^3 - \alpha^2}, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1.$

α) Να δείξετε ότι $K = \frac{\alpha - 1}{\alpha}.$

(Μονάδες 13)

β) Για κάθε $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1,$

i. Να δείξετε ότι $K \neq 0.$

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει η ισότητα $K(K - 2) = 0.$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί α , β , με $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{2} - 2$.

Να δείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 15$.

(Μονάδες 12)

β) $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = 5$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}.$$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \rightarrow y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3 .

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α)

- Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \rightarrow y$ είναι συνάρτηση.
- Είναι η αντιστοίχιση $y \rightarrow x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \rightarrow y$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Μια γεωμετρική πρόοδος (α_n) έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$, λόγο $\lambda > 0$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

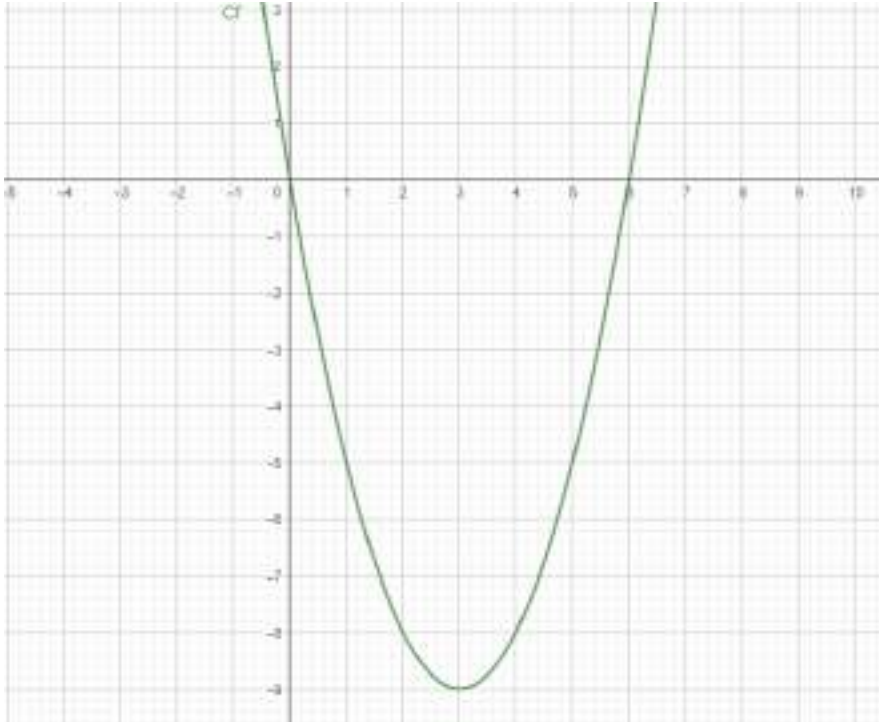
(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του σχήματος:

α) Να βρείτε τις τιμές της f για $x = 0, 1, 3, 5$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < 0$.

(Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $(2 + \sqrt{5})^2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9 - 4\sqrt{5}$ και $9 + 4\sqrt{5}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha < 0 < \beta < \gamma$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$ είναι θετικός.

(Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -2)$ και διέρχεται από το σημείο $B(-2, -4)$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 12)

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$, να βρείτε για ποιες τιμές του x η ευθεία βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ άξονα.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω .

α) Να δείξετε ότι: $\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = a^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Όταν $\alpha = 1$.

(Μονάδες 5)

ii. Όταν $\alpha = -3$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο (αν) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x - 3| \leq 5$

(Μονάδες 9)

ii) $|2x - 3| \geq 1$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1).

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2$ (2).

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις (1) και (2).

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι, ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 272.$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha \cdot \beta = -64.$$

(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α και β .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

(Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω .

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega=4$.

(Μονάδες 12)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $a_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}, \quad B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}.$$

α) Να δείξετε ότι:

$$A + B = 3 \quad \text{και} \quad A \cdot B = \frac{1}{2}.$$

(Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) , για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 .

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο (αν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 3.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου (αν) πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.

(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|2x - 5| \leq 3$. (1)

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2x^2 - x - 1 \geq 0$. (2)

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $A + B = \frac{1}{2}$

(Μονάδες 8)

ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$

(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση:

$$y=35+0,8x$$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x , ώστε οι αριθμοί $x+2$, $x+1$, $3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Για $x = -1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $kx + 3 = 2x$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $k = 1$ και για $k = 3$.

(Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $k = 2$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (1).

(Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1).

(Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $3 < x < 7$, να δείξετε ότι η παράσταση

$$A = |x^2 - 10x + 21| + x^2 - 10x + 22$$

είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $3x^2 + 6x - 12$ (1). Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1),

α) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $x_1 + x_2$ και x_1x_2 .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $4x_1, 4x_2$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$.

α) Αν $2 < x < 3$, να δείξετε ότι $A = 2x - 4$.

(Μονάδες 7)

β) Αν $2 < x < 3$, να δείξετε ότι $A + B = x - 1$.

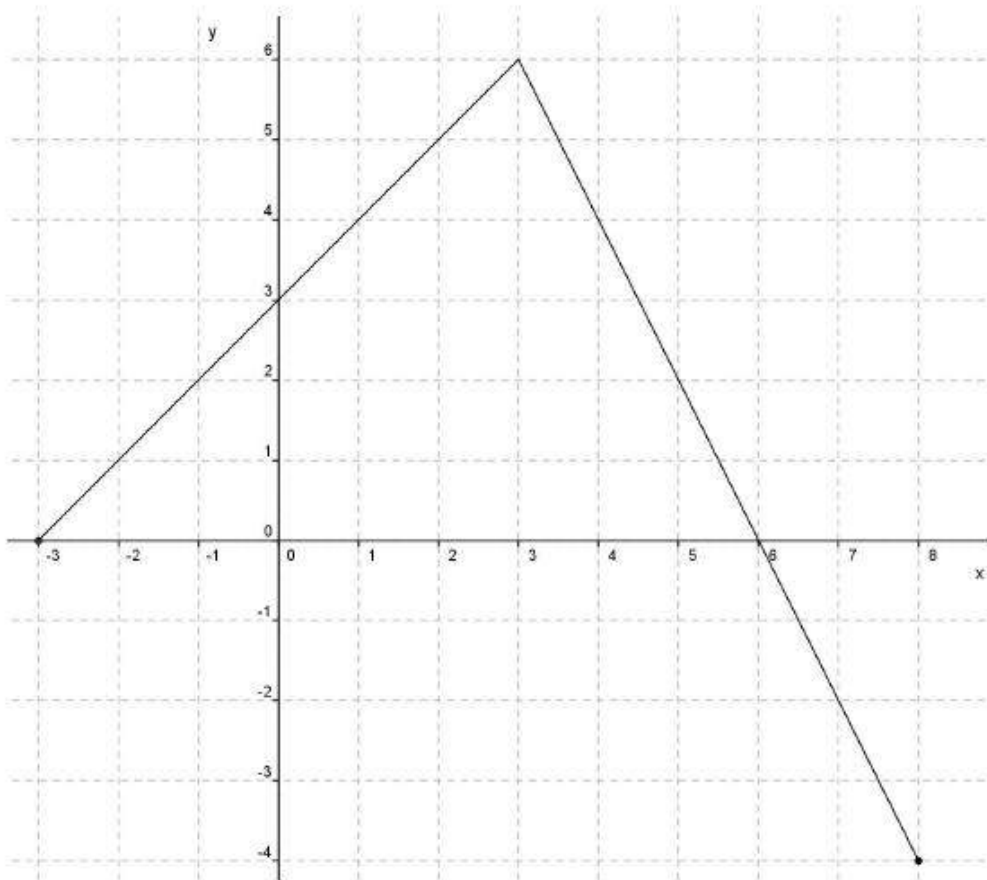
(Μονάδες 9)

γ) Υπάρχει $x \in (2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες συντεταγμένων.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του α) ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \text{ και } \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

(Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

(Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x + 4$, $2 - x$, $6 - x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

i. το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 6)

ii. τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1|+|x-5|}{3}$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1,3)$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) ισχύουν: $a_1 = 2$ και $a_{25} = a_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2 + 10x = 12$.

(Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$.

ii. για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$

(Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4.$$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο n -οστος όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_n = 2n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6)$, $B(-1, 4)$, να βρείτε τις τιμές των α, β .

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x , $2x+1$, $5x+4$, με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i. $x = 1$

ii. $x = -1$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x < 0 \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$.

(Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = 0$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς.

(Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20} .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$.

(Μονάδες 15)

β) Αν για τους x, y ισχύουν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι $3 < x + y < 7$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: $f(2) + f(4) = 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί $A=1$, $B=x+4$, $\Gamma=x+8$, είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_n) .

α) Να βρείτε την τιμή του x .

(Μονάδες 10)

β) Αν $x=1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_n) .

i. να υπολογίσετε τη διαφορά ω .

(Μονάδες 7)

ii. να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει

στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$.

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$.

(Μονάδες 13)

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \text{ και } |y - 6| \leq 4.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y , ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5| < 2$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x| > 5$.

(Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β).

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $3x - 1 < x + 9$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-5) + f(0) + f(3)$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 3$.

(Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_n) με θετικό λόγο λ , για την οποία ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

α) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_n = 2^{n-3}$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x|}{3} - \frac{|x|+4}{5} = \frac{2}{3}$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|2x - 1| \leq 7$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| > 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x + 4| = 10$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| > 1$.

(Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1, 2, 3, \dots, n$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσοι από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους έχουν άθροισμα 45.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να δείξετε ότι $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$ (1).

(Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$.

(Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ανισώσεις : $-x^2+5x-6<0$ (1), $x^2-16\leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των (1), (2).

(Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι :

$$\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2.$$

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το αρχικό τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25 \cdot x, \text{ όταν } 0 \leq x \leq 200$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου, το οποίο βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C .

(Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ;

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Αν α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = -30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8 - x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x+1$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2a^2+b^2$ και $\Lambda=2ab$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ .

(Μονάδες 13)

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 12)

γ) Να τοποθετήσετε τον αριθμό $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Είναι ο αριθμός $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β);

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 5 \text{ και } f(1) = 3.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει ότι $f(x) = x^2 + 4x$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|1 - 2x| < 5$ (Μονάδες 9)

ii. $|1 - 2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις)

$$\sqrt{2} \cong 1,41$$

$$\sqrt{3} \cong 1,73$$

$$\sqrt{5} \cong 2,24$$

$$\sqrt{7} \cong 2,64$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$;

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x - 4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x = -3$ να αποδείξετε ότι $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι: $1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$,

α) Να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$, είναι αριθμός ανεξάρτητος του

x .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = |x - 1| + |y - 3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A = x^4 + \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$.

α) Να δείξετε ότι $A = x^4 + x^2 + 2$.

(Μονάδες 15)

β)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί $A > 0$ για κάθε $x \neq \pm\sqrt{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της;

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 25 = 0$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 - 36 \leq 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος.

(Μονάδες 9)